УДК 517

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Ж. И. Бахтина[1]**, С. А. Шабров**[1]**, Т. В. Гридяева**[1]**, Е. В. Лылов**[2]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *АО «Концерн «Созвездие»*

Поступила в редакцию 20.08.2025 г.

Аннотация. В работе получены достаточные условия возможности применения методов Фурье к нахождению точного решения математической модели, описывающей малые колебания вязкоупругого стержня.

Трудности, связанные с потерей гладкости у решения, мы преодолевали с помощью концепции Ю. В. Покорного поточечной трактовки уравнений.

Ключевые слова: вязкоупругий стержень, производная по мере, математическая модель, негладкое решение, смешанная задача.

ON A MATHEMATICAL MODEL OF SMALL OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC ROD WITH A SINGULARITY

Zh. I. Bakhtina, S. A. Shabrov, T. V. Gridyaeva, E. V. Lylov

Abstract. In this paper we obtained sufficient conditions for the application of Fourier methods to finding an exact solution to a mathematical model describing small oscillations of a viscoelastic rod.

We overcame the difficulties associated with the loss of smoothness of the solution using Yu. V. Pokorny's concept of pointwise interpretation of equations.

Keywords: viscoelastic beam, derivative with respect to measure, mathematical model, nonsmooth solution, mixed problem.

Концепция поточечной трактовки дифференциальных уравнений с применением производных Радона-Никодима, предложенная Ю. В. Покорным [1], показала свою эффективность не только для краевых задач второго порядка, где построена точная параллель классической метрики ОДУ [2]–[4], но и для краевых задач с разрывными решениями [5] и более высокого порядка [6, 7].

Секрет такого успеха применения производных по мере и интеграла Стилтьеса объясняется достаточно просто: в отличие от теории обобщенных функций (распределений), где уравнение трактуется как равенство двух функционалов над пространством основных функций, здесь оно интерпретируется как связь между значениями функции и ее производными до определенного порядка.

В работе рассматривается смешанная задача

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial\sigma\,\partial x^3}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varepsilon\displaystyle\int\limits_0^t R(t-\tau)\frac{\partial^4 u}{\partial\sigma\,\partial x^3}\,d\tau,\\ u(0,t)=u_x'(0,t)=0,\\ u(l,t)=u_x'(l,t)=0,\\ u(x,0)=\psi_0(x),\\ u_t'(x,0)=\psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

© Бахтина Ж. И., Шабров С. А., Гридяева Т. В., Лылов Е. В., 2025

которая описывает малые колебания вязкоупругого стержня. Здесь $R(t-\tau)$ — ядро релаксации, $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ — начальные отклонение и скорость соответственно, $\sigma(x)$ — строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция, порождающая на этом множестве меру σ; ε — малый параметр.

Нам удобно считать уравнение в (1) заданным на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$, которое строится следующим образом.

Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На множестве $J_\sigma = [0;\ell] \backslash S(\sigma)$ введем метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В случае, когда множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ непусто, т. е. $S(\sigma) \neq \varnothing$, метрическое пространство J_σ является неполным. Обозначим через $\overline{[0;\ell]}_S$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\sigma(x)$ содержит элементы $\{\xi_-;\xi;\xi_+\}$, причем ξ_- и ξ_+ — это появившиеся при пополнении J_σ по метрике $\rho(x;y)$. При этом $x < \xi_- < \xi < \xi_+ < y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x < \xi < y$.

В точке $\xi \in S(\sigma)$ уравнение понимается следующим образом:

$$a^2 \frac{1}{\Delta\sigma(\xi)} \cdot \Delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = \varepsilon \int\limits_0^t R(t-\tau) \frac{1}{\Delta\sigma(\xi)} \Delta \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi,\tau) d\tau,$$

где $\Delta y(\xi) = y(\xi+0) - y(\xi-0)$ — полный скачок функции $y(x)$ в точке ξ.

Решение задачи (1) мы будем искать в следующем классе функций: дважды непрерывно дифференцируемых функций как по временной переменной, так и по пространственной; при каждом фиксированном t вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ — система собственных значений задачи

$$\begin{cases} X''''_{xxx\sigma} = \lambda X, \\ X(0) = X'(0) = 0, \\ X(\ell) = X'(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

причем мы можем считать ее ортонормированной.

В работах [8, 9] довольно подробно изучен спектр задачи (2), в частности доказано, что он обладает свойством осцилляционности.

Решение (1) мы будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty T_k(t)\varphi_k(x), \tag{3}$$

где $\varphi_k(x)$ — собственная функция задачи (2), отвечающая собственному значению λ_k.

После подстановки функции (3) в уравнение из (1) получим

$$a^2 \sum_{k=1}^\infty T_k(t)\varphi^{(4)}_{kxxx\sigma}(x) + \sum_{k=1}^\infty T''_k(t)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon \int\limits_0^t R(t-\tau)T_k(\tau)\varphi^{(4)}_{kxxx\sigma}(x)\,d\tau. \tag{4}$$

Законность почленного дифференцирования ряда будет обосновано в теореме, доказанной ниже.

Так как $\varphi_k(x)$ — собственная функция задачи (2), то равенство (4) допускает перезапись в следующем виде:

$$a^2 \sum_{k=1}^\infty T_k(t)\lambda_k\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^\infty T''_k(t)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon \int\limits_0^t R(t-\tau)T_k(\tau)\lambda_k\varphi_k(x)\,d\tau. \tag{5}$$

После умножения обеих частей равенства (5) на функцию $\varphi_m(x)$, интегрирования по мере σ в пределах от 0 до ℓ получим:

$$\lambda_m a^2 T_m(t) + T''_m(t) = \varepsilon\lambda_m \int\limits_0^t R(t-\tau)T_m(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

т. к. $\{\varphi_k(x)\}$ — ортогональная система.

Допустим, что начальные функции разлагаются в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}$, тогда получим начальные условия

$$T_m(0) = \int\limits_0^t \psi_0(x)\varphi_m(x)\,d\sigma(x), \tag{7}$$

$$\dot{T}_m(0) = \int\limits_0^t \psi_1(x)\varphi_m(x)\,d\sigma(x). \tag{8}$$

Таким образом для определения $T_m(t)$ мы получаем уравнение (6), дополненное начальными условиями (7), (8).

Теорема 1. *Пусть $K(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой; $\{\varphi_k(x)\}$ — система нормированных собственных функций задачи (2); $\psi_i(x)$ $(i = 0,1)$ — дважды непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; вторая производная $\psi''_{ixx}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$ и третья производная $\psi'''_{ixxx}(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. Пусть каждое собственное значение имеет геометрическую и алгебраическую кратность равную единице; $\psi_0(0) = \psi_0(\ell) = \psi'_{0x\sigma}(0) = \psi'_{0x\sigma}(\ell) = \psi_1(0) = \psi_1(\ell) = 0$; числа α_n и β_n определяются равенствами (7) и (8) при всех натуральных n. Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\varphi_n(x), \tag{9}$$

где $T_n(x)$ — решения (5), удовлетворяющие начальным условиям $T_n(0) = \alpha_n$ и $\dot{T}_n(0) = \beta_n$, является решением математической модели (1), причем ряд (9) допускает двойное дифференцирование по временной переменной t, и трижды по пространственной переменной вначале по x; а четвертой — по σ; полученные таким образом ряды сходятся равномерно и абсолютно.

Доказательство. Оценим коэффициенты ряда Фурье функции $\psi_0(x)$.

Последовательно имеем

$$\alpha_n = \int\limits_0^\ell \psi_0(x)\varphi_n(x)\,d\sigma(x) = \int\limits_0^\ell \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_n}\varphi''''_{0xxx\sigma}(x)d\sigma(x), \tag{10}$$

так как $\varphi_n(x)$ — это собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n.

Проинтегрируем четырежды по частям интеграл в первой части (10), получим

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n}\left[\psi_0\varphi'''_{nxxx}\Big|_0^\ell - \psi'_{0x}\varphi''_{nxx}\Big|_0^\ell + \psi''_{0xx}\varphi'_{nx}\Big|_0^\ell - \psi'''_{0xxx}\varphi_n\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell \varphi_n\psi''''_{0xxx\sigma}d\sigma\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^\ell \varphi_n(x)\psi''''_{0xxx\sigma}(x)d\sigma,$$

так как по условию $\psi_0(0) = \psi_0(\ell) = \psi_0'(0) = \psi_0'(\ell) = 0$.

Таким образом, числа $\lambda_n \alpha_n$ являются коэффициентами ряда Фурье функции $\psi_{0xxx\sigma}''''(x)$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n^3 \alpha_n^2\right|$ сходится.

Аналогично оценим β_n:

$$\beta_n = \int_0^\ell \varphi_n(x)\psi_1(x)d\sigma(x) = \int_0^\ell \psi_1(x) \cdot \frac{1}{\lambda_n} \varphi_{nxxx\sigma}''''(x)d\sigma(x),$$

ввиду того, что $\varphi_n(x)$ — собственная функция спектральной задачи (2). Тогда

$$\beta_n = \frac{1}{\lambda_n}\left[\psi_1 \varphi_{nxxx}'''\Big|_0^\ell - \psi_{1x}'\varphi_{nx}''\Big|_0^\ell + \psi_{1xx}''\varphi_{nx}'\Big|_0^\ell - \psi_{1xxx}'''\varphi_n\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \varphi_n(x)\psi_{1xxx\sigma}''''(x)d\sigma(x)\right],$$

и, следовательно, как и ранее, $\lambda_n\beta_n$ — коэффициенты ряда Фурье функции $\psi_{1xxx\sigma}''''(x)$.

Получаем неравенство, вытекающее из аналога неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2 \leqslant \int_0^\ell \left(\psi_{1xxx\sigma}''''(x)\right)^2 d\sigma,$$

из которого следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nx}'(x)T_n(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}|u| = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nxt}''(x)T_n(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)T_n'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nx}'(x)T_n'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)T_n''(t),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nxxx}'''(x)T_n(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nxxx\sigma}''''(x)T_n(t).$$

Все ряды, написанные выше, оцениваются рядом

$$K\sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n\lambda_n| + \left|B_n\sqrt{\lambda_n}\right|\right),$$

где K — некоторое положительное число. Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|A_n\lambda_n| + \left|B_n\sqrt{\lambda_n}\right|\right)$ сходится. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость всех рядов, полученных из (9) почленным дифференцированием. А так как функция $u(x,t)$, определенная равенством (9), как нетрудно видеть, удовлетворяет граничным и начальным условиям, то $u(x,t)$ действительно является решением задачи (1). Теорема доказана. ▫

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задачах / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М. Б. Давыдова, Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

6. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

7. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

8. Шабров, С. А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере: Дисс…доктора физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. консультант А. Д. Баев. — 20.12.2017. — 412 с.

9. Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С. А. Шабров. — Saarbrucken, 2015. — 162 с.

10. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. — М., 1966. — 752 с.

11. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. — М. : Стройиздат, 1968. — 419 с.

12. Ward, I. M. Mechanical properties of solid polymers / I. M. Ward, J. Sweeney. — WILEY, 2012. — 474 p.

13. Кристенсен, Р. М. Введение в теорию вязкоупругости / Р. М. Кристенсен. — Москва: Мир, 1974. — 340 с.

14. Малкин, А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. — Санкт–Петербург, 2007. — 560 с.

REFERENCES

1. Pokorny Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

6. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

7. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

8. Shabrov S.A. Mathematical modeling and qualitative methods of analysis of boundary value problems with derivatives with respect to measure. [SHabrov S.A. Matematicheskoe modelirovanie i kachestvennye metody analiza granichnyh zadach s proizvodnymi po mere]. dis. ... Dr. physico-math. Sciences: 05.13.18 / Shabrov Sergey Alexandrovich, Voronezh, 2017, 412 p.

9. Shabrov S.A. Qualitative methods for analyzing fourth-order boundary value problems. [SHabrov S.A. Kachestvennye metody analiza granichnyh zadach chetvertogo poryadka]. Saarbrucken, 2015, 162 p.

10. Rabotnov Yu.N. Creep of structural elements. [Rabotnov YU.N. Polzuchest' elementov konstrukcij]. Moscow, 1966, 752 p.

11. Rzhanitsyn A.R. Creep theory. [Rzhanicyn A.R. Teoriya polzuchesti]. Moscow, 1968, 419 p.

12. Ward I.M., Sweeney J. Mechanical properties of solid polymers. WILEY, 2012, 474p.

13. Christensen R.M. Introduction to the Theory of Viscoelasticity. [Kristensen R.M. Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti]. Moscow: Mir, 1974, 340 p.

14. Malkin A.Ya., Isaev A.I. Rheology: concepts, methods, applications. [Malkin A.YA., Isaev A.I. Reologiya: koncepcii, metody, prilozheniya]. Saint–Petersburg, 2007, 560 p.

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bakhtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexsandrovich, Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Гридяева Татьяна Витальевна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: tatianavit99@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Gridyaeva Tatyana Vitalievna, postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: tatianavit99@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Лылов Евгений Владимирович, кандидат физико–математических наук, АО «Концерн «Созвездие», Заместитель начальника управления, Воронеж, Россия

Lylov Evgeny Vladimirovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, JSC «Concern «Sozvezdie», Deputy Head of Department, Voronezh, Russia