УДК 511

О МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА, СОДЕРЖАЩЕГО РЕШЕТО БРУНА В СОЧЕТАНИИ С ВЕСАМИ БУХШТАБА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.08.2023 г.

Аннотация. В настоящей работе рассмотрен метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с последними весами Бухштаба и приведено полное решение задачи по применению этого метода весового решета для получения оценки снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента. Проблема выбора оптимальных весов в методе весового решета является очень трудной. Последние веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества при выборе параметров в методе весового решета в сравнении с более ранними весами Бухштаба (1967 г.) и их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г.), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г.).

Для весовой функции в методе весового решета, содержащего решето Бруна в сочетании с последними весами Бухштаба, получена оценка сверху (теорема 1).

Доказана теорема 3, в которой получена оценка снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента. Ранее Х.–Э. Рихерт получил оценку снизу с помощью метода решета Сельберга с весами Рихерта для случая, когда выполнено условие на параметры: $\alpha a \leqslant 4$, это существенно ограничивает возможности в выборе параметров a и c в методе весового решета. Отметим, что применение метода весового решета, содержащего решето Бруна в сочетании с последними весами Бухштаба, является технически сложным, так как сам метод решета Бруна в чистом виде, то есть без весов, имеет комбинаторную природу и является технически сложным.

Ключевые слова: последовательность, число, решето, полином, оценка.

ON THE WEIGHT SIEVE METHOD CONTAINING THE BRUN SIEVE IN COMBINATION WITH THE BUCHSTAB WEIGHT

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. In the present work, we consider the method of a weighing sieve containing a sieve Brun in combination with the last weights of Bukhshtab and a complete solution of the problem is given by applying this weighting method to obtain an estimate from the bottom of the number p almost prime numbers in finite sequence of values of the non-reducible polynomial from the natural argument a. The problem of choosing the optimal weights in the weight sieve method is very difficult. The last weights of Bukhstab (1985) makes it possible to obtain advantages in choosing of parameters in the weighting method in comparison with the more early Bukhstab weights (1967) and their continuous form obtained by Laborde (1979), private case which is the weights of Richert (1969).

For the weight function in the weight method containing a Brun sieve in combinations with the last weights of Bukhshtab, an estimate from above is obtained (Theorem 1).

We proved Theorem 3, in which we obtain a lower bound for the number of almost prime numbers l in the final sequence of the values of the non-reducible polynomial from the natural argument. Earlier Richert obtained a lower bound was obtained using the Selberg sieve method with Richert weights for the case when the condition on the parameters is satisfied: $\alpha a \leqslant 4$, this significantly limits the possibilities in the choice parameters a and c in the weighting method. We note that the application of the method of a weights containing a weights of Brun and in combination with the last weights of Bukhshtab, which is technically complex, so just the Brun sieve method in its purest form, without weights, it have a combinatorial nature and is technically complex.

Keywords: sequence, number, sieve, polynomial, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Метод решета в теории чисел разрабатывался с целью решить бинарную проблему Гольдбаха о представлении четных натуральных чисел, больших 2, суммой двух простых чисел. Бинарная проблема Гольдбаха до сих пор считается нерешенной. Различные методы решета успешно применимы для решения ослабленных задач, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей. Такие числа называются почти простыми числами. Современный метод решета внес весомый вклад в теорию чисел. Древнейшим из известных методов решета является метод решета Эратосфена (3 век до н.э.) В дальнейшем метод решета усовершенствовали В. Брун (1918 г.), А. А. Бухштаб (1938 г.) [1], [2], В. А. Тартаковский (1939 г.) [3], Ю. В. Линник (1941 г.) [4], А. Сельберг (1949 г.) [5], Б. В. Левин (1963 г.) [6]. Это были методы решета в чистом виде, то есть без применения весов (коэффициентов).

А. А. Бухштаб разработал комбинаторное весовое решето (1967 г.) [7], [8]. Свой метод весового решета построил Х. – Э. Рихерт (1967 г.) [9], а М. Лабордэ упростил веса Бухштаба (1979 г.) [10]. М. Лабордэ получил непрерывную форму весов и показал, что веса Рихерта являются частным случаем этих весов и заведомо хуже. А. Л. Чекин исследовал метод двумерного весового решета (1987 г.) [11], а Е. В. Вахитова – метод одномерного весового решета [12].

Позже А. А. Бухштаб разработал еще один метод весового решета и анонсировал новый тип для частного случая (1985 г.) [13]. Общий вид весов он сообщил в устной форме Е. В. Вахитовой (1986 г.). В дальнейшем веса Бухштаба (1985 г.) и их приложения были исследованы в работах Е. В. Вахитовой (до 2010 г.; а с 2011 г. в соавторстве с С. Р. Вахитовой) [14] – [30]. Отметим, что по методам решета изданы монографии [28]–[34].

Цель данной работы – рассмотреть метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.) и представить полное решение задачи по применению этого метода весового решета для получения оценки снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем условие для некоторой мультипликативной функции $\omega(n)$, где $n \in \mathbf{N}$ и $\omega(n) = O(1)$: существуют постоянная $C_2' \geqslant 1$ и параметр $L \geqslant 1$, такие, что

$$-L \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leqslant C_2', \tag{1}$$

где L не зависит от u и v $(2 \leqslant u \leqslant v)$.

Условие (1) говорит о том, что $\omega(p)$, где p – простое число, по крайней мере в среднем по p, равно 1, иначе, будем рассматривать только те последовательности A, при просеивании которых возникает задача одномерного решета.

Лемма 1. *Пусть $\omega(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условию (1), p – простое число, $\omega(p) < p$ для всех p, $z \geqslant 2$. Тогда имеет место оценка:*

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

где B – некоторая постоянная.

Следствие 1.

$$\sum_{z<p\leqslant z^h} \frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

$$\prod_{z<p\leqslant z^h} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{C}{h}\left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, C – постоянная.

Следствие 2.

$$\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\,\|q}} \frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B + O\left(\frac{L}{\ln z}\right), \quad \sum_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|q}} \frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

$$\prod_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|q}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{C_1}{h}\left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, $q < z$, B, C_1 – постоянные.

Следствие 3. *При $2 \leqslant u \leqslant v$*

$$\sum_{u\leqslant p<v} \frac{\omega(p)}{p} \leqslant \ln\frac{\ln v}{\ln u} + \frac{C"_2}{\ln u}.$$

Доказательство леммы 1 и следствий 1–3 приведено в книге [29] (гл. 1).

Лемма 2.

$$\prod_{p\leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln z}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right),$$

где $z \geqslant 2$, γ – постоянная Эйлера, p –простое число.

Доказательство. Введем обозначение: $Y := \prod_{p\leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Применяя основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов, получим для Y :

$$Y = e^{\ln Y} = \exp\left(\ln\prod_{p\leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \exp\left(\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right).$$

Преобразуем теперь показатель, разложив $\ln(1 - 1/p)$ по формуле:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \,...,\;\; x < 1.$$

При $x = 1/p$ получим, что

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \,....$$

Поэтому будем иметь:

$$\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=\sum_{p\leqslant z}\left(-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\,...\right)=-\left(\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}+\sum_{p\leqslant z}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)=$$

$$=-\left(\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)-\sum_{p>z}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right).$$

Учитывая теперь, что

$$\sum_{p>z}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)=O\left(\sum_{p>z}\frac{1}{p^2}\right)=O\left(\sum_{n>z}\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{z}\right),$$

получим:

$$\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=-\left(\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)+O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Применим теперь оценку из леммы 1:

$$\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}=\ln\ln z+B+O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Учитывая, что

$$O\left(\frac{1}{z}\right)+O\left(\frac{1}{\ln z}\right)=O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

получим:

$$\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=-\left(\ln\ln z+B+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)+O\left(\frac{1}{\ln z}\right).$$

Следовательно,

$$Y=\exp\left(\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)=\exp\left(-\ln\ln z\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\left(B+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)\right)\cdot\exp\left(O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right).$$

Но

$$\exp\left(-\ln\ln z\right)=\exp\left(\ln(\ln z)^{-1}\right)=(\ln z)^{-1}=\frac{1}{\ln z}.$$

Далее, запись вида $f=O(g)$ означает, что существует постоянная $C>0$, такая, что $(|f|\leqslant C\,|g|)$. Кроме того, имеет место разложение:

$$e^x=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+...,$$

отсюда при $x=1/\ln z$ получим разложение:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{\ln z}+\frac{1}{2\,!\ln^2 z}+...=1+\frac{1}{\ln z}+O\left(\frac{1}{\ln z}\right)=1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

поэтому

$$\exp\left(O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right)=1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right).$$

Заметим еще, что постоянная B оценки из леммы 1 и постоянная Эйлера γ связаны между собой следующим равенством ([35], с. 35):

$$B = \gamma + \sum_p \left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right),$$

а отсюда получим, что

$$\gamma = B - \sum_p \left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right) = B + \sum_p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + ...\right).$$

Таким образом, получим окончательно для Y :

$$Y = \frac{1}{\ln z} \cdot e^{-\gamma} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right).$$

Лемма 2 доказана.

Определим последовательность A следующим образом:

$$A := \{\Phi(n) |\ n \leqslant x\}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}$, $x > 1$, $\Phi(n)$ – неприводимый полином натуральной степени g с целыми коэффициентами,

$$A_d := \ \{\Phi(n) |\ \Phi(n) \in A, \Phi(n) \equiv 0 \pmod d\}, \tag{3}$$

где d – свободно от квадратов, то есть $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ – функция Мебиуса, $n \in \mathbf{N}$),

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \quad n = 1, \\ (-1)^s, \ \textit{если} \quad n = p_1 p_2 ... p_s, \\ 0, \ \textit{если} \ n \vdots p^2, \end{cases}$$

$d,s \in \mathbf{N}, p_1,p_2,...,p_s$ – попарно различные положительные простые числа, p – положительное простое число.

Число элементов последовательности A_d обозначим через $|A_d|$. При $d = 1$ получим, что $|A_1| = |A|$. Число элементов последовательности A_d, не имеющих простых делителей, меньших z, обозначим через $S(A_d; z)$:

$$S(A_d; z) := \left| \{\Phi(n) \in A_d |\ p_n \geqslant z\} \right|, \tag{4}$$

где p_n – наименьший простой делитель $\Phi(n)$.

Приведем оценки снизу и сверху величины $S(A_d; z)$. Оценки такого типа ранее были получены А. А. Бухштабом в работе [7] (теоремы В, Г) для случая, когда последовательность представляет собой последовательность чисел вида $p + 2$ (p – простое число, $p \neq 2$). Используя метод решета Бруна, рассмотренный в работе [36], получим для рассматриваемой нами последовательности A теоремы, которые являются аналогами и будут затем применены для получения оценки снизу числа почти простых чисел в полиномиальной последовательности.

Обозначим через $\rho(d)$ число различных по модулю d решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$. Относительно функции ρ известно, что она мультипликативна, поэтому $\rho(d) = \prod_{p|d} \rho(p)$, где $\mu(d) \neq 0$. Кроме того, по теореме Лагранжа $\rho(d) \leqslant g$ или $\rho(p) = p$. Предположим, что $\Phi(n)$ не имеет фиксированных простых делителей, то есть $\rho(p) < p$ для всех p. Пусть, далее, X –

приближение к $|A|$, $\frac{\omega(d)}{d}X$ – приближение к $|A_d|$, где $\omega(d)$ – некоторая мультипликативная функция, $|R(X,d)| := \big||A_d| - \frac{\omega(d)}{d}X\big|$. Тогда

$$|A_d| = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod d}} 1 = \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant d\\ \Phi(m)\equiv 0 \pmod d}} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod d}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant d\\ \Phi(m)\equiv 0 \pmod d}} \left(\frac{x}{d}+\theta\right) = \rho(d)\left(\frac{x}{d}+\theta\right),\ |\theta|\leqslant 1.$$

Следовательно, выберем $X = x$, $\omega(d) = \rho(d)$. Поэтому $|R(X,d)| = |\theta\rho(d)| = |\theta|\rho(d) \leqslant \omega(d)$.

Теорема A.

$$S\left(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) > \frac{\rho(q)}{q}K\lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x^{\nu g}-\ln q} - x^{1-\varepsilon},$$

где

$$K := \frac{\bar{e}^{\,\gamma}}{2}\prod_{p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}} \frac{1-(\rho(p)/p)}{1-(1/p)}\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p-1}\right), \tag{5}$$

$$\lambda(\alpha') = \alpha'\{1-\ln h_0 - \frac{5}{24}h_0\ln^4 h_0 - \frac{e^2(e^2-5)h_0^2\ln^6 h_0}{8(4-e^2h_0\ln^2 h_0)}\},$$

$$0<\nu<1,\, 1<h<h_0<e,\, \alpha' = \frac{h+1}{h-1}\geqslant 3,\ q<x^{\nu g};\varepsilon>0;\nu g = 1-\varepsilon.$$

Следствие.

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_n\geqslant x^{1/\alpha'}}} 1 > K_0\lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x} - x^{1-\varepsilon},$$

где

$$K_0 := \frac{e^{-\gamma}}{2}\prod_{p<x^{1/\alpha'}}\frac{1-\dfrac{\rho(p)}{p}}{1-\dfrac{1}{p}}. \tag{6}$$

Теорема B.

$$S\left(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) < \frac{\rho(q)}{q}K\Lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x^{\nu g}-\ln q} + x^{1-\varepsilon},$$

где K определено равенством (5),

$$\Lambda(\alpha') := \alpha'\left\{1+\ln h_0 + \frac{5}{24}h_0\ln^4 h_0 + \frac{e^2(e^2-5)h_0^2\ln^6 h_0}{8(4-e^2h_0\ln^2 h_0)}\right\},$$

$$0<\nu<1,\ 1<h<h_0<e,\ \alpha' = \frac{h+1}{h-1}\geqslant 3,\ q<x^{\nu g},\ \varepsilon>0,\ \nu g\leqslant 1-\varepsilon.$$

Теорема C. *Пусть $1<\mu\leqslant\beta\leqslant\delta$, $0<\nu<1$, K_0 определено равенством (6). Тогда*

$$Y_1 := \sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}} S\left(A_p;x^{\nu g/\delta}\right) \leqslant \frac{K_0\delta}{\nu g}\,\frac{x}{\ln x}\int\limits_{\delta(1-1/\mu)}^{\delta(1-1/\beta)}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\delta-z)} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Следствие. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \beta \leqslant \delta$, K_0 *определено равенством (6). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta} \leqslant p < x^{1/\mu}} S\Big(A_p; x^{1/\delta}\Big) \leqslant K_0 \frac{\delta x}{\ln x} \int\limits_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})} \frac{\Lambda(z)}{z(\delta - z)} dz + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Теорема D. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \beta, 0 < \nu < 1, K_0$ *определено равенством (6) Тогда*

$$Y_2 := \sum_{x^{\nu g/\beta} \leqslant p < x^{\nu g/\mu}} S(A_p; p) \leqslant K_0 \frac{x}{\nu g \ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \Lambda(z) \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Следствие. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \beta$, K_0 *определено равенством (6). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta} \leqslant p < x^{1/\mu}} S(A_p; p) \leqslant K_0 \frac{x}{\ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \Lambda(z) \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Теорема E. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \delta, 0 < \nu < 1, K_0$ *определено равенством (6) Тогда*

$$Y_3 := \sum_{x^{\nu g/\beta} \leqslant p < x^{\nu g/\mu}} S\bigg(A_p; \left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{1/\delta}\bigg) \leqslant K_0 \Lambda(\delta) \frac{x}{\nu g \ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Следствие. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \beta \leqslant \delta$, K_0 *определено равенством (6). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta} \leqslant p < x^{1/\mu}} S\left(A_p; \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \leqslant K_0 \Lambda(\delta) \frac{x}{\ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Доказательство теорем A, B, C, D, E приведено в книге [29] (гл. 6).

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим разность $T_0(X)$:

$$T_0(X) := S\left(A; X^{\frac{1}{a}}\right) - T(X),$$

где $a \in \mathbf{R}$,

$$S\left(A; X^{\frac{1}{a}}\right) := \left|\{a_n \in A |\, p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}\}\right|, \quad T(X) = \left|\{a_n \in A |\, \nu(a_n) > r\}\right|,$$

$\nu(a_n)$ – число простых делителей числа a_n. Если $T_0(X) > 0$, то последовательность A содержит числа, имеющие самое большее r простых делителей ($r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$). Выберем веса Бухштаба (1985 г.), весовая функция $T(X)$ определена равенством:

$$T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} S\left(A_p; X^{\frac{1}{a}}\right) + \frac{1}{2c - b - 1} \bigg\{ (c - b) \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} S\left(A_p; X^{\frac{1}{a}}\right) +$$

$$+ \sum_{X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S\left(A_p; X^{\frac{1}{a}}\right) + a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \bigg(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-g'z}} S\left(A_p; X^{z}\right) \bigg) dz +$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)+$$

$$+\frac{1}{g'}\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}}\left(g'b-a+g'-(g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\times S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\Bigg\},\qquad(7)$$

$a,b,c,g'\in\mathbf{R}$, $1\leqslant b\leqslant c\leqslant a$, $2c-b-1>0$, $1\leqslant g'\leqslant a-1$,
Получим оценку сверху для $T(X)$. Для этого введем несколько условий, которым должны удовлетворять величины, непосредственно связанные с последовательностью A.

1. Существует постоянная M, такая, что для всех элементов a_n из последовательности A

$$|a_n|\leqslant X^M.\qquad(8)$$

2. Существует постоянная $C_1'\geqslant 1$, такая, что

$$1\leqslant\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}\leqslant C_1'\qquad(9)$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ – такое, что $(\omega(d)/d)X$ является приближением $|A_d|$, $\mu(d)\neq 0$.

3. Существуют постоянная $C_2'\geqslant 1$ и параметр L, такие, что

$$-L\leqslant\sum_{v\leqslant p<w}\frac{\omega(p)}{p}\ln p-\ln\frac{w}{v}\leqslant C_2'\qquad(10)$$

где $L\geqslant 1$ и не зависит от v и w $(2\leqslant v\leqslant w)$.

4. Существуют постоянные α $(0<\alpha\leqslant 1)$, $C_3'\geqslant 1$, $C_0\geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)3^{\nu(d)}|R(X,d)|\leqslant C_3'\frac{X}{\ln^C X},\qquad(11)$$

где $X\geqslant 2$, $C_3'=C_3'(C)$, $\nu(d)$ – число различных простых делителей числа d,

$$R(X,d):=|A_d|-\frac{\omega(d)}{d}X.$$

5. Существуют постоянная $C_4'\geqslant 1$, такая, что

$$\sum_{z\leqslant p<y}\ \sum_{\substack{a_n\in A\\ a_n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^2)}}1\leqslant C_4'\left(\frac{X\ln X}{z}+y\right),\qquad(12)$$

если $2\leqslant z\leqslant y\leqslant X$.

Теорема 1. *Пусть $T(X)$ определено равенством (7). Тогда*

$$T(X)\leqslant aK_0H(\alpha,a,b,c,g')\frac{X}{\ln X}$$

при $X\geqslant X_0$, где K_0 определено равенством (6), $H(\alpha,a,b,c,g')$ – равенством:

$$H(\alpha,a,b,c,g'):=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+$$

$$+\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\frac{dv}{v}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}\frac{\Lambda(z)dz}{z(v-z)}+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}\Lambda(z)\frac{c-\alpha a+z}{z(\alpha a-z)}dz+$$

$$+\frac{1}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}\Lambda(g')\frac{(b+1)z-((g'-1)\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+$$

$$+\frac{1}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}\Lambda(g')\frac{(b+1-\frac{\alpha a}{g'})z+b+1-\alpha a}{z(1+z)}dz\Big\}. \qquad (13)$$

Доказательство. Преобразуем отдельно слагаемые суммы $T(X)$, определенной равенством (7), применяя следствия из теорем C, D, E.

$$1)\ \ S_1(X):=\frac{1}{2}\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\leqslant\frac{1}{2}K_0a\frac{X}{\ln X}\int\limits_{a\left(1-\frac{a-1}{g'a}\right)}^{a\left(1-\frac{1}{a}\right)}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}K_0\frac{aX}{\ln X}\int\limits_{\frac{(g'-1)a+1}{g'}}^{a-1}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\leqslant K_0\frac{a}{2}\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right),$$

$$(0<\alpha\leqslant 1)\Longrightarrow \alpha a-1\leqslant a-1,\ \ (g'-1)\alpha a+1\leqslant 2a+1.$$

Таким образом,

$$S_1(X)\leqslant K_0\frac{a}{2}\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right). \qquad (14)$$

$$2)\ S_2(X):=(c-b)\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}}S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant a(c-b)K_0\frac{X}{\ln X}\int\limits_{a\left(1-1+\frac{g'}{a}\right)}^{a\left(1-\frac{a-1}{g'a}\right)}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)=$$

$$=K_0(c-b)a\frac{X}{\ln X}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\leqslant$$

$$\leqslant a(c-b)K_0\frac{X}{\ln X}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right).$$

Следовательно,

$$S_2(X) \leqslant a(c-b)K_0\frac{X}{\ln X}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right). \quad (15)$$

$$3)\ S_3(X) := a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}\Bigg(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p<X^{1-g'z}}S\left(A_p;X^z\right)\Bigg)dz \leqslant$$

$$\leqslant a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}\left\{K_0\frac{1}{z}\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{1}{z}(1-1+g'z)}^{\frac{1}{z}\left(1-\frac{a-1}{g'a}\right)}\frac{\Lambda(s)ds}{s(\frac{1}{z}-s)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\right\}dz=$$

$$\leqslant a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}\left\{K_0\frac{1}{z}\frac{X}{\ln X}\int\limits_{g'}^{\frac{1}{z}\frac{(g'-1)a+1}{g'a}}\frac{\Lambda(s)ds}{s(\frac{1}{z}-s)}\right\}dz+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)dz=$$

$$=aK_0\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}\frac{dz}{z}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'az}}\frac{\Lambda(sds)}{s(\frac{1}{z}-s)}+O\Bigg(\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{g'^2a}}\frac{Xdz}{\ln^{3/2}X}\Bigg).$$

Поэтому после замены $1/z=v$, $s=z$ получим

$$S_3(X)\leqslant aK_0\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\frac{dv}{v}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}\frac{\Lambda(z)dz}{z(v-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right). \quad (16)$$

$$4)\ S_4(X) := \sum_{X^{1-\frac{g'}{a}}\leqslant p<X^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{a-g'\leqslant\frac{s}{k}<c}\left(c-\frac{s}{k}\right)\sum_{X^{\frac{s}{ak}}\leqslant p<X^{\frac{s+1}{ak}}}S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{a-g'\leqslant\frac{s}{k}<c}\left(c-\frac{s}{k}\right)\left\{K_0a\frac{X}{\ln X}\int\limits_{a\left(1-\frac{s+1}{ak}\right)}^{a\left(1-\frac{s}{ak}\right)}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{a-g'\leqslant\frac{s}{k}<c}\left(c-\frac{s}{k}\right)K_0\frac{aX}{\ln X}\int\limits_{a-\frac{s+1}{k}}^{a-\frac{s}{k}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)}+\sum_{a-g'\leqslant\frac{s}{k}<c}\left(c-\frac{s}{k}\right)O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)=$$

$$= K_0 a \frac{X}{\ln X} \sum_{a-g' \leqslant \frac{s}{k} < c} \left(c - \frac{s}{k}\right) \int\limits_{a-\frac{s+1}{k}}^{a-\frac{s}{k}} \frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X} \sum_{a-g' \leqslant \frac{s}{k} < c} \left(c - \frac{s}{k}\right)\right) =$$

$$= K_0 a \frac{X}{\ln X} \sum_{a-g' \leqslant \frac{s}{k} < c} \left(c - \frac{s}{k}\right) \int\limits_{a-\frac{s}{k}-\frac{1}{k}}^{a-\frac{s}{k}} \frac{\Lambda(z)dz}{z(a-z)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_0 \frac{aX}{\ln X} \sum_{a-g' \leqslant \frac{s}{k} < c} \left(c - \frac{s}{k}\right) \cdot \Lambda\left(a - \frac{s}{k}\right) \frac{1 \cdot \frac{1}{k}}{\left(a - \frac{s}{k} - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{s}{k} + \frac{1}{k}\right)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_0 \frac{aX}{\ln X} \left\{ \int\limits_{a-g'}^{c} (c-v)\Lambda(a-v) \frac{dv}{v(a-v)} + \frac{\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) =$$

$$= K_0 \frac{aX}{\ln X} \left\{ \int\limits_{g'}^{a-c} (c-a+z)\Lambda(z) \frac{-dz}{(a-z)z} + \frac{\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right),$$

где $\varepsilon_1 = (\varepsilon/2a)(2c-b-1)$.

Таким образом,

$$S_4(X) \leqslant K_0 \frac{aX}{\ln X} \left\{ \int\limits_{\alpha a-c}^{g'} \Lambda(z) \frac{c-\alpha a+z}{z(\alpha a-z)} dz + \frac{\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right). \tag{17}$$

$$5)\ S_5(X) := \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} \left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant \frac{s}{k} \leqslant \frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})a} \left(\frac{b+1}{2} - \frac{1}{k}\right) \sum_{X^{\frac{1}{ka}} \leqslant p < X^{\frac{s+1}{ka}}} S\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant \frac{s}{k} \leqslant \frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})a} \left(\frac{b+1}{2} - \frac{s}{k}\right) \times \left\{ K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \int\limits_{\frac{ka}{s+1}-1}^{\frac{ka}{s}-1} \frac{dz}{z} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \right\} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant \frac{s}{k} \leqslant \frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})a} \left(\frac{b+1}{2} - \frac{s}{k}\right) \times \left\{ K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \int\limits_{\frac{a}{\frac{s}{k}+\frac{1}{k}}-1}^{\frac{a}{\frac{s}{k}}-1} \frac{dz}{z} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \sum_{1 \leqslant \frac{s}{k} \leqslant \frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})a} \left(\frac{b+1}{2} - \frac{s}{k}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{a}{\frac{s}{k}+\frac{1}{k}} - 1} \cdot \frac{\frac{a}{k}}{\frac{s}{k}\left(\frac{s}{k} + \frac{1}{k}\right)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \leqslant K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \times$$

$$\times\left\{\int\limits_{1}^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})a} a\left(\frac{b+1}{2}-v\right)\frac{1}{\frac{a}{v}-1}\frac{dv}{v^2}+\frac{a\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right).$$

Пусть

$$\frac{a}{v}-1=z,\ dz=-\frac{a}{v^2}dv,\ dv=-\frac{v^2}{a}dz,\ v=\frac{a}{z+1},$$

$$\frac{b+1}{2}-v=\frac{b+1}{2}-\frac{a}{z+1}=\frac{(b+1)\,z+b+1-2a}{2\,(z+1)}=$$

$$=\frac{((b+1)/2)\,z-(a-(b+1)/2)}{z+1},$$

$$S_5(X)\leqslant K_0\frac{\Lambda(g')X}{\ln X}\left\{\int\limits_{a-1}^{3\frac{a}{a-1}-1} a\frac{z\frac{b+1}{2}-\left(a-\frac{b+1}{2}\right)}{z+1}\,\frac{1}{z}\,\frac{-v^2dz}{av^2}+\frac{a\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)=$$

$$=K_0\frac{X}{\ln X}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)a+1}{a-1}}^{a-1}\frac{(b+1)z-(2a-b-1)}{z(1+z)}dz+\frac{a\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right).$$

Следовательно,

$$S_5(X)\leqslant K_0\frac{X}{\ln X}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+\frac{a\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right).\qquad(18)$$

$$6)\ S_6(X):=\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}}\frac{1}{g'}\left(g'b-a+g'-(g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\times$$

$$\times S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\leqslant\frac{1}{g'}\sum_{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})a\leqslant\frac{s}{k}\leqslant(1-\frac{g'}{a})a}\left(g'b-a+g'-(g'-1)\frac{s}{k}\right)\times$$

$$\times\sum_{X^{\frac{s}{ka}}\leqslant p<X^{\frac{s+1}{ka}}}S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\leqslant\frac{1}{g'}\sum_{\frac{1}{g'}(a-1)\leqslant\frac{s}{k}\leqslant(a-g')}\left(g'b-a+g'-(g'-1)\frac{s}{k}\right)\times$$

$$\times\left\{K_0\Lambda(g')\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{ka}{s+1}-1}^{\frac{ka}{s}-1}\frac{dz}{z}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{g'}\sum_{\frac{1}{g'}(a-1)\leqslant\frac{s}{k}\leqslant(a-g')}\left(g'b-a+g'-(g'-1)\frac{s}{k}\right)\times$$

$$\times\left\{K_0\Lambda(g')\frac{X}{\ln X}\int\limits_{\frac{a}{\frac{s}{k}+\frac{1}{k}}-1}^{\frac{a}{\frac{s}{k}}-1}\frac{dz}{z}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{g'} K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \sum_{\frac{a-1}{g'} \leqslant \frac{s}{k} \leqslant a-g'} \left(g'b - a + g' - (g'-1)\frac{s}{k} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{a}{\frac{s}{k}+\frac{1}{k}} - 1} \frac{\frac{a}{k}}{\frac{s}{k}\left(\frac{s}{k}+\frac{1}{k}\right)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{g'} K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \left\{ \int\limits_{\frac{a-1}{g'}}^{a-g'} a(g'b - a + g' - (g'-1)v) \frac{1}{\frac{a}{v}-1} \frac{dv}{v^2} + \frac{a\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) =$$

$$= K_0 \Lambda(g') \frac{X}{g' \ln X} \left\{ \int\limits_{\frac{g'a}{a-1}-1}^{\frac{a}{a-g'}-1} a\left(g'b - a + g' - \frac{2a}{z+1} \right) \frac{1}{z} \frac{-v^2 dz}{a v^2} + \frac{a\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) =$$

$$= K_0 \Lambda(g') \frac{X}{g' \ln X} \left\{ g' \int\limits_{\frac{g'}{a-g'}}^{\frac{(g'-1)a+1}{a-1}} \frac{\left(b + 1 - \frac{a}{g'}\right) z + b + 1 - a}{z(1+z)} dz + \frac{a\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right).$$

Таким образом,

$$S_6(X) \leqslant K_0 \Lambda(g') \frac{X}{\ln X} \left\{ \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} \frac{\left((b+1) - \frac{\alpha a}{g'}\right) z + b + 1 - \alpha a}{z(1+z)} dz + \frac{a\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right). \quad (19)$$

Следовательно, получим из (14) – (19) для $T(X)$:

$$T(X) \leqslant \frac{1}{2} K_0 \frac{aX}{\ln X} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{\Lambda(z) dz}{z(\alpha a - z)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2c-b-1} \left\{ a(c-b) K_0 \frac{X}{\ln X} \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{\Lambda(z) dz}{z(\alpha a - z)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) + \right.$$

$$+ a\, K_0 \frac{X}{\ln X} \int\limits_{\frac{{g'}^2 \alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \frac{dv}{v} \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a} v} \frac{\Lambda(z) dz}{z(v-z)} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) +$$

$$+ a\, K_0 \frac{X}{\ln X} \left\{ \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} \Lambda(z) \frac{c - \alpha a + z}{z(\alpha a - z)} dz + \frac{\varepsilon_1}{5} \right\} + O\left(\frac{X}{\ln^{3/2} X}\right) +$$

$$+a\,K_0\frac{X}{\ln X}\left\{\frac{1}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}\Lambda(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+\frac{\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)+$$

$$+a\,K_0\frac{X}{\ln X}\left\{\frac{1}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}\Lambda(g')\frac{\left((b+1)-\frac{\alpha a}{g'}\right)z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a\varepsilon_1}{5}\right\}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\right\}=K_0\frac{aX}{\ln X}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+\frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{2\alpha a+1}{g'}}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\alpha a-z)}+\right.\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\frac{dv}{v}\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}\frac{\Lambda(z)dz}{z(v-z)}+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}\Lambda(z)\frac{c-\alpha a+z}{z(\alpha a-z)}dz+$$

$$+\frac{1}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}\Lambda(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}\Lambda(g')\frac{\left((b+1)-\frac{\alpha a}{g'}\right)z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz\right\}\right\}+$$

$$+K_0\,a\frac{X}{\ln X}\,\frac{1}{2c-b-1}\,\frac{3\varepsilon_1}{5}+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right).$$

Учитывая теперь равенство (13), получим:

$$K_0\,a\frac{X}{\ln X}\left(H(\alpha,a,b,c,g')+\frac{3\varepsilon}{10a}-\varepsilon\right)+O\left(\frac{X}{\ln^{3/2}X}\right)\leqslant$$

$$\leqslant a\,K_0\frac{X}{\ln X}\,H(\alpha,a,b,c,g')\ \text{ при }\ X\geqslant X_0.$$

Теорема 1 доказана.

ОЦЕНКА СНИЗУ ЧИСЛА ПОЧТИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема 2. *Пусть $T(X)$ определено равенством (7), $T_0(X)$ – равенством: $T_0(X):=S(A;X^{1/a})-T(X)$. Тогда*

$$T_0(X)\geqslant aK_0\left(\frac{\lambda(\alpha a)}{\alpha a}-H(\alpha,a,b,c,g')\right)\frac{X}{\ln X}\tag{20}$$

при $X \geqslant X_0$, *где* K_0 *определено равенством (6),* $H(\alpha,a,b,c,g')$ *– равенством (13).*

Доказательство. Применим для $T_0(X)$ оценку снизу из следствия теоремы A и теорему 1 при $\alpha' = \alpha a$:

$$T_0(X) = S\left(A; X^{\frac{1}{a}}\right) - T(X) \geqslant K_0\lambda(\alpha a)\frac{X}{\ln X} - X^{1-\varepsilon} -$$

$$-a\, K_0 H(\alpha,a,b,c,g')\frac{X}{\ln X} = K_0\frac{X}{\ln X}\left(\lambda(\alpha a) - aH(\alpha,a,b,c,g')\right) - X^{1-\varepsilon}.$$

Следовательно, при $X \geqslant X_0$

$$T_0(X) \geqslant a\, K_0\left(\frac{\lambda(\alpha a)}{\alpha a} - H(\alpha,a,b,c,g')\right)\frac{X}{\ln X}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть последовательность A определена условием (2), выполнены условия (8) – (12) и пусть a, b, c – действительные числа, причем,* $1 \leqslant b < c < \alpha a$, $g' + 1 \leqslant \alpha a \leqslant 2g' + 2$, $\alpha a - c \leqslant g'$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$. *Тогда при* $x \geqslant x_0$ *имеет место оценка*:

$$\sum_{p_r \in A} 1 \geqslant a\, K_0\left(\frac{\lambda(\alpha a)}{\alpha a} - H(\alpha,a,b,c,g')\right)\frac{x}{\ln x}, \tag{21}$$

где $H(\alpha,a,b,c,g')$ *определено равенством (13),* K_0 *– равенством (6).*

Доказательство. Применим неравенство (20) из теоремы 2, получим

$$\sum_{p_r \in A} 1 \geqslant T_0(X) - R \geqslant a\, K_0\left(\frac{\lambda(\alpha a)}{\alpha a} - H(\alpha,a,b,c,g')\right)\frac{X}{\ln X} - R,$$

где R – число элементов последовательности A, делящихся на квадрат простого числа из интервала $[X^{1/a}, X^{c/a})$.

Оценим R, учитывая условие (12):

$$R \leqslant \sum_{X^{1/a} \leqslant p < X^{c/a}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 \leqslant A_4\left(\frac{X\ln X}{X^{1/a}} + X^{c/a}\right) \leqslant K_0 X\frac{C'}{\ln X}.$$

Таким образом, при $X = x$, $x \geqslant x_0$, $x_0 = x_0(\Phi)$ получим оценку снизу (21).

Теорема 3 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба и приведено полное решение задачи по применению этого метода весового решета для получения оценки снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента.

Получена оценка сверху для весовой функции в методе весового решета с последними весами Бухштаба (теорема 1). Доказана теорема 3, дающая оценку снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента.

В работе [31] (теорема 9.1) получена оценка снизу с помощью метода решета Сельберга с весами Рихерта для случая, когда выполнено условие на параметры: $\alpha a \leqslant 4$, это существенно ограничивает возможности в выборе параметров a и c в методе весового решета. В работе [7] получена оценка снизу с помощью метода решета Бруна с весами Бухштаба (1967 г.). Проблема выбора оптимальных весов в методе весового решета является очень трудной проблемой.

Веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества при выборе параметров в методе весового решета в сравнении с более ранними весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ, частным случаем которых являются веса Рихерта. Отметим, что применение метода весового решета, содержащего решето Бруна в сочетании с последними весами Бухштаба является технически сложным, так как сам метод решета Бруна в чистом виде, то есть без весов, имеет комбинаторную природу и является технически сложным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб, А. А. Новые улучшения в методе эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // Матем. сб. — 1938. — Т. 4(46), № 2. — С. 375–387.

2. Бухштаб, А. А. Новые исследования по методу эратосфенова решета : дис. ... д-ра физико-матем. наук : 01.01.06 / Бухштаб Александр Адольфович. — М., 1944. — 129 с.

3. Тартаковский, В. А. Метод избирательного «приближенного решета» / В. А. Тартаковский // ДАН СССР. — 1939. — Т. 23, № 2. — С. 127–130.

4. Линник, Ю. В. «Большое решето» / Ю. В. Линник // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 290–292.

5. Рихерт, Х.–Э. Решето Сельберга / Х.–Э. Рихерт, вып. Проблемы аналитической теории чисел : пер. с англ. Б. В. Левина. — М. : Мир, 1975. — С. 7–42.

6. Левин, Б. В. Метод решета и его применения : дис. ... д-ра физико-матем. наук : 01.01.06 / Левин Борис Вениаминович. — М., 1963. — 240 с.

7. Бухштаб, А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // УМН. — 1967. — Т. 22, № 3 (135). — С. 199–226.

8. Бухштаб, А. А. Упрощенная модификация комбинаторного решета / А. А. Бухштаб // Уч. записки МГПИ. — 1971. — Т. 375. — С. 187–194.

9. Richert, H.–E. Selbergs sieve with weights / H.–E. Richert // Mathematika. — 1969. — V. 16, № 31. — P. 1–22.

10. Laborde, M. Buchstabs sifting weights / M. Laborde // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250–257.

11. Чекин, А. Л. Двумерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико-числовым задачам : дис. ... канд. физико-матем. наук : 01.01.06 / Чекин Александр Леонидович. — М., 1987. — 133 с.

12. Вахитова, Е. В. Одномерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико-числовым задачам : дис. ... канд. физико-матем. наук : 01.01.06 / Вахитова Екатерина Васильевна. — М., 1992. — 132 с.

13. Бухштаб, А. А. Новый тип весового решета / А. А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

14. Вахитова, Е. В. О новом типе весового решета Бухштаба / Е. В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 26.08.93, № 2342-В93, 1993. — 34 с. (РЖ Матем. — 1994. — 1А97 Деп).

15. Вахитова, Е. В. О применении решета Бруна с весами Бухштаба нового типа к полиномиальной последовательности / Е. В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 22.06.95, № 1814-В95, 1995. — 52 с. (РЖ Матем. — 1995. — 10А47 Деп).

16. Вахитова, Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 38–49.

17. Вахитова, Е. В. О приложении функций Бухштаба / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1995. — Т. 57, № 1. — С. 121–125.

18. Вахитова, Е. В. О некоторых приложениях одномерного решета с весами / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1992. — Т. 51, № 6. — С. 139–141.

19. Вахитова, Е. В. Приложение метода весового решета к полиномиальной последовательности / Е. В. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 34–36.

20. Вахитова, Е. В. Приложение метода весового решета к оценке почти простого числа в арифметической прогрессии / Е. В. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 107–110.

21. Вахитова, Е. В. Приложение метода весового решета к коротким интервалам арифметической прогрессии / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 86–92.

22. Вахитова, Е. В. Приложение весового решета к оценке наименьшего почти простого числа полиномиальной последовательности от простого аргумента / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. — 2012. — № 23(142), вып. 29. — С. 5–13.

23. Вахитова, Е. В. Сравнение весовых функций в методе весового решета / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Ученые записки Орловского государственного университета. Труды X Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». — Волгоград, 10–16 сентября 2012 г. — Орел: Изд-во ОрлГУ, 2012. — № 6, ч. 2. — С. 51–59.

24. Вахитова, Е. В. О выборе приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента pq с ограничениями на p и q / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 1, ч. 1. — С. 3–8.

25. Вахитова, Е. В. О выборе приближения числа элементов в последовательности специального вида / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 92–100.

26. Вахитова, Е. В. Об оценке сверху для весовой функции в методе весового решета / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2022. — № 4. — С. 59–67.

27. Вахитова, Е. В. О приложении неравенства для весовой функции в методе весового решета / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2023. — № 1. — С. 54–58.

28. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова. — М. : Изд–во МПГУ «Прометей», 2002. — 268 с.

29. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

30. Вахитова, Е. В. Методы весового решета и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. — 352 с.

31. Halberstam, H. Sieve methods / H. Halberstam, H.–E. Richert. — London : Acad. Press, 1974. — 364 p.

32. Greaves, G. Sieves in number theory / G. Greaves // Ergebnisse der Mathematik. — Berlin : Springer–Verlag. — 2001. — V. 43, № 3. — 304 p.

33. Heath–Brown, D. R. Lectures on sieves / D. R. Heath–Brown // Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations held in Bonn, Germany, Januare–June, 2002. Bonn : Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathematische Schriften. — 2003. — V. 360. — 50 p.

34. Friedlander, J. B. Opera de cribro / J. B. Friedlander, H. Iwaniec // Providence (R. I.) : AMS. — 2010. — V. XX. — 527 p.

35. Ингам, А. Е. Распределение простых чисел / А. Е. Ингам. — М. : М.-Л., ОНТИ, 1936. — 156 с.

36. Rademacher, H. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abhand. aus

dem math. seminar der Hamb. univ. / H. Rademacher. — Leipzig, 1924. — P. 12–30.

REFERENCES

1. Bukhstab A.A. New improvements in the Eratosthenes sieve method. [Buhshtab A.A. Novye uluchsheniya v metode eratosfenova resheta]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1938, vol. 4(46), no. 2, pp. 375–387.

2. Bukhshtab A.A. New research on the method of Eratosthenes sieve. [Buhshtab A. A. Novye issledovaniya po metodu eratosfenova resheta]. dis. . . . Dr. physico-math. Sciences: 01.01.06 / Bukhshtab Aleksandr Adolfovich, Moscow, 1944, 129 p.

3. Tartakovsky V.A. The method of selective «approximate sieve». [Tartakovskij V.A. Metod izbiratel'nogo «priblizhennogo resheta»]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1939, vol. 23, no. 2, pp. 127–130.

4. Linnik Yu.V. «Large sieve». [Linnik YU.V. «Bol'shoe resheto»]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1941, vol. 30, no.4, pp. 290–292.

5. Richert H.–E. Sieve Selberg. [Rihert H.–E. Resheto Sel'berga]. *vyp. Problemy analiticheskoj teorii chisel — iss. Problems of the analytic number theory*, Moscow: Mir, 1975, pp. 7–42.

6. Levin B.V. The sieve method and its application. [Levin B.V. Metod resheta i ego primeneniya]. Cand. . . . Doctor of Physics and Mathematics. Sciences: 01.01.06 / Levin Boris Veniaminovich, Moscow, 1963, 240 p.

7. Bukhstab A.A. Combinatorial enhancement of the sieve of eratosthenes method. [Buhshtab A.A. Kombinatornoe usilenie metoda eratosfenova resheta]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 3 (135), pp. 199–226.

8. Bukhshtab A.A. Simplified modification of the combinatorial sieve. [Buhshtab A.A. Uproshchennaya modifikaciya kombinatornogo resheta]. *Uch. MGPI notes — Scientific Notes of MGPI*, 1971, vol. 375, pp. 187–194.

9. Richert, H.–E. Selbergs sieve with weights. Mathematika, 1969, vol. 16, no. 31, pp. 1–22.

10. Laborde M. Buchstabs sifting weights. Mathematika, 1979, vol. 26, pp. 250–257.

11. Chekin A.L. A two-dimensional sieve with weights and its application to some number theoretic problems. [CHekin A.L. Dvumernoe resheto s vesami i ego prilozhenie k nekotorym teoretiko-chislovym zadacham]. Dis.. . . cand. Physics and Mathematics. sciences: 01.01.06 / Chekin Aleksandr Leonidovich, Moscow, 1987, 133 p.

12. Vakhitova E.V. One-dimensional sieve with scales and its application some number-theoretic problems. [Vahitova E.V. Odnomernoe resheto s vesami i ego prilozhenie k nekotorym teoretiko-chislovym zadacham]. Dis. . . cand. Physics and Mathematics sciences: 01.01.06 / Vakhitova Ekaterina Vasilevna, Moscow, 1992, 132 p.

13. Bukhstab A.A. New type of weighing sieve. [Buhshtab A.A. Novyj tip vesovogo resheta]. Tez. dokl. All-Union. conf. Number theory and its applications. Tbilisi, 1985, pp. 22–24.

14. Vakhitova E.V. On a new type of weight sieve in Bukhshtab. [Vahitova E.V. O novom tipe vesovogo resheta Buhshtaba]. *DEP. in VINITI 08.26.93, no. 2342–B93, 1993, 34,p. (RJ Matem., 1994, 10A97 Dep) — Dep. v VINITI 26.08.93, № 2342–V93, 1993. — 34 s. (RZH Matem. — 1994. — 1A97 Dep).*

15. Vakhitova E.V. On the use of the Brun sieve with the weights of the Bushtab of a new type to polynomial sequence. [Vahitova E.V. O primenenii resheta Bruna s vesami Buhshtaba novogo tipa k polinomial'noj posledovatel'nosti]. *Dep. in VINITI 22.06.1995, no. 1814–V95, 1995, 52 p. (RJ Matem., 1995, 10A47 Dep) — Dep. v VINITI 22.06.95, № 1814–V95, 1995. — 52 s. (RZH Matem. — 1995. — 10A47 Dep).*

16. Vakhitova E.V. Selbergs One – Dimensional Sieve With Bukhstab Weights of New Type. [Vahitova E.V. Ob odnomernom reshete Sel'berga s vesami Buhshtaba novogo tipa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 1, pp. 30–39.

17. Vakhitova E.V. Application of Bukhstab functions. [Vahitova E.V. O prilozhenii funkcij Buhshtaba]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 1, pp. 121–125.

18. Vakhitova E.V. Certain applications of a one-dimensional weighted lattice. [Vahitova E.V. O nekotoryh prilozheniyah odnomernogo resheta s vesami]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1992, vol. 51, no. 6, pp. 139–141.

19. Vakhitova E.V. Application of the weight sieve method to the polynomial sequence. [Vahitova E.V. Prilozhenie metoda vesovogo resheta k polinomial'noj posledovatel'nosti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 34–36.

20. Vakhitova E.V. Application of the weighting sieve method to estimating the almost prime number in the arithmetical progression. [Vahitova E.V. Prilozhenie metoda vesovogo resheta k ocenke pochti prostogo chisla v arifmeticheskoj progressii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 107–110.

21. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Application of the weighing sieve method to a short interval of arithmetic progression. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Prilozhenie metoda vesovogo resheta k korotkim intervalam arifmeticheskoj progressii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 86–92.

22. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Application of a weight sieve to estimate the smallest almost-prime number of a polynomial sequence based on a prime argument. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Prilozhenie vesovogo resheta k ocenke naimen'shego pochti prostogo chisla polinomial'noj posledovatel'nosti ot prostogo argumenta]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika — BelSU Scientific Bulletin. Series: Mathematics. Physics*, 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 5–13.

23. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Comparison of weight functions in the weight sieve method. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Sravnenie vesovyh funkcij v metode vesovogo resheta]. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Trudy H Mezhdunar. konf. «Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya» — Academic Notes of the Orel State University. Proceedings of International. con. «Algebra and number theory: modern problems and applications»*, Volgograd, 10–16 September 2012, Orel: Publishing House Orel, 2012, no. 6, part 2, pp. 51–59.

24. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. On the choice of approximation of the number of elements in the sequence of values of the non-reducible polynomial from the argument pq with restrictions on p and q. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. O vybore priblizheniya chisla elementov v posledovatel'nosti znachenij neprivodimogo polinoma ot argumenta pq s ogranicheniyami na p i q]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, ch. 1, pp. 3–8.

25. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. On the choice of approximation of the number of elements in the sequence of a special type. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. O vybore priblizheniya chisla elementov v posledovatel'nosti special'nogo vida]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 92–100.

26. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. On the upper bound for the weight function in the weight sieve method. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Ob ocenke sverhu dlya vesovoj funkcii v metode vesovogo resheta]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2022, no. 4, pp. 59–67.

27. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. On the application of the inequality for the weight function

in the weight sieve method. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. O prilozhenii neravenstva dlya vesovoj funkcii v metode vesovogo resheta]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2023, no. 1, pp. 54–58.

28. Vakhitova E.V. Sieve methods with Bukhshtab and their applications. [Vahitova E.V. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Moscow: Publishing House «Prometey», 2002, 268 p.

29. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of a sieve with Buchstab weights and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Voronezh: VSU Publishing House, 2014, 332 p.

30. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of the weight sieve and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody vesovogo resheta i ih prilozheniya]. Voronezh: Publishing house of VSU, 2023, 352 p.

31. Halberstam H., Richert H.–E. Sieve methods, London: Acad. Press, 1974, 364 p.

32. Greaves G. Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathematik. Berlin: Springer–Verlag, 2001, vol. 43, no. 3, 304 p.

33. Heath–Brown D.R. Lectures on sieves. Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations held in Bonn, Germany, Januare–June, 2002. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathematische Schriften, 2003, vol. 360, 50 p.

34. Friedlander J.B. Opera de cribro / J.B. Friedlander, H. Iwaniec // Providence (R. I.): AMS, 2010, vol. XX, 527 p.

35. Ingam A.E. Distribution of prime numbers. [Ingam A.E. Raspredelenie prostyh chisel]. Moscow–Leningrad: ONTN, 1936, 156 p.

36. Rademacher H. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abhand. aus dem math. seminar der Hamb. univ. Leipzig, 1924, pp. 12–30.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru