УДК 517.9

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛЕВЫМИ И ПРАВЫМИ КОРНЯМИ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

М. Н. Орешина

Липецкий государственный технический университет

Поступила в редакцию 07.10.2024 г.

Аннотация. Рассматриваются квадратичные пучки с ограниченными операторными коэффициентами и тождественным оператором при старшей степени. Задача о факторизации такого пучка, то есть о представлении его в виде произведения двух линейных пучков, тесно связана с задачей нахождения полных пар правых или левых корней пучка. В статье получены некоторые формулы, связывающие левые и правые корни из полных пар, и обсуждается их применение к вычислению аналитических функций от пучка.

Ключевые слова: квадратичный пучок, левый и правый корни пучка, полная пара корней пучка, функции от пучка.

A RELATION BETWEEN LEFT AND RIGHT SOLVENTS OF A QUADRATIC OPERATOR PENCIL

M. N. Oreshina

Abstract. Quadratic pencils with bounded operator coefficients and the identity operator at the highest degree are considered. The problem of factorizing such a pencil, that is, of representing it as a product of two linear pencils, is closely related to the problem of finding complete pairs of right or left solvents of the pencil. In the article, some formulas connecting the left and right solvents from complete pairs are obtained and their application to the calculation of analytic functions of a pencil is discussed.

Keywords: quadratic pencil, left and right solvents of a pencil, complete pair of solvents of a pencil, functions of a pencil.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим квадратичный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2\mathbf{1} + \lambda B + C,$$

где B и C — линейные ограниченные операторы. Каждой аналитической функции f сопоставим оператор

$$f(L) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda^2\mathbf{1} + \lambda B + C)^{-1}\,d\lambda. \tag{1}$$

Необходимость вычислять операторы вида (1) возникает, например [1]–[6], при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Задача о разложении [7]–[9] такого пучка на линейные множители

$$L(\lambda) = \lambda^2\mathbf{1} + \lambda B + C = (\lambda\mathbf{1} - Y)(\lambda\mathbf{1} - X) \tag{2}$$

приводит [1], [2], [10]–[12], [6] к рассмотрению квадратного уравнения

$$X^2 + BX + C = \mathbf{0}.$$

Решения X такого уравнения называют *правыми корнями* пучка. Если удается найти два правых корня X_1 и X_2, для которых оператор $X_1 - X_2$ обратим, то говорят, что они образуют *полную пару* правых корней, что позволяет [2], [4], [6] свести вычисление $f(L)$ к вычислению функций от полученных корней из полной пары. При этом задача нахождения полной пары является [11], [12], [6] нетривиальной.

Одновременно с изучением правых корней пучка можно рассматривать и задачу о нахождении левых корней пучка, то есть решений уравнения

$$Y^2 + YB + C = \mathbf{0},$$

и составления полных левых пар. При этом в факторизации (2) пучка всегда участвует один правый корень X и один левый корень Y, между которыми есть простая связь (см. теорему 1). В настоящей статье показано, что левый корень Y_1, соответствующий правому корню X_1, и оператор X_2, образующий вместе с X_1 полную пару, подобны. Для нахождения оператора преобразования подобия W можно решать уравнение Сильвестра (теорема 4)

$$X_1 W - W Y_1 = \mathbf{1},$$

если оператор Y_1 уже найден. Кроме того, оказывается, что оператор X_2 и оператор Y_2, образующий полную левую пару с Y_1, подобны с тем же оператором преобразования W. Близкие вопросы для матричного пучка n-го порядка обсуждались в [11]–[14].

В п. 2 напоминаются основные сведения про факторизацию пучка, его корни и полные пары. В п. 3 формулируется и доказывается теорема о преобразовании подобия корней. В п. 4. приводятся несколько вариантов представлений для аналитических функций от пучка, а в п. 5 обсуждается вычисление функций от пучка в некоторых случаях, когда факторизация невозможна или нежелательна.

2. ПОЛНЫЕ ПАРЫ ЛЕВЫХ И ПРАВЫХ КОРНЕЙ ПУЧКА

Пусть $\mathbf{X}$ — банахово пространство. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathbf{X}$. Символом $\mathbf{1}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ будем обозначать тождественный оператор, а символом $\mathbf{0}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — нулевой оператор.

Пусть $B, C \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$. Рассмотрим квадратичный операторный пучок [1], [2], [6], [10]–[12]

$$L(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{1} + \lambda B + C, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Резольвентным множеством пучка (3) называют множество $\rho(L)$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что оператор $L(\lambda)$ обратим. Функцию

$$R_\lambda = (\lambda^2 \mathbf{1} + \lambda B + C)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(L),$$

называют *резольвентой* пучка (3). Множество $\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash \rho(L)$ называют *спектром* пучка (3).

Говорят, что пучок (3) *факторизован*, если он представлен в виде произведения двух линейных пучков

$$L(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{1} + \lambda B + C = (\lambda \mathbf{1} - Y)(\lambda \mathbf{1} - X),$$

где $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$. Очевидно, в этом случае для резольвенты пучка (3) справедливо представление

$$R_\lambda = (\lambda^2 \mathbf{1} + \lambda B + C)^{-1} = (\lambda \mathbf{1} - X)^{-1}(\lambda \mathbf{1} - Y)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(L).$$

Отметим, что не любой квадратичный пучок можно факторизовать, а если факторизация существует, то она не обязательно единственная, наоборот, типичной является ситуация, когда пучок можно представить в виде произведения двух линейных множителей разными способами.

Правым корнем пучка (3) называют [1] оператор $X \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, если он удовлетворяет уравнению

$$X^2 + BX + C = \mathbf{0},$$

а *левым корнем* пучка (3) называют оператор $Y \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, если он удовлетворяет уравнению

$$Y^2 + YB + C = \mathbf{0}.$$

Следующая теорема показывает, что для факторизации пучка достаточно найти один правый или левый корень.

Теорема 1 ([1], [10])**.** *Правый (левый) корень пучка однозначно задает факторизацию, а именно,*

1. *если оператор X является правым корнем пучка, то оператор $Y = -X - B$ является левым корнем, при этом*

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} + X + B)(\lambda\mathbf{1} - X);$$

2. *если оператор Y является левым корнем пучка, то оператор $X = -Y - B$ является правым корнем, при этом*

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} - Y)(\lambda\mathbf{1} + Y + B).$$

Доказательство. 1) Имеем

$$\begin{aligned}(-X - B)^2 + (-X - B)B + C = \\ &= X^2 + BX + XB + B^2 - XB - B^2 + C = \\ &= X^2 + BX + C = \mathbf{0},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{1} + X + B)(\lambda\mathbf{1} - X) &= \lambda^2\mathbf{1} + X\lambda + B\lambda - X\lambda - X^2 - BX = \\ &= \lambda^2\mathbf{1} + B\lambda - X^2 - BX = \\ &= \lambda^2\mathbf{1} + B\lambda - (X^2 + BX + C) + C = \\ &= \lambda^2\mathbf{1} + B\lambda + C = L(\lambda).\end{aligned}$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Замечание 1. Отметим два частных случая, возникающих при факторизации

1. $X = -\frac{1}{2}B$, тогда $Y = -X - B = -\frac{1}{2}B = X$, то есть левый корень совпадает с правым и факторизация пучка принимает вид

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} - X)^2;$$

2. $B = \mathbf{0}$, тогда $Y = -X$ и факторизация пучка принимает вид

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} + X)(\lambda\mathbf{1} - X).$$

Левый и правый корни X и Y, стоящие в одной и той же факторизации пучка, т.е. удовлетворяющие соотношению $L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} - Y)(\lambda\mathbf{1} - X)$, будем называть *соответствующими* друг другу.

В следующей теореме приводится представление для резольвенты пучка в виде разности резольвент двух линейных пучков с операторным коэффициентом W, который может быть найден как решение уравнения Сильвестра [15]–[18]. Напомним, что для существования и единственности решения уравнения Сильвестра требуется [18, теорема 64], чтобы спектры его операторных коэффициентов не пересекались. Близкое утверждение о представлении резольвенты пучка с помощью разности резольвент корней из полной правой пары приводится в [1, лемма 4.1] и [3], [4].

Теорема 2. *Пусть X — правый корень пучка, а Y — соответствующий ему левый корень, причем их спектры $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$ не пересекаются. Тогда для резольвенты пучка справедлива формула*

$$R_\lambda = (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}W - W(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1},$$

где оператор W является решением уравнения Сильвестра

$$XW - WY = \mathbf{1}.$$

Доказательство. Действительно.

$$\begin{aligned} R_\lambda &= (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1} = (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}(XW - WY)(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1} = \\ &= (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}(XW - W + W - WY)(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1} = \\ &= (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}\left(-(\lambda\mathbf{1} - X)W + W(\lambda\mathbf{1} - Y)\right)(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1} = \\ &= -W(\lambda\mathbf{1} - Y)^{-1} + (\lambda\mathbf{1} - X)^{-1}W. \quad \square \end{aligned}$$

Говорят, что правые корни X_1 и X_2 пучка (3) образуют *полную пару* [1], [2], если оператор $X_1 - X_2$ обратим. Аналогично определяется полная пара левых корней пучка (3).

Теорема 3. *Если операторы X_1, X_2 образуют полную пару правых корней пучка, то соответствующие им левые корни Y_1,Y_2 образуют полную пару левых корней пучка.*

Доказательство. Из обратимости оператора $X_1 - X_2$ следует обратимость оператора $Y_1 - Y_2 = (-X_1 - B) - (-X_2 - B) = -X_1 + X_2$. $\square$

3. ПОДОБИЕ КОРНЕЙ

Перейдем к обсуждению способов пересчета левых и правых корней из полных пар.

Теорема 4. *Пусть операторы X_1, X_2 образуют полную пару правых корней пучка, а Y_1,Y_2 — соответствующие им левые корни. Тогда операторы X_1 и Y_2 подобны, операторы X_2 и Y_1 также подобны:*

$$X_2 = WY_1W^{-1}, \qquad Y_1 = W^{-1}X_2W; \tag{4}$$

$$X_1 = WY_2W^{-1}, \qquad Y_2 = W^{-1}X_1W; \tag{5}$$

причем оператор преобразования W в формулах (4) *и* (5) *один и тот же и удовлетворяет соотношениям*

$$W = (X_1 - X_2)^{-1} = (Y_2 - Y_1)^{-1}, \tag{6}$$

$$X_1W - WY_1 = \mathbf{1}, \tag{7}$$

$$WY_2 - X_2W = \mathbf{1}. \tag{8}$$

Доказательство. Возьмем $W = (X_1 - X_2)^{-1}$ и проверим справедливость соотношений (4). Так как $Y_1 = -X_1 - B$, а X_1 и X_2 являются правыми корнями, то

$$\begin{aligned} WY_1W^{-1} &= (X_1 - X_2)^{-1}(-X_1 - B)(X_1 - X_2) = \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}(-X_1^2 - BX_1 + X_1X_2 + BX_2) = \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}\left((-X_1^2 - BX_1 - C) + C + X_1X_2 + BX_2\right) = \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}\left(-X_2^2 + X_2^2 + BX_2 + C + X_1X_2\right) = \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}(X_1 - X_2)X_2 = X_2. \end{aligned}$$

Проверим соотношение (7). Из (4) следует, что $WY_1 = X_2W$. Поэтому

$$X_1W - WY_1 = X_1W - X_2W = (X_1 - X_2)W = (X_1 - X_2)(X_1 - X_2)^{-1} = \mathbf{1}.$$

Соотношения (5) и (8) проверяются аналогично. □

Таким образом, если известна полная пара правых (левых) корней, соответствующая ей полная левая (правая) пара получается преобразованием подобия с одним и тем же оператором подобия, который можно вычислить по явной формуле (6). С другой стороны, если известен только один корень, например, правый X_1, то соответствующий ему левый корень Y_1 легко находится из теоремы 1. В этом случае, для нахождения второго правого корня X_2, дополняющего X_1 до полной правой пары, вычислить оператор W по формуле (6) не удается, так как X_2 еще не найден, но можно найти оператор W, решая уравнение Сильвестра (7), если спектры операторов X_1 и Y_1 не пересекаются. Правда, если спектры операторов X_1 и Y_1 пересекаются, то решить уравнение Сильвестра и тем самым вычислить оператор W не удается.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ФАКТОРИЗОВАННОГО ПУЧКА

Пусть U — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(L)$ пучка, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, а Γ — положительно ориентированный контур, лежащий в U и охватывающий $\sigma(L)$. *Аналитической функцией от квадратичного пучка* (3) называют оператор

$$f(L) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda^2\mathbf{1} + \lambda B + C)^{-1}\,d\lambda.$$

Следующая теорема позволяет связать функции от квадратичного пучка с функциями от его корней

$$\begin{aligned} f(X_i) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - X_i)^{-1}\,d\lambda, \\ f(Y_i) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - Y_i)^{-1}\,d\lambda, \qquad i = 1{,}2. \end{aligned}$$

Представление (11) из этой теоремы приводится также в [2, теорема 2.16], [4, формула (5.24)] и [6, теорема 10]. Матричный вариант формулы (9) приведен в [19, теорема 3 и предложение 6].

Теорема 5. *Пусть операторы X_1, X_2 образуют полную пару правых корней пучка, а Y_1,Y_2 — соответствующие им левые корни. Тогда*

$$\begin{aligned} f(L) &= f(X_1)W - Wf(Y_1) = && (9)\\ &= Wf(Y_2) - f(X_2)W = && (10)\\ &= \left(f(X_1) - f(X_2)\right)W = && (11)\\ &= W\left(f(Y_2) - f(Y_1)\right), && (12) \end{aligned}$$

где оператор W удовлетворяет соотношениям (6)–(8).

Доказательство. Возьмем пару соответствующих левого и правого корней X_1 и Y_1. Воспользуемся представлением для резольвенты пучка из теоремы 2. В результате получим

$$\begin{aligned}f(L) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\left((\lambda\mathbf{1}-X_1)^{-1}W - W(\lambda\mathbf{1}-Y_1)^{-1}\right)\,d\lambda = \\ &= f(X_1)W - Wf(Y_1).\end{aligned}$$

Для доказательства остальных формул необходимо воспользоваться формулами подобия корней из теоремы 4. Например, представление (11) получается следующим образом:

$$\begin{aligned}f(L) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\left(\lambda\mathbf{1}-X_1)^{-1}W - W(\lambda\mathbf{1}-Y_1)^{-1}\right)\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-X_1)^{-1}W - W(\lambda\mathbf{1}-W^{-1}X_2W)^{-1}\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\left((\lambda\mathbf{1}-X_1)^{-1}W - (\lambda\mathbf{1}-X_2)^{-1}W\right)\,d\lambda = \\ &= \left(f(X_1)-f(X_2)\right)W. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 2. Отметим, что формулы (9)–(12) можно интерпретировать как вычисление разделенной разности от двух операторов [18]. Можно показать [18, предложение 51], что для пучка вида

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1}-X)^2,$$

то есть в случае, когда левый и правый корни совпадают,

$$f(L) = f'(X).$$

5. ФУНКЦИИ ОТ ПУЧКА $\lambda^2\mathbf{1}+C$

Отметим, что для вычисления функций от пучка с нулевым средним слагаемым, то есть для $L(\lambda)=\lambda^2\mathbf{1}+C$ факторизация не всегда желательна, даже если и возможна. Если факторизация такого пучка существует, то в силу замечания 1 она имеет вид

$$L(\lambda) = (\lambda\mathbf{1}+X)(\lambda\mathbf{1}-X), \tag{13}$$

при этом $X^2=-C$. В этом случае из теоремы 5 следует, что

$$f(L) = \left(f(X)-f(-X)\right)(2X)^{-1}. \tag{14}$$

Возможны несколько ситуаций.

1. Если пространство $\mathbf{X}$ — гильбертово, а оператор C является отрицательно определенным, то оператор $-C$ положительно определен и, следовательно, существует [20, теорема 12.33] такой положительно определенный оператор X, что $X^2=-C$.

2. Если пространство $\mathbf{X}$ — гильбертово, а оператор C является положительно определенным, то существует такой положительно определенный оператор Y, что $Y^2=C$. В этом случае для выполнения соотношения $X^2=-C$ следует положить $X=iY$, при этом

$$f(L) = \left(f(iY)-f(-iY)\right)(2iY)^{-1}. \tag{15}$$

Если исходная задача рассматривается в действительном гильбертовом пространстве, то появление комплексных чисел при промежуточных вычислениях для $f(L)$ нежелательно. В этом случае можно рассуждать следующим образом. В таких задачах обычно рассматриваются аналитические функции f, принимающие действительные значения для действительного аргумента, то есть обладающие свойством $f(\bar{\xi}) = \overline{f(\xi)}$. Будем интерпретировать формулу (15) как вычисление функции

$$g(\xi) = \frac{f(i\sqrt{\xi}) - f(-i\sqrt{\xi})}{2i\sqrt{\xi}} = \frac{f(i\sqrt{\xi}) - \overline{f(i\sqrt{\xi})}}{2i\sqrt{\xi}}. \tag{16}$$

от оператора C. Поскольку функция g является аналитической в U, то вычисление $f(L)$ сводится к вычислению $g(C)$ и явный переход к факторизации не требуется. Очевидно, что функция g принимает действительные значения на действительной оси.

3. Оператор C таков, что оператор X, удовлетворяющий $X^2 = C$ или $X^2 = -C$ не существует. В этом случае пучок факторизовать нельзя. Тем не менее, функция (16) является аналитической в U, и можно показать [21, теорема 9], что формула $f(L) = g(C)$ все равно остается справедливой.

В качестве приложения рассмотрим начальную задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} x''(t) + Cx(t) &= \mathbf{0}, \\ x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= x_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Решение этой задачи задается [5, теорема 16] формулой

$$x(t) = \exp_t^{(1)}(L)x_0 + \exp_t(L)x_1,$$

где

$$\begin{aligned} \exp_t(L) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda^2\mathbf{1} + C)^{-1}\,d\lambda, \\ \exp_t^{(1)}(L) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{\lambda t}(\lambda^2\mathbf{1} + C)^{-1}\,d\lambda. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} s_t(\xi) &= \frac{\exp_t(i\sqrt{\xi}) - \overline{\exp_t(i\sqrt{\xi})}}{2i\sqrt{\xi}} = \frac{\sin\sqrt{\xi}t}{\sqrt{\xi}}, \\ c_t(\xi) &= \frac{\exp_t^{(1)}(i\sqrt{\xi}) - \overline{\exp_t^{(1)}(i\sqrt{\xi})}}{2i\sqrt{\xi}} = \cos\sqrt{\xi}t. \end{aligned}$$

Тогда $\exp_t(L) = s_t(C)$, $\exp_t^{(1)}(L) = s_t(C)$ и

$$x(t) = c_t(C)x_0 + s_t(C)x_1.$$

В частности, если $C^2 = \mathbf{0}$, то из разложений

$$\begin{aligned} c_t(\xi) &= \cos\sqrt{\xi}t = 1 - \frac{\xi t^2}{2!} + \frac{\xi^2 t^4}{4!} + \dots, \\ s_t(\xi) &= \frac{\sin\sqrt{\xi}t}{\sqrt{\xi}} = t - \frac{\xi t^3}{3!} + \frac{\xi^2 t^5}{5!} + \dots, \end{aligned}$$

и свойства $C^k = \mathbf{0}$, $k > 1$, следует, что

$$c_t(C) = \mathbf{1} - \frac{t^2}{2!}C + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{1} - \frac{t^2}{2!}C,$$
$$s_t(C) = t\mathbf{1} - \frac{t^3}{3!}C + \mathbf{0} + \mathbf{0} = t\mathbf{1} - \frac{t^3}{3!}C.$$

Тогда

$$x(t) = c_t(C)x_0 + s_t(C)x_1 = x_0 - \frac{t^2}{2!}Cx_0 + tx_1 - \frac{t^3}{3!}Cx_1.$$

Таким образом, вычисление функции от квадратичного пучка в этом случае сводится к вычислению функции от одного оператора C, хотя факторизация пучка невозможна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн, М. Г. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов / М. Г. Крейн, Г. К. Лангер // Тр. межд. симп. по прим. теории функций в мех. спл. среды. — 1965. — С. 283–322.

2. Gohberg, I. Matrix polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. — New York–London : Academic Press, Inc., 1982. — 409 p.

3. Перов, А. И. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах / А. И. Перов, И. Д. Коструб // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 1. — С. 73–77.

4. Перов, А. И. О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах : учебное пособие / А. И. Перов, И. Д. Коструб. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — 56 с.

5. Курбатова, И. В. Функциональное исчисление, порожденное квадратичным операторным пучком / И. В. Курбатова // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011. — Т. 389. — С. 113–130.

6. Kurbatov, V. G. A complete pair of solvents of a quadratic matrix pencil / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova : Voronezh State University, 2024. — arXiv:2405.07210.

7. Келдыш, М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11–14.

8. Келдыш, М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М. В. Келдыш // Успехи матем. наук. — 1971. — Т. 26, № 4. — С. 15–41.

9. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев : Штиинца, 1986. — 260 с.

10. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

11. Shieh, L. S. Transformations of solvents and spectral factors of matrix polynomials, and their applications / L. S. Shieh, Y. T. Tsay // Internat. J. Control. — 1981. — Vol. 34, no. 4. — P. 813–823.

12. Tsai, J. S. H. A computer-aided method for solvents and spectral factors of matrix polynomials / J. S. H. Tsai, C. M. Chen, L. S. Shieh // Applied mathematics and computation. — 1992. — Vol. 47, no. 2–3. — P. 211–235.

13. Lancaster, P. Lambda-matrices and vibrating Systems / P. Lancaster. — Oxford : Pergamon Press Inc., 1966. — 196 p.

14. Dennis Jr., J. E. The algebraic theory of matrix polynomials / J. E. Dennis, Jr., J. F. Traub, R. P. Weber // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — Vol. 13, no. 6. — P. 831–845.

15. Икрамов, Х. Д. Численное решение матричных уравнений. Ортогональные методы / Х. Д. Икрамов. — М. : Наука, 1984. — 192 с.

16. Bhatia, R. How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$ / R. Bhatia, P. Rosenthal // Bull. Lond. Math. Soc. — 1997. — Vol. 29, no. 1. — P. 1–21.

17. Simoncini, V. On the numerical solution of $AX - XB = C$ / V. Simoncini // BIT. Numerical Mathematics. — 1996. — Vol. 36, no. 4. — P. 814–830.

18. Kurbatov, V. G. Analytic functional calculus for two operators / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, M. N. Oreshina // Adv. Oper. Theory. — 2021. — Vol. 6, no. 4. — 63 p.

19. Орешина, М. Н. Аналитические функции от факторизованного квадратичного пучка / М. Н. Орешина // Вести высших учебных заведений Черноземья. — 2005. — № 1. — С. 26–30.

20. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 443 с.

21. Курбатова, И. В. О квадратичном пучке с нулевым средним слагаемым / И. В. Курбатова // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна. — 2010. — С. 133–141.

REFERENCES

1. Kreĭn M. G., Langer H. On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua. [Krein M.G., Langer H. O nekotoryh matematicheskih principah linejnoj teorii dempfirovannyh kolebanij kontinuumov]. Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma po primeneniyu teorii funkcij v mekhanike sploshnoj sredy, 1965, vol. 2, pp. 283–322.

2. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix polynomials. Academic Press, Inc., New York–London, 1982, 409 p.

3. Perov A.I., Kostrub I.D. Differentail equations in Banach algebras. [Perov A.I., Kostrub I.D. Differencial'nye uravneniya v banahovyh algebrah]. *Dokl. RAN. Matematika, informatika, processy upravleniya — Dokl. Akad. Nauk*, 2020, vol. 491, no. 1, pp. 73–77.

4. Perov A.I., Kostrub I.D. On differential equations in Banach algebras. [Perov A.I., Kostrub I.D. O differencial'nyh uravneniyah v banahovyh algebrah]. Voronezh: VGU Publishing House, 2020, 56 p.

5. Kurbatova I.V. Functional calculus generated by a quadratic pencil. [Kurbatova I.V. Funkcional'noe ischislenie, porozhdennoe kvadratichnym operatornym puchkom]. Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2011, vol. 389, pp. 113–130.

6. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. A complete pair of solvents of a quadratic matrix pencil. arXiv:2405.07210v1 [math.NA], 2024.

7. Keldysh M.V. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations. [Keldysh M.V. O sobstvennyh znacheniyah i sobstvennyh funkciyah nekotoryh klassov nesamosopryazhennyh uravnenij]. *Doklady Akad. Nauk SSSR — Dokl. Akad. Nauk*, 1951, vol. 77, no. 1, pp. 11–14.

8. Keldysh M.V. The completeness of eigenfunctions of certain classes of nonselfadjoint linear operators. [Keldysh M.V. O polnote sobstvennyh funkcij nekotoryh klassov nesamosopryazhennyh linejnyh operatorov]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 4, pp. 15–41.

9. Markus A.S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. [Markus A.S. Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nyh operatornyh puchkov]. Kishinev, 1986, 260 p.

10. Gantmacher F.R. The theory of matrices. [Gantmacher F.R. Teoriya matric]. Moscow, 1986, 552 p.

11. Shieh L.S., Tsay Y.T. Transformations of solvents and spectral factors of matrix polynomials, and their applications. Internat. J. Control, 1981, vol. 34, no. 4, pp. 813–823.

12. Tsai J.S.H., Chen C.M., Shieh L.S. A computer-aided method for solvents and spectral factors of matrix polynomials. Applied mathematics and computation, 1992, vol. 47, no. 2–3, pp. 211–235.

13. Lancaster P. Lambda-matrices and vibrating Systems. Pergamon Press Inc., Oxford, 1966, 196 p.

14. Dennis, Jr.J.E., Traub J.F., Weber R.P. The algebraic theory of matrix polynomials. SIAM J. Numer. Anal., 1976, vol. 13, no. 6, pp. 831–845.

15. Ikramov K.D. Numerical solution of matrix equations. Orthogonal methods. [Ikramov Kh.D. Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniĭ. Ortogonal'nye metody]. Moscow, 1984, 192 p.

16. Bhatia R., Rosenthal P. How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$. Bull. Lond. Math. Soc., 1997, vol. 29, no. 1, pp. 1–21.

17. Simoncini V. On the numerical solution of $AX - XB = C$. BIT. Numerical Mathematics, 1996, vol. 36, no. 4, pp. 814–830.

18. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V., Oreshina M.N. Analytic functional calculus for two operators. Adv. Oper. Theory, 2021, vol. 6, no. 4, 63 p.

19. Oreshina M.N. Analytic functions of a factorized square pencil. [Oreshina M.N. Analiticheskie funkcii ot faktorizovannogo kvadratichnogo puchka]. *Vesti vysshih uchebnyh zavedenij Chernozem'ya — News from higher educational institutions of the Black Earth Region*, 2005, no. 1, pp. 26–30.

20. Rudin W. Functional analysis. [Rudin W. Funkcional'nyj analiz]. Moscow, 1975, 443 p.

21. Kurbatova I.V. A square pencil with a zero middle term. [Kurbatova I.V. O kvadratichnom puchke s nulevym srednim slagaemym]. Trudy Voronezhskoj zimnej matematicheskoj shkoly, 2010, pp. 133–141.

Орешина М. Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Россия
E-mail: m_oreshina@mail.ru

Oreshina M. N., Candidate of Science in Phisics and Mathematics, associate professor of the Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia
E-mail: m_oreshina@mail.ru