УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 28.10.2025 г.

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с симметричными граничными условиями. С помощью функции Грина краевая задача редуцируется к эквивалентному интегральному уравнению. Далее, опираясь на соответствующие свойства функции Грина, используя теорему Красносельского о растяжении (сжатии) конуса в полуупорядоченных пространствах, доказывается существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи. Единственность положительного решения установлена в частном случае.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, сжатие и растяжение конуса.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE FOURTH ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH SYMMETRICAL BOUNDARY CONDITIONS

G. E. Abduragimov

Abstract. The article considers a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of the fourth order with symmetric boundary conditions. Using the Green function, the boundary value problem is reduced to an equivalent integral equation. Further, relying on the corresponding properties of the Green function, using Krasnosel'skii's theorem on the expansion (compression) of a cone in semi-ordered spaces, the existence of at least one positive solution to the problem under consideration is proved. The uniqueness of a positive solution is established in a particular case.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, compression and extension of a cone.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка возникают в математических моделях многих реальных процессов. В строительной механике уравнения четвертого порядка встречаются, например, в задачах об изгибе балки на упругом основании, колебании балок постоянного и переменного сечения, а также в теории цилиндрических оболочек. Граничные задачи для нелинейных ОДУ четвертого поряка в различных постановках изучались многие десятилетия и актуальны по настоящее время. Из актуальных работ, посвященных положительным решениям краевых задач для нелинейных ОДУ четвертого порядка и близких к тематике данной статьи, отметим публикации [1-4].

В предлагаемой статье получены достаточные условия существования и единственности положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка с симметричными граничными условиями. Доказательство существования положительного решения основано на теореме Красносельского о растяжении (сжатии) конуса в полуупорядоченных пространствах. Единственность же такого решения установлена только в подлинейном частном случае.

Для удобства чтения текст работы после введения разбит на три части: вначале приводятся необходимые обозначения, определения и вспомогательные утверждения, далее – теоремы существования и единственности и в заключении предложены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведем некоторые определения, предложения и утверждения, используемые в работе.

Определение 1. [5, с.256] *Замкнутое выпуклое множество K банахова пространства E назовем конусом, если из $x \in K$ и $x \neq 0$ следует, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha x \overline{\in} K$ при $\alpha < 0$.*

Каждый конус K определяет в банаховом пространстве E *полуупорядоченность*: пишут $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, если $y - x \in K$.

Определение 2. [5, с.256] *Нелинейный оператор $A : E \to E$ называется положительным на множестве M банахова пространства E, если $AM \subset K$, где K – конус в E.*

Пусть заданы множества: $K(0,r_1) = \{x \in K : \|x\| \leqslant r_1\}$ и $K(r_2,\infty) = \{x \in K : \|x\| \geqslant r_2\}$, где r_1 и r_2 – положительные числа. Рассмотрим теперь положительный вполне непрерывный оператор A, определенный на всем конусе K (кроме, может быть, нулевой точки).

Определение 3. [5, с.362] *Пусть существуют такие положительные числа r_1 и r_2, что $Ax \not\geqslant x$ при $x \in K(0,r_1)$ $(x \neq 0)$ и $Ax \not\leqslant x$ при $x \in K(r_2,\infty)$, тогда будем называть оператор A растяжением конуса K. Аналогично, A является сжатием конуса K, если $Ax \not\leqslant x$ при $x \in K(0,r_1)$ $(x \neq 0)$ и $Ax \not\geqslant x$ при $x \in K(r_2,\infty)$.*

Теорема 1. [5, с.362] *Пусть положительный и вполне непрерывный оператор A вляется растяжением или сжатием конуса K. Тогда A имеет в конусе по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) = a(t)x(t) + f(t,x(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{2}$$

$$x''(0) = x''(1) = 0, \tag{3}$$

где функции $a(t)$ и $f(t,u)$ предполагаются неотрицательными и непрерывными соответственно на $[0,1]$ и $[0,1] \times [0,\infty)$, причем $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Определение 1. *Под положительным решением задачи* (1)–(3) *будем подразумевать функцию* $x \in C^4_{[0,1]}$ *положительную в интервале* $(0,1)$, *удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (1) *и граничным условиям* (2), (3).

Нетрудно показать, что

$$G(t,s) = \frac{1}{6}\begin{cases}(s-1)t^3 + \left[(s-1)^3 - (s-1)\right]t, & 0 \leqslant t \leqslant s,\\ (t-1)s^3 + \left[(t-1)^3 - (t-1)\right]s, & s \leqslant t \leqslant 1,\end{cases}$$

является функцией Грина оператора $\dfrac{d^4}{dt^4}$ с краевыми условиями (2), (3), которая, как несложно видеть, положительна в области $(0,1) \times (0,1)$, а на границе $G(0,s) = G(1,s) = 0$. Кроме того, несложно убедиться, что для функции Грина справедливы оценки

$$\frac{1}{6}\psi(s)\psi(t) \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{1}{6}\psi(t), \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1], \tag{4}$$

где $\psi(t) = t - t^2$.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)[a(s)x(s) + f(s,x(s))]\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

Дважды продифференцировав (5), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\left[a(s)x(s) + f(s,x(s))\right]ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} = \begin{cases}(s-1)t, & 0 \leqslant t \leqslant s,\\ (t-1)s, & s \leqslant t \leqslant 1.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} \leqslant 0$ на $[0,1] \times [0,1]$, причем в нуль она обращается только на границе соответствующего квадрата. Тогда из (6) следует, что $x''(t) < 0$ при $t \in (0,1)$ и в соответствии с (2) $x(0) = x(1) = 0$. Следовательно, $x(t)$ строго выпукла на $[0,1]$ и в силу симметричности граничных условий (2), (3) справедливо неравенство

$$x(t) \geqslant \varphi(t)\|x\|, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

где $\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, $\quad \varphi(t) = \min\{t, 1-t\}$.

Запишем интегральное уравнение (5) в операторной форме

$$x = Ax,$$

где A – оператор действующий на подмножестве неотрицательных функций пространства $C_{[0,1]}$, определенный равенством

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)[a(s)x(s) + f(s,x(s))]\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Обозначим через K конус неотрицательных, строго выпуклых на отрезке $[0,1]$ функций $u \in C^4_{[0,1]}$ удовлетворяющих условиям (2) и (3). Полуупорядоченность в этом конусе введем следующим образом: будем считать $u \prec v$, если $u(t) \leqslant v(t)$ при $t \in [0,1]$.

Пусть $x \in K$. Как было выше показано $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} < 0$ при $t \in [0,1]$ и поэтому

$$(Ax)''(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s,x(s))\, ds < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Следовательно, при $x \in K$ неотрицательная функция $u = Ax$ строго выпукла и удовлетворяет условиям (2) и (3). Это означает, что A – положительный оператор на K. Вполне непрерывность A легко проверятся.

Теорема 2. *Предположим, что* $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} a(t) < 12$ *и выполнены условия*

1. $\lim_{x \to 0^+} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \dfrac{f(t,x)}{x} = 0$*;*

2. $\lim_{x \to +\infty} \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \dfrac{f(t,x)}{x} = \infty$.

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что оператор A растягивает конус K. В дальнейшем для удобства выкладок введем обозначение $\widetilde{a} := \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} a(t)$. Из условия 1 теоремы следует существование числа $r > 0$ такого, что

$$f(t,x) \leqslant \mu x, \quad t \in [0,1], \quad 0 < x \leqslant r, \tag{8}$$

где $0 < \mu < 12 - \widetilde{a}$.

В силу (4) и (8) при $x \in K(0,r)$ имеем

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)[a(s)x(s) + f(s,x(s))]\, ds \leqslant \frac{\widetilde{a} + \mu}{6} \psi(t) \int_0^1 x(s)\, ds \leqslant \frac{1}{24}(\widetilde{a} + \mu)\|x\|. \tag{9}$$

Далее, из (7) следует, что $x(\frac{1}{2}) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|$ и соответственно $\|x\| \leqslant 2x(\frac{1}{2})$. С учетом выбора μ из (9) окончательно получим

$$Ax\left(\frac{1}{2}\right) < x\left(\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, $Ax - x \notin K$ при $x \in K(0,r)$.

Несложно видеть, что условие 2 теоремы гарантирует существование числа $R > 0$, такого что

$$f(t,x) \geqslant \eta x, \quad t \in [0,1], \quad x \geqslant R, \tag{10}$$

где $\eta > 384$.

В силу (4) и (10) для $x \in K(R,\infty)$ имеем

$$Ax(t) \geqslant \frac{\eta}{6}\psi(t) \int_0^1 \psi(s)x(s)\, ds \geqslant \frac{\eta}{6}\psi(t) \int_0^1 \psi(s)\varphi(s)\, ds \cdot \|x\| \geqslant \frac{\eta}{96}\psi(t)x(t). \tag{11}$$

Отсюда, в частности, следует, что $Ax(\frac{1}{2}) \geqslant \frac{\eta}{384} x(\frac{1}{2})$. Ввиду выбора η окончательно получим $Ax\left(\frac{1}{2}\right) > x\left(\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, $x - Ax \notin K$ при $x \in K(R,\infty)$.

Таким образом, при разумном выборе r и R положительный вполне непрерывный оператор A растягивает конус K. Тогда, как следует из теоремы 1, оператор A имеет по меньшей мере одну неподвижную точку в K, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3) Теорема доказана.

Теорема 3. *Предположим, что* $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} a(t) < 12$ *и выполнены условия*

1. $\lim_{x \to 0^+} \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \dfrac{f(t,x)}{x} = \infty$*;*

2. $\lim_{x\to+\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\dfrac{f(t,x)}{x}=0.$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Докажем, что оператор A сжимает конус K. Условие 1 теоремы гарантирует существование числа $r>0$ такого, что

$$f(t,x)\geqslant \xi x,\quad t\in[0,1],\quad 0<x\leqslant r, \tag{12}$$

где $\xi>384$.

В силу (4) и (12) при $x\in K(0,r)$, аналогично методу получения (11), будем иметь

$$Ax(t)\geqslant \frac{\xi}{96}\psi(t)x(t),$$

откуда вытекает, что $Ax\big(\frac{1}{2}\big)>x\big(\frac{1}{2}\big)$. Следовательно, $x-Ax\notin K$ при $x\in K(0,r)$.

Далее, ввиду условия 2 теоремы найдется число $R>0$ такое, что

$$f(t,x)\leqslant \zeta x,\quad t\in[0,1],\quad x\geqslant R, \tag{13}$$

где $0<\zeta<12-\widetilde{a}$.

Опираясь на (4) и (13) при $x\in K(R,\infty)$, следуя методу получения (9), будем иметь

$$Ax(t)\leqslant \frac{1}{24}(\widetilde{a}+\mu)\|x\|.$$

Поскольку из (7) следует, что $x(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{2}\|x\|$, то $\|x\|\leqslant 2x(\frac{1}{2})$. Окончательно получим

$$Ax\left(\frac{1}{2}\right)<x\left(\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, $Ax-x\notin K$ при $x\in K(R,\infty)$.

Итак, при разумном выборе r и R положительный вполне непрерывный оператор A сжимает конус K. Тогда, как следует из теоремы 1, оператор A имеет по меньшей мере одну неподвижную точку в K, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3) Теорема доказана.

Теорема 4. *Предположим, что* $a(t)\equiv 0$*, выполнены условия теоремы 3, функция* $f(t,u)$ *дифференцируема по* u *и монотонно убывает по второму аргументу. Тогда краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Допустим, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – положительные решения задачи (1)–(3). Пусть $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$, где $y(t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$y^{(4)}(t)=f(t,x_1(t))-f(t,x_2(t)),\qquad 0<t<1, \tag{14}$$

$$y(0)=y(1)=0, \tag{15}$$

$$y''(0)=y''(1)=0, \tag{16}$$

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$y(t)y^{(4)}(t)=y(t)[f(t,x_1(t))-f(t,x_2(t))]=y(t)f'_u(t,\widetilde{x}(t))(x_1(t)-x_2(t))=y^2(t)f'_u(t,\widetilde{x}(t)),$$

где $\widetilde{x}(t)$ принимает значения промежуточные между $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Отсюда в силу монотонности f

$$y(t)y^{(4)}(t)\leqslant 0,\quad t\in[0,1].$$

Проинтегрировав выражение слева, получим

$$\int_0^1 y(t)y^{(4)}(t)\,dt = -y'(t)y''(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 (y''(t))^2\,dt = \int_0^1 [y''(t)]^2\,dt.$$

Итак,

$$0 \leqslant \int_0^1 [y''(t)]^2\,dt \leqslant 0.$$

Таким образом, $y''(t) = 0$ для всех $t \in [0,1]$. Отсюда с учетом краевых условий (15), (16) легко видеть, что задача (14)–(16) имеет только нулевое решение $y(t) = 0$. Следовательно, $x_1(t) = x_2(t)$.

ПРИМЕРЫ

Приведем примеры, иллюстрирующие выполнение условий вышеприведенных теорем.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + e^t x(t) + (t^2+1)x^2(t)(1 - e^{-x(t)}) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{17}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{18}$$

$$x''(0) = x''(1) = 0, \tag{19}$$

где $f(t,x) = (t^2+1)x^2(1-e^{-x})$.

Имеем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} a(t) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^t = e < 12,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2x(1-e^{-x}) = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x(1-e^{-x}) = \infty.$$

Следовательно, согласно теореме 2 задача (17)–(19) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + (1+t^2)\sqrt{x(t)} = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{20}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{21}$$

$$x''(0) = x''(1) = 0, \tag{22}$$

где $f(t,x) = (1+t^2)\sqrt{x}$.

Имеем

$$\lim_{x\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Согласно теореме 4 задача (20)–(22) имеет единственное положительное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлены достаточные условия существования и единствености положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с симметричными граничными условиями.

Полученные результаты основываются на использовании теоремы Красносельского о растяжении (сжатии) конуса и позволяют охватить довольно широкий класс краевых задач с подлинейной и надлинейной надбавкой f соответственно. Приведенные в статье результаты расширяют и дополняют исследования автора по данной тематике и могут представлять некоторый теоретический интерес для специалистов, занимающихся вопросами существования положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang, Y. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem / Y. Zhang, L. Chen // AIMS Math. — 2023. — Vol. 8. — P. 1014–1021.

2. Chen, H. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives / H. Chen, Y. Cui // J. Inequal. Appl. — 2023. — Vol. 2023. — P. 1–13.

3. Абдурагимов, Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка / Э. И. Абдурагимов // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. — 2014. — Т. 10, № 121. — С. 9–16.

4. Абдурагимов, Г. Э. О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г. Э. Абдурагимов // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 261–267.

5. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

REFERENCES

1. Zhang Y., Chen L. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem. AIMS Math., 2023, vol. 8, pp. 1014–1021.

2. Chen H., Cui Y. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives. J. Inequal. Appl., 2023, vol. 2023, pp. 1–13.

3. Abduragimov E.I. Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE. [Abduragimov E.I. Sushchestvovaniye polozhitel'nogo resheniya dvukhtochechnoy krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka]. *Vestn. SamU. Yestestvennonauchn. ser. — Vestn. SamU. Natural science ser.*, 2014, vol. 10, no. 121, pp. 9–16.

4. Abduragimov G.E. On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear ordinary differential equation of the fourth order. [Abduragimov G.E. O sushchestvovanii polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi dlya odnogo nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya chetvertogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 261–267.

5. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric methods of nonlinear analysis. [Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskiye metody nelineynogo analiza]. Moskow: Nauka, 1975, 512 p.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Дагестан, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderkhanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Dagestan, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru