УДК 517.95

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова, А. С. Рябенко, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.09.2025 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача для эллиптического уравнения, описывающая стационарное распределение температуры в неоднородной полуплоскости с конечной трещиной, подходящей к границе полуплоскости. Доказана корректность рассматриваемой задачи, построена формула представления решения задачи.

Ключевые слова: температура, трещина, уравнение стационарной теплопроводности, краевая задача.

ABOUT THE STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN A HETEROGENEOUS HALF-PLANE WITH A FINITE CRACK

E. A. Loginova, A. S. Ryabenko, A. S. Chernikova

Abstract. A problem for an elliptic equation is examined which describes a steady-state temperature distribution in a non-uniform half-plane with a finite crack approaching the boundary of the half-plane. The correctness of the problem is proven. The formula of representing the solution is designed.

Keywords: temperature, crack, steady-state heat conduction equation, boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математических моделей, описывающих различные процессы, происходящие в материалах с дефектами, не теряет свою актуальность на протяжении нескольких десятилетий (см. [1]–[10]). Одним из направлений в исследовании подобных задач является анализ тепловых процессов в материалах с трещинами (см. [4]–[10]).

Рассматриваемая в работе задача моделирует стационарное распределение тепла в неоднородной полуплоскости с прямолинейной трещиной, подходящей под острым углом к границе полуплоскости. Отметим, что аналогичная задача для случая однородной полуплоскости была рассмотрена в работе [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Через Δ будем обозначать оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial}{\partial \overline{m}}$ — производную по направлению вектора $\overline{m} = (m_1,m_2)$, а через $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ — соответственно множества точек $\left\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0\right\}$.

Пусть $\alpha \in \left(, \frac{\pi}{2}\right)$ — фиксированный угол, $\overline{n}$ — вектор с координатами $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$, $l_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = t\cos\alpha, x_2 t = \sin\alpha, t \in (0;|l|)\right\}$ — интервал, подходящий к границе полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, $\bar{l}_+$ — соответствующий l_+ отрезок.

Рассмотрим задачу:

$$\Delta u(x) + k\cos\beta\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + k\sin\beta\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_+\backslash\bar{l}_+, \tag{1}$$

$$u\left(x_1{,}0\right) = \widetilde{\psi}\left(x_1\right), \quad x_1 \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}, \tag{2}$$

$$u\left(x + 0\cdot\bar{n}\right) - u\left(x - 0\cdot\bar{n}\right) = \widetilde{q}_0\left(x\right), \quad x \in l_+, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial u(x+0\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \tfrac{\partial u(x-0\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \\ -\tfrac{k}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)\left(u\left(x+0\cdot\bar{n}\right) - u\left(x-0\cdot\bar{n}\right)\right) = \widetilde{q}_1\left(x\right), x \in l_+.\end{gathered} \tag{4}$$

Задача (1)–(4) описывает стационарное распределение тепла в верхней полуплоскости с разрезом по отрезку $\bar{l}_+$, подходящему к границе полуплоскости под углом α, если вектор направления неоднородности материала направлен под углом $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ к оси абсцисс. Отрезок $\bar{l}_+$ моделирует наличие трещины. Уравнение (1) получено из уравнения стационарного распределения тепла в твердом теле без тепловых источников $\operatorname{div}\left(k(x_1,x_2)\operatorname{grad}u(x_1,x_2)\right)$, где $k\left(x_1{,}x_2\right) = e^{k(x_1\cos\beta + x_2\sin\beta)}$ — коэффициент внутренней теплопроводности ($k \equiv const > 0$). Искомая функция $u\left(x\right)$ — значение температуры в точке x. Условие (2) задает температуру на границе полуплоскости, а условия (3) и (4) — скачки температуры и теплового потока на трещине $\bar{l}_+$ соответственно.

Замечание 1. Условия (3) и (4) понимаются в смысле главного значения:

$$u\left(x + 0\cdot\bar{n}\right) - u\left(x - 0\cdot\bar{n}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(u\left(x+\varepsilon\cdot\bar{n}\right) - u\left(x-\varepsilon\cdot\bar{n}\right)\right),$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial u(x+0\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \tfrac{\partial u(x-0\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \tfrac{k}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)\left(u\left(x+0\cdot\bar{n}\right) - u\left(x-0\cdot\bar{n}\right)\right) = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\tfrac{\partial u(x+\varepsilon\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \tfrac{\partial u(x-\varepsilon\cdot\bar{n})}{\partial\bar{n}} - \tfrac{k}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)\left(u\left(x+\varepsilon\cdot\bar{n}\right) - u\left(x-\varepsilon\cdot\bar{n}\right)\right)\right).\end{gathered}$$

Замечание 2. Пусть A — некоторое множество в $\mathbb{R}$ или R^2. Через $C\left(A\right)$ и $C^p\left(A\right)$ будем обозначать соответственно множество функций, непрерывных и p раз непрерывно дифференцируемых на множестве A. Через $\int\limits_{l}^{g(x)dl}$ будем обозначать криволинейный интеграл первого рода от функции $g\left(x\right)$ по кривой l.

В дальнейшем будем предполагать, что $\widetilde{q}_0\left(x\right), \widetilde{q}_1\left(x\right) \in C\left(\right)$, а функция $\widetilde{\psi}\left(x_1\right)$ из $C\left(\mathbb{R}\right)$ и ограничена на $\mathbb{R}$.

Определение. Решением задачи (1)–(4) назовем функцию $u\left(x\right)$ из $C^2\left(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{l}_+\right)$, которая является классическим решением уравнения (1) и для которой выполнены условия (2)–(4).

2. ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ. СВЕДЕНИЕ К ОБОБЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ

Будем искать решение задачи (1)–(4) в виде

$$u\left(x_1{,}x_2\right) = e^{-\frac{k}{2}\left(x_1\cos\beta + x_2\sin\beta\right)}v\left(x_1{,}x_2\right). \tag{5}$$

Тогда из равенств

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_1} = e^{-\frac{k}{2}\left(x_1\cos\beta + x_2\sin\beta\right)}\left(-\frac{k}{2}\left(\cos\beta\right)v\left(x\right) + \frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_2} = e^{-\frac{k}{2}\left(x_1\cos\beta + x_2\sin\beta\right)}\left(-\frac{k}{2}\left(\sin\beta\right)v\left(x\right) + \frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_2}\right),$$

$$\Delta u\left(x\right)=e^{-\frac{k}{2}\left(x_1\cos\beta+x_2\sin\beta\right)}\left(\Delta v\left(x\right)-k\left(\left(\cos\beta\right)\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_1}+\left(\sin\beta\right)\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial x_2}\right)+\frac{k^2}{4}v\left(x\right)\right)$$

получаем, что функция $v\left(x\right)$ должна быть решением задачи:

$$\Delta v(x)-\frac{k^2}{4}v(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}_+^2\backslash\bar{l}_+,\tag{6}$$

$$v\left(x_1,0\right)=\psi\left(x_1\right),\quad x_1\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\},\tag{7}$$

$$v\left(x+0\cdot\bar{n}\right)-v\left(x-0\cdot\bar{n}\right)=q_0\left(x\right),\quad x\in l_+,\tag{8}$$

$$\frac{\partial v\left(x+0\cdot\bar{n}\right)}{\partial\bar{n}}-\frac{\partial v\left(x-0\cdot\bar{n}\right)}{\partial\bar{n}}=q_1\left(x\right),\quad x\in l_+,\tag{9}$$

где $\psi\left(x_1\right)=e^{\frac{k}{2}x_1\cos\beta}\widetilde{\psi}\left(x_1\right)$, $q_j\left(x\right)=e^{\frac{k}{2}\left(x_1\cos\beta+x_2\sin\beta\right)}\widetilde{q}_j\left(x\right)$, $j=0;1$.

Определение решения задачи (6)–(9) аналогично определению решения задачи (1)–(4).

Пусть $l_-=\left\{x\in^2\left|x_1=t\cos\alpha,x_2=-t\sin\alpha,\ t\in\left(0;\ |l|\right)\right.\right\}$ — интервал, подходящий к границе полуплоскости $\mathbb{R}_-^+$, $\bar{l}_-$ — соответствующий l_- отрезок.

Рассмотрим функции:

$$\widehat{v}\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}v\left(x\right),x_2>0,\\-v\left(x_1,-x_2\right),x_2<0,\end{array}\right.\tag{10}$$

$$\widehat{q}_j\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}q_j\left(x\right),x_2>0,\\-q_j\left(x_1,-x_2\right),x_2<0,\end{array}\right.\tag{11}$$

где $j=0;1$, а $v\left(x\right)$ и $q_j\left(x\right)$ из задачи (6)–(9).

Из (6)–(11) получаем, что функция $\widehat{v}\left(x\right)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\Delta\widehat{v}\left(x\right)-\frac{k^2}{4}\widehat{v}\left(x\right)=0,\quad x\in\left(\mathrm{R}_+^2\backslash\bar{l}_+\right)\cup\left(\mathbb{R}_-^2\backslash\bar{l}_-\right),\tag{12}$$

$$\widehat{v}\left(x+0\cdot\bar{n}_2\right)-\widehat{v}\left(x-0\cdot\bar{n}_2\right)=\widehat{q}_0\left(x\right),\quad x\in l_+\cup l_-,\tag{13}$$

$$\frac{\partial\widehat{v}\left(x+0\cdot\bar{n}_2\right)}{\partial\bar{n}_2}-\frac{\partial\widehat{v}\left(x-0\cdot\bar{n}_2\right)}{\partial\bar{n}_2}=\widehat{q}_1\left(x\right),\quad x\in l_+\cup l_-,\tag{14}$$

где $\bar{n}_2=\left\{\begin{array}{c}\bar{n}=\left(-\sin\alpha,\cos\alpha\right),x\in l_+,\\\bar{n}_1=\left(-\sin\alpha,-\cos\alpha\right),x\in l_-.\end{array}\right.$

Замечание 3. Пространства бесконечно дифференцируемых и финитных функций в $\mathbb{R}^2$ и множество линейных и непрерывных функционалов над этим пространством будем соответственно обозначать $D\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$ (см. [11]).

Замечание 4. Пусть l – отрезок в $\mathbb{R}^2$, $q\left(x\right)\in C\left(l\right)$, $\bar{m}=\left(m_1,m_2\right)$. Через $q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)$ и $\frac{\partial q(x)\delta_l(x)}{\partial\bar{m}}$ будем обозначать функции из $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$, действующие по следующему правилу: для любой функции $\varphi\left(x\right)\in D\left(\mathbb{R}^2\right)$

$$\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right),\varphi\left(x\right)\right)=\int\limits_l q\left(x\right)\varphi\left(x\right)dl,\quad\left(\frac{\partial q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)}{\partial\bar{m}},\varphi\left(x\right)\right)=-\int\limits_l q\left(x\right)\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial\bar{m}}dl.$$

Из определения решения задачи (6)–(9) следует, что функция $\widehat{v}\left(x\right)$ локально интегрируема, и, следовательно, она порождает регулярный функционал в пространстве $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$, который также будем обозначать $\widehat{v}\left(x\right)$.

Сформулируем и докажем теорему.

Теорема 1. *Если у задачи (6)–(9) существует решение, то функция $\widehat{v}\left(x\right)$, заданная равенством (10), является решением следующего обобщенного уравнения в $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$:*

$$\Delta\widehat{v}(x)-\frac{k^2}{4}\widehat{v}\left(x\right)=$$

$$= 2\psi\left(x_1\right)\delta'\left(x_2\right) + q_1\left(x\right)\delta_{l_+}\left(x\right) + \frac{\partial\left(q_0\left(x\right)\delta_{l_+}\left(x\right)\right)}{\partial\bar{n}} + \widehat{q}_1\left(x\right)\delta_{l_-}\left(x\right) + \frac{\partial\left(\widehat{q}_0\left(x\right)\delta_{l_-}\left(x\right)\right)}{\partial\bar{n}_1}, \quad (15)$$

где $\bar{n} = \left(-\sin\alpha, \cos\alpha\right), \bar{n}_1 = \left(-\sin\alpha, -\cos\alpha\right), \delta\left(x_2\right)$ – *функция Дирака (см. [11]).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Введем контуры (рис. 1):

$$\Gamma^{\pm}_{1,\varepsilon} = \left\{ \left(x_1,x_2\right) |\, x_1 = t, x_2 = \frac{\pm\varepsilon}{\cos\alpha}, t \in \left(-\infty; 0\right] \right\},$$

$$\Gamma^{\pm}_{2,\varepsilon} = \left\{ \left(x_1,x_2\right) |\, x_1 = t\cos\alpha, x_2 = \frac{\pm\varepsilon}{\cos\alpha} \pm t\sin\alpha, t \in \left[0; |l| - \frac{\varepsilon\sin\alpha}{\cos\alpha}\right] \right\},$$

$\Gamma^{\pm}_{3,\varepsilon}$ — отрезок, соединяющий точки $D^{\pm}\left(l\cos\alpha \mp \varepsilon\sin\alpha; \pm l\sin\alpha \pm \varepsilon\cos\alpha\right)$ и $E^{\pm}\left(l\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha; \pm l\sin\alpha \mp \varepsilon\cos\alpha\right)$,

$$\Gamma^{\pm}_{4,\varepsilon} = \left\{ \left(x_1,x_2\right) |\, x_1 = \frac{2\varepsilon}{\sin\alpha} + t\cos\alpha, x_2 = \frac{\pm\varepsilon}{\cos\alpha} \pm t\sin\alpha, t \in \left[0; |l| - \frac{\varepsilon\left(1+\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha\sin\alpha}\right] \right\},$$

$$\Gamma^{\pm}_{5,\varepsilon} = \left\{ \left(x_1,x_2\right) |\, x_1 = \frac{2\varepsilon}{\sin\alpha} + t, x_2 = \frac{\pm\varepsilon}{\cos\alpha}, t \in \left[0; +\infty\right) \right\}.$$

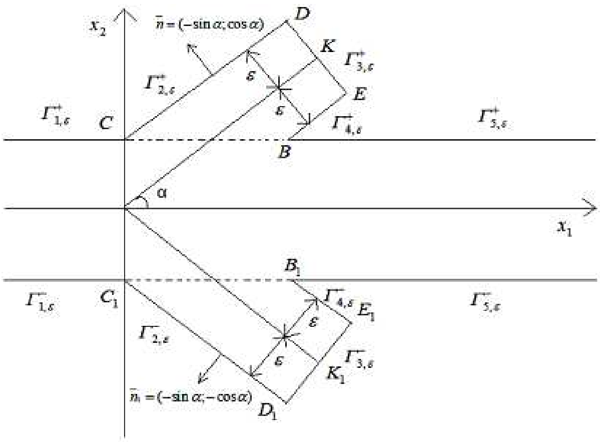

Рис. 1. *Контур интегрирования*

Пусть D^+_ε – часть $\mathbb{R}^2_+$, находящаяся выше контура $\Gamma^+_{1,\varepsilon} \cup \Gamma^+_{2,\varepsilon} \cup \Gamma^+_{3,\varepsilon} \cup \Gamma^+_{4,\varepsilon} \cup \Gamma^+_{5,\varepsilon}$; D^-_ε – часть $\mathbb{R}^2_-$, находящаяся ниже контура $\Gamma^-_{1,\varepsilon} \cup \Gamma^-_{2,\varepsilon} \cup \Gamma^-_{3,\varepsilon} \cup \Gamma^-_{4,\varepsilon} \cup \Gamma^-_{5,\varepsilon}$; ∂D^+_ε — граница области D^+_ε; ∂D^-_ε — граница области D^-_ε; $k^+ = \left(k^+_1, k^+_2\right)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D^+_ε; $k^- = \left(k^-_1, k^-_2\right)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D^-_ε.

Вычисляя обобщенные производные второго порядка от функции $\widehat{v}\left(x\right)$ по переменным ,x_1,

x_2 и учитывая соотношения (12), (13), (14), получим:

$$\left(\Delta\widehat{v} - \frac{k^2}{4}\widehat{v},\varphi\left(x\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{D_\varepsilon^+}\left(\Delta\widehat{v} - \frac{k^2}{4}\widehat{v}\right)\varphi\left(x\right)dx - \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial x_1}\varphi\left(x\right)k_1^+ dl + \right.$$
$$+\int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\widehat{v}\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial x_1}k_1^+ dl - \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial x_2}\varphi\left(x\right)k_2^+ dl + \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\widehat{v}\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial x_2}k_2^+ dl +$$
$$+\int\limits_{D_\varepsilon^-}\left(\Delta\widehat{v} - \frac{k^2}{4}\widehat{v}\right)\varphi\left(x\right)dx - \int\limits_{\partial D_\varepsilon^-}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial x_1}\varphi\left(x\right)k_1^- dl + \int\limits_{\partial D_\varepsilon^-}\widehat{v}\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial x_1}k_1^- dl -$$
$$\left. -\int\limits_{\partial D_\varepsilon^-}\frac{\partial\widehat{v}}{\partial x_2}\varphi\left(x\right)k_2^- dl + \int\limits_{\partial D_\varepsilon^-}\widehat{v}\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial x_2}k_2^- dl\right) = -\int\limits_{l_+}q_0(x)\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial\bar{n}}dl +$$
$$+\int\limits_{l_+}q_1(x)\varphi\left(x\right)dl - 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(x_1\right)\frac{\partial\varphi\left(x_1,0\right)}{\partial x_2}dx_1 - \int\limits_{l_-}\widehat{q}_0(x)\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial\bar{n}_1}dl + \int\limits_{l_-}\widehat{q}_1(x)\varphi\left(x\right)dl. \quad (16)$$

Из определения обобщенных функций $q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)$, $\frac{\partial q(x)\delta_l(x)}{\partial\bar{m}}$ и обобщенной производной следует, что

$$\int\limits_{l_+}q_1\left(x\right)\varphi\left(x\right)dl = \left(q_1\left(x\right)\delta_{l_+}\left(x\right),\varphi\left(x\right)\right), \quad \int\limits_{l_-}\widehat{q}_1\left(x\right)\varphi\left(x\right)dl = \left(\widehat{q}_1\left(x\right)\delta_{l_-}\left(x\right),\varphi\left(x\right)\right),$$

$$-\int\limits_{l_+}q_0\left(x\right)\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial\bar{n}}dl = \left(\frac{\partial q_0\left(x\right)\delta_{l_+}\left(x\right)}{\partial\bar{n}},\varphi\left(x\right)\right),$$

$$-\int\limits_{l_-}\widehat{q}_0\left(x\right)\frac{\partial\varphi\left(x\right)}{\partial\bar{n}_1}dl = \left(\frac{\partial\widehat{q}_0\left(x\right)\delta_{l_-}\left(x\right)}{\partial\bar{n}_1},\varphi\left(x\right)\right),$$

$$-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(x_1\right)\frac{\partial\varphi\left(x_1,0\right)}{\partial x_2}dx_1 = \left(2\psi\left(x_1\right)\delta'\left(x_2\right),\varphi\left(x\right)\right).$$

Из (16) и последних равенств получаем, что в $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$ функция $\widehat{v}\left(x\right)$ является решением уравнения (15).

Теорема доказана.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ

В $\mathbb{R}^2$ фундаментальным решением оператора $\Delta - \frac{k^2}{4}$ является функция $E\left(x\right) = -\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)$ (см. [12]), где $K_0\left(x\right)$ — функция Макдональда нулевого порядка.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *В $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$ существуют свертки функции $-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)$ с функциями $q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)$, $\frac{\partial(q(x)\delta_l(x))}{\partial\bar{n}}$, $2\psi\left(x_1\right)\delta'\left(x_2\right)$, где $\bar{n} = \left(n_1,n_2\right), \delta\left(x_2\right)$ — функция Дирака, и справедливы формулы:*

$$\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right) * \left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(z\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-z\right|\right)dl_z, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)}{\partial\bar{n}}\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(z\right)\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-z\right|\right)}{\partial\bar{n}_x}dl_z,$$

$$\left(2\psi\left(x_1\right)\delta'\left(x_2\right)\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right)=\frac{kx_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1,$$

где $K_1\left(z\right)$ — функция Макдональда первого порядка.

Доказательство. Докажем существование свертки $\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right)$ и справедливость представления (17).

Так как $\sup p\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)\subset l$, то в $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$ существует свертка $\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right)$ (см. [11]). Для любой основной функции $\varphi\left(x\right)\in D\left(\mathbb{R}^2\right)$

$$\left(\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right),\varphi\left(x\right)\right)=\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|y\right|\right)\right),\eta\left(x\right)\varphi\left(x+y\right)\right),$$

где $\eta\left(x\right)$ — произвольная функция из $D\left(\mathbb{R}^2\right)$, такая что $\eta\left(x\right)\equiv 1$ в окрестности трещины l. Из определения прямого произведения обобщенных функций с учетом замены переменной $x+y=z$ получаем, что

$$\left(\left(q\left(x\right)\delta_l\left(x\right)\right)*\left(-\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{k}{2}\left|x\right|\right)\right),\varphi\left(x\right)\right)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(x\right)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\eta\left(x\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|y\right|\right)\varphi\left(x+y\right)dydl_x=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(x\right)\iint\limits_{\mathrm{R}^2}K_0\left(\frac{k}{2}\left|z-x\right|\right)\varphi\left(z\right)dzdl_x=$$
$$=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(x\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|z-x\right|\right)dl_x\varphi\left(z\right)dz=\left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(x\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|z-x\right|\right)dl_x,\varphi\left(z\right)\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_l q\left(z\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-z\right|\right)dl_z,\varphi\left(x\right)\right).$$

Таким образом, формула (17) доказана. Остальные утверждения леммы доказываются аналогично.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что существует свёртка фундаментального решения оператора $\Delta-\frac{k^2}{4}$ с правой частью уравнения (15). Тогда решением уравнения (15) будет свёртка фундаментального решения оператора $\Delta-\frac{k^2}{4}$ с правой частью уравнения (15) (см. [11]). Воспользовавшись соотношениями из леммы 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *В $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$ уравнение (15) имеет решение:*

$$\widehat{v}\left(x\right)=\frac{kx_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_1\left(y\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)dl_y-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_0\left(y\right)\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)}{\partial\bar{n}_x}dl_y-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_-}\widehat{q}_1\left(y\right)K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)dl_y-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_-}\widehat{q}_0\left(y\right)\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)}{\partial\bar{n}_{1x}}dl_y,$$

где $\bar{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)\,, \bar{n}_1 = (-\sin\alpha, -\cos\alpha)\,, y = (y_1, y_2)\,.$

С учетом вида l_+, l_- и (11) функцию $\widehat{v}\,(x)$ из теоремы 2 можно представить в виде:

$$\widehat{v}\,(x) = \frac{kx_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}}\psi\,(y_1)\,dy_1 - \\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} q_1\,(y)\left(K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-y|\right) - K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-\widehat{y}|\right)\right)dl_y - \\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} q_0\,(y)\left(\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-y|\right)}{\partial \bar{n}_x} - \frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-\widehat{y}|\right)}{\partial \bar{n}_{1x}}\right)dl_y, \quad (18)$$

где $\widehat{y} = (y_1, -y_2)$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Покажем, что решением задачи (6)–(9) будет функция

$$v\,(x) = \widehat{v}\,(x)\,, \quad (19)$$

где функция $\widehat{v}\,(x)$ задана равенством (18).

Сформулируем вспомогательную лемму, доказанную в [9] (лемма 13).

Лемма 2. *Пусть функция* $f\,(x)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$ *за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, тогда для любого* $\delta > 0$ *выполнено*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}\right)}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+\varepsilon^2}}f\,(y_1)\,dy_1 = \frac{f\,(x_1-0)+f\,(x_1+0)}{2},$$

где $k > 0$ — *постоянная,* $K_1\,(z)$ — *функция Макдональда.*

Замечание 5. В лемме 2 через $f\,(x_1 \pm 0)$ обозначаются односторонние пределы функции $f\,(x)$ в точке $x = x_1$.

Справедлива лемма.

Лемма 3. Функция $v\,(x)$*, заданная равенством (19), является решением задачи (6)–*(9).

Доказательство. Непосредственно из вида функции $v\,(x)$ следует, что $v\,(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{l}_+\right)$, из способа ее построения получаем, что она удовлетворяет уравнению (6) в $\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{l}_+$.

Перейдем к доказательству выполнения условий (7)–(9). Введем обозначения:

$$I_1\,(x) = \frac{kx_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}}\psi\,(y_1)\,dy_1,$$

$$I_2\,(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} q_1(y)\left(K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-y|\right) - K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-\widehat{y}|\right)\right)dl_y,$$

$$I_3\,(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} q_0(y)\left(\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-y|\right)}{\partial \bar{n}_x} - \frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\,|x-\widehat{y}|\right)}{\partial \bar{n}_{1x}}\right)dl_y.$$

Тогда представление (19) примет вид

$$v\left(x\right)=I_1\left(x\right)+I_2\left(x\right)+I_3\left(x\right).$$

Очевидно, что при $x_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$v\left(x_1,0\right)=\lim_{x_2\to0}I_1\left(x\right)+\lim_{x_2\to0}I_2\left(x\right)+\lim_{x_2\to0}I_3\left(x\right). \tag{20}$$

Рассмотрим каждый из пределов в (20). Первый предел в равенстве (20) можно записать в виде:

$$\lim_{x_2\to0}I_1(x)=\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to0}\left(x_2\int\limits_{-\infty}^{x_1-\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right)+$$
$$+\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to0}\left(x_2\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right)+$$
$$+\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to0}\left(x_2\int\limits_{x_1+\delta}^{+\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right), \tag{21}$$

где δ — произвольное фиксированное положительное число.

Из ограниченности функции $\widetilde{\psi}\left(x_1\right)$ и свойства функции Макдональда $K_1\left(z\right)$ $\left(K_1\left(z\right)<\frac{Ce^{-z}}{\sqrt{z}}\right.$ при $z>1$ (см. [13])) следует справедливость оценок

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x_1-\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right|\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{x_1-\delta}\frac{\left|K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)\right|}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\left|\psi\left(y_1\right)\right|dy_1\leqslant$$
$$\leqslant c_1\int\limits_{-\infty}^{x_1-\delta}\frac{e^{-\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\cdot e^{\frac{k}{2}y_1\cos\beta}}{\sqrt[4]{\left(\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2\right)^3}}dy_1\leqslant c_2,$$

где c, c_1, c_2 — некоторые положительные числа.

Аналогично доказывается ограниченность $\int\limits_{x_1+\delta}^{+\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1$. Следовательно, справедливы равенства

$$\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to0}\left(x_2\int\limits_{-\infty}^{x_1-\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right)=$$
$$=\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to0}\left(x_2\int\limits_{x_1+\delta}^{+\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right)=0. \tag{22}$$

С учетом леммы 2 получим, что

$$\frac{k}{2\pi}\lim_{x_2\to 0}\left(x_2\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{\left(y_1-x_1\right)^2+x_2^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1\right)=\frac{\psi\left(x_1-0\right)+\psi\left(x_1+0\right)}{2}=\psi\left(x_1\right). \tag{23}$$

Из равенств (21)–(23), получаем, что при $x_1\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$

$$\lim_{x_2\to 0}I_1\left(x\right)=\psi\left(x_1\right). \tag{24}$$

С учетом непрерывности функций $K_0\left(z\right)$, $K_0'\left(z\right)$ при $z>0$ (см. [14]) получаем:

$$\lim_{x_2\to 0}I_2\left(x\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_1\left(y\right)\lim_{x_2\to 0}\left(K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)-K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-\widehat{y}\right|\right)\right)dl_y=0, \tag{25}$$

$$\lim_{x_2\to 0}I_3\left(x\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_0\left(y\right)\lim_{x_2\to 0}\left(\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)}{\partial\bar{n}_x}-\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-\widehat{y}\right|\right)}{\partial\bar{n}_{1x}}\right)dl_y=0. \tag{26}$$

Таким образом, из (20), (24)–(26) следует, что функция $v\left(x\right)$, заданная равенством (19), удовлетворяет условию (7).

Докажем справедливость (8). Пусть $x\in l_+$, тогда $x=\left(t_1\cos\alpha,\,t_1\sin\alpha\right)$, где $t_1\in\left(0;\,\left|l\right|\right)$. Тогда

$$I_1\left(x\pm\varepsilon\cdot\bar{n}\right)=\frac{k\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha\right)}{2\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(t_1\cos\alpha\mp\varepsilon\sin\alpha-y_1\right)^2+\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(t_1\cos\alpha\mp\varepsilon\sin\alpha-y_1\right)^2+\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha\right)^2}}\psi\left(y_1\right)dy_1,$$

следовательно, при $x\in l_+$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(I_1\left(x+\varepsilon\cdot\bar{n}\right)-I_1\left(x-\varepsilon\cdot\bar{n}\right)\right)=0. \tag{27}$$

Несложно показать, что при $x\in l_+$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(I_2\left(x+\varepsilon\cdot\bar{n}\right)-I_2\left(x-\varepsilon\cdot\bar{n}\right)\right)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{l_+}q_1\left(y\right)\left(K_0\left(\frac{k}{2}\left|x+\varepsilon\cdot\bar{n}-y\right|\right)-K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-\varepsilon\cdot\bar{n}-y\right|\right)\right)dl_y\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{l_+}q_1\left(y\right)\left(K_0\left(\frac{k}{2}\left|x+\varepsilon\cdot\bar{n}-\widehat{y}\right|\right)-K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-\varepsilon\cdot\bar{n}-\widehat{y}\right|\right)\right)dl_y\right)=0. \tag{28}$$

Из введенных выше обозначений следует, что

$$I_3\left(x\right)=I_{3,1}\left(x\right)+I_{3,2}\left(x\right),$$

где $I_{3,1}\left(x\right)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_0\left(y\right)\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-y\right|\right)}{\partial\bar{n}_x}dl_y$, $I_{3,2}\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+}q_0\left(y\right)\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}\left|x-\widehat{y}\right|\right)}{\partial\bar{n}_{1x}}dl_y$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_3\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_3\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_{3,1}\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_{3,1}\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right)+\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_{3,2}\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_{3,2}\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right). \quad (29)$$

Как известно (см. [14]), при $z>0$ для функций Макдональда справедливы соотношения $K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K'_\nu(z)$, $K_\nu(z)=K_{-\nu}(z)$, где ν – любое действительное число. Следовательно, при $z>0$ $\quad K'_0(z)=-K_1(z)$. С учётом последнего равенства получаем, что при $x\in l_+$

$$I_{3,1}\left(x\pm\varepsilon\cdot\bar n\right)=\pm\frac{k}{4\pi}\int\limits_0^{|l|}q_0\left(t\cos\alpha,t\sin\alpha\right)\times$$
$$\times\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(t_1\cos\alpha\mp\varepsilon\sin\alpha-t\cos\alpha\right)^2+\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha-t\sin\alpha\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(t_1\cos\alpha\mp\varepsilon\sin\alpha-t\cos\alpha\right)^2+\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha-t\sin\alpha\right)^2}}\times$$
$$\times\left(\left(-\sin\alpha\right)\left(t_1\cos\alpha\mp\varepsilon\sin\alpha-t\cos\alpha\right)+\left(\cos\alpha\right)\left(t_1\sin\alpha\pm\varepsilon\cos\alpha-t\sin\alpha\right)\right)dt=$$
$$=\pm\frac{k\varepsilon}{4\pi}\int\limits_0^{|l|}q_0\left(t\cos\alpha,t\sin\alpha\right)\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(t_1-t\right)^2+\varepsilon^2}\right)}{\sqrt{\left(t_1-t\right)^2+\varepsilon^2}}dt.$$

Воспользовавшись леммой 2, получаем, что при $x\in l_+$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_{3,1}\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_{3,1}\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right)=\frac{k\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^{|l|}q_0\left(t\cos\alpha,t\sin\alpha\right)\frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{\left(t_1-t\right)^2+\varepsilon^2}\right)}{\sqrt{\left(t_1-t\right)^2+\varepsilon^2}}dt=$$
$$=q_0\left(t_1\cos\alpha,t_1\sin\alpha\right)=q_0\left(x\right). \quad (30)$$

Из гладкости функций Макдональда (см. [14]) следует, что при $x\in l_+$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_{3,2}\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_{3,2}\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right)=0. \quad (31)$$

С учётом (30) и (31) из (29) находим, что при $x\in l_+$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(I_3\left(x+\varepsilon\cdot\bar n\right)-I_3\left(x-\varepsilon\cdot\bar n\right)\right)=q_0\left(x\right). \quad (32)$$

Воспользовавшись представлением функции $v(x)$, а также равенствами (27), (28) и (32) получаем, что функция $v(x)$, заданная равенством (19), удовлетворяет условию (8). Доказательство выполнения условия (9) проводится аналогично.

Лемма доказана.

Вернемся к задаче (1)–(4). С учетом представления (5), леммы 3 а также вида функций $\psi(x_1)$, $q_j(x)$, где $j=0;1$, получаем теорему 3 о представлении решения задачи (1)–(4).

Теорема 3. *Функция*

$$u(x) = e^{-\frac{k}{2}(x_1\cos\beta + x_2\sin\beta)} \left(\frac{kx_2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+x_2^2}} e^{\frac{k}{2}y_1\cos\beta}\widetilde{\psi}(y_1)\,dy_1 - \right.$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} e^{\frac{k}{2}(y_1\cos\beta+y_2\sin\beta)}\widetilde{q}_1(y)\left(K_0\left(\frac{k}{2}|x-y|\right) - K_0\left(\frac{k}{2}|x-\widehat{y}|\right)\right)dl_y -$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_+} e^{\frac{k}{2}(y_1\cos\beta+y_2\sin\beta)}\widetilde{q}_0(y)\left(\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}|x-y|\right)}{\partial \bar{n}_x} - \frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}|x-\widehat{y}|\right)}{\partial \bar{n}_{1x}}\right)dl_y \right)$$

является решением задачи (1)–(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuo, A. Y. Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity. — Open crack / A. Y. Kuo // Trans. ASME J. Appl. Mech. — 1990. — Vol. 57. — P. 359–364.

2. Wang, X. D. The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading / X. D. Wang, S. A. Meguid // International Journal of Fracture. — 1996. — Vol. 76. — P. 263–278.

3. Petrova, V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // International Journal of Fracture. — 2004. — Vol. 128. — P. 49–63.

4. Ордян, М. Г. Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестн. Самар. гос. ун-та (Естественнонауч. сер.). — 2009. — № 4 (70). — С. 154–170.

5. Petrova, V. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2011. — Vol. 55. — P. 148–157.

6. Рябенко, А. С. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 187–194.

7. Логинова, Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

8. Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 695–703.

9. Глушко, А. В. О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 111–134.

10. Рябенко, А. С. Определение температуры в полуплоскости с наклонной прямолинейной трещиной, подходящей к границе полуплоскости / А. С. Рябенко, С. Н. Кузнецов // Научный журнал строительства и архитектуры. — 2019. — № 2 (54). — С. 50–58.

11. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.

12. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимирова. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 288 с.

13. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1977. — 456 с.

14. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. — М. : Изд-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

REFERENCES

1. Kuo A.Y. Interface crack between two dissimilar half spaces subjected to a uniform heat flow at infinity — open crack. J. appl. Mech., 1990, vol. 57, pp. 359–364.

2. Wang X.D., Meguid S.A. The interaction between an interfacial crack and a microcrack under antiplane loading. International Journal of Fracture, 1996, vol. 76, pp. 263–278.

3. Petrova V., Herrmann K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects. International Journal of Fracture, 2004, vol. 128, pp. 49–63.

4. Ordyan M.G., Petrova V.E. The task of thermal conductivity for a biomaterial with a system of partially heat permeable cracks and a heat source. [Ordyan M.G., Petrova V.E. Zadacha teploprovodnosti dlya bimateriala s sistemoj chastichno teplopronicaemyh treshchin i teplovym istochnikom]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta (Estestvennonauchnaya seriya) — Proceedings of Samara State University (Natural science series)*, 2009, no. 4 (70), pp. 154–170.

5. Petrova V., Schmauder S. Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks. Teoretical and Applied Fracture Mechanics, 2011, vol. 55, pp. 148–157.

6. Ryabenko A.S. Asymptotic properties of problem solution on the stationary distribution of heat in an homogeneous plane with a crack. [Ryabenko A.S. Asimptoticheskie svojstva resheniya zadachi o stacionarnom raspredelenii tepla v odnorodnoj ploskosti s treshchinoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 187–194.

7. Loginova E.A. Construction of a solution to the problem of heat distribution in a heterogeneous material with a crack. [Loginova E.A. Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoj]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika, astronomiya — Vestnik of of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, no. 1, pp. 40–47.

8. Glushko A.V., Ryabenko A.S., Loginova E.A., Petrova V.E. Study of steady state heat distribution in a plane with a crack in the case of variable internal thermal conductivity. [Glushko A.V., Ryabenko A.S., Loginova E.A., Petrova V.E. Izuchenie stacionarnogo raspredeleniya tepla v ploskosti s treshchinoj pri peremennom koefficiente vnutrennej teploprovodnosti]. *Computational Mathematics and Mathematical Phusics — Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2015, vol. 55, no. 4, pp. 695–703.

9. Glushko A.V., Ryabenko A.S., Chernikova A.S. About the stationary heat distribution in the two adjacent half-planes with a crack on the boundary. [Glushko A.V. Ryabenko A.S., Chernikova A.S. O stacionarnom raspredelenii tepla v dvuh svyaznyh poluploskostyah s treshchinoj na granice]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 111–134.

10. Ryabenko A.S., Kuznecov S.N. Identifying the temperature in the semi-plane with an inclined straight crack going through the semi-plane boundary. [Ryabenko A.S., Kuznecov S.N. Opredelenie temperatury v poluploskosti s naklonnoj pryamolinejnoj treshchinoj, podhodyashchej k granice poluploskosti]. *Nauchnyj zhurnal stroitel'stva i arhitektury — Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 2019, no. 2 (54), pp. 50–58.

11. Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. [Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1976, 527 p.

12. Vladimirov V.S. A collection of problems on equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoj fiziki]. Moscow: FIZMATHLIT, 2004, 288 p.

13. Nikol'skij S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. [Nikol'skij S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1977, 456 p.

14. Vatson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. [Vatson G.N. Teoriya besselevyh funkcij]. Moscow: Foreign Languages Publishing House, 1949, 799 p.

Логинова Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: loginova@vsu.ru

Loginova Ekaterina Aleksandrovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Partial Differential Equations and the Theory of Probability, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: loginova@vsu.ru

Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: alexr-83@yandex.ru

Ryabenko Aleksandr Sergeevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Partial Differential Equations and the Theory of Probability, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: alexr-83@yandex.ru

Черникова Анастасия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: chernikova-an@mail.ru

Chernikova Anastasiya Sergeevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis, Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: chernikova-an@mail.ru