

УДК 517.957:531.395

ОБОБЩЕННАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВНЕШНЕГО ИСТОЧНИКА ИЛИ ПОГЛОЩЕНИЯ

Ю. А. Чиркунов, М. Ю. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 26.06.2025 г.

Аннотация. Методами группового (симметричного) анализа дифференциальных уравнений изучается обобщенная осесимметричная модель движения жидкости или газа в пористой среде со степенной нелинейностью при наличии нестационарного внешнего источника или поглощения. Найдена основная группа Ли преобразований дифференциального уравнения, задающего эту модель. Получены все виды ее инвариантных подмоделей. Они задаются инвариантными решениями указанного уравнения. Инвариантные решения ранга 1 получены либо в явном виде, либо их отыскание сведено к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для явных решений при конкретных значениях входящих в их выражения параметров построены графики распределения давления в пористой среде. Остальные решения используются для исследования физически содержательных краевых задач, для которых в начальный момент времени в фиксированной точке среды задается давление и либо скорость его изменения вдоль оси симметрии, либо радиальная скорость его изменения. Эти краевые задачи решаются численно при некоторых конкретных значениях, входящих в них параметров. Получены графики функций, определяющих эти решения. Проведенное исследование актуально во многих областях прикладной науки и техники: фильтрация, механика грунтов, механика горных пород, нефтепромысловая инженерия, строительная инженерия, нефтегеология, биология и биофизика, материаловедение.

Ключевые слова: осесимметричная модель движения жидкости или газа в пористой среде со степенной нелинейностью, нестационарный внешний источник или поглощение, симметричный анализ, инвариантные подмодели.

A GENERALIZED AXISYMMETRIC MODEL OF THE MOTION OF A LIQUID OR GAS IN A POROUS MEDIUM WITH POWER-LAW NONLINEARITY IN THE PRESENCE OF A NON-STATIONARY EXTERNAL SOURCE OR ABSORPTION

Yu. A. Chirkunov, M. Yu. Chirkunov

Abstract. The methods of symmetry (group) analysis are used to study the generalized axisymmetric model of the motion of fluid or gas in a porous medium with power nonlinearity, to which the presence of a non-stationary external source or absorption is added. The main Lie group of transformations of the differential equation defining this model is found. All types of its invariant submodels are obtained. They are defined by invariant solutions of the specified equation. Invariant solutions of rank 1 are obtained either explicitly, or their search is reduced to systems of ordinary differential equations of the first order. For explicit solutions at specific values of the parameters included in their expressions, graphs of pressure distribution in a porous medium are constructed. The remaining solutions are used to study physically meaningful boundary value problems for which at the initial moment of time at a fixed point of the medium the pressure and either the rate of its change along the axis of symmetry or the radial rate of its change are specified. These boundary value problems are solved numerically for some specific values of the parameters included in them. Graphs of the functions determining these solutions are obtained. The conducted research is relevant in many areas of applied science and technology: filtration, soil mechanics, rock mechanics, oil field engineering, construction engineering, petroleum geology, biology and biophysics, materials science.

Keywords: axisymmetric model of the motion of fluid or gas in a porous medium with power nonlinearity, non-stationary external source absorption, symmetry analysis, invariant submodels.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Многие природные вещества, например, такие как горные породы и почва (в частности, водоносные горизонты, нефтяные пласты), биологические ткани (частности, кости, древесина, пробка), а также искусственные материалы, такие как цементы и керамика, можно рассматривать как пористые среды. Многие из их важных свойств можно объяснить, только рассматривая их как пористые среды. Движение жидкости, жидкости или газа через пористую среду представляет большой интерес и стал отдельной областью исследований. Изучающая это движение наука получила название подземной гидромеханики. Основателями этой науки стали французские ученые А. Дарси [1–3] и Ж. Дюпюи [4–6]. Одним из основоположников нефтяной подземной гидромеханики был Л. С. Лейбензон [7, 8]. Он сыграл большую роль в создании научных основ разработки нефтяных месторождений.

Классическая модель, описывающая движение жидкости или газа в пористой среде со степенной нелинейностью задается следующим дифференциальным уравнением

$$p_t = \Delta(p^\beta), \beta(\beta - 1) \neq 0, \quad (1)$$

где $p = p(t, x)$ — давление; t — время; $x = (x, y, z) \in R^3$; $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, β — произвольная постоянная. Эта модель исследовалась во многих работах (см., например, [9–13] и приведенную там большую библиографию). Изучение движения жидкости или газа в пористой среде в рамках классической модели не всегда адекватно описывает реальные процессы. Прежде всего, это относится к процессам с внешним нестационарным источником или поглощением.

Исследование инвариантных подмоделей ранга 0 для общей трехмерной модели движения жидкости или газа в пористой среде при наличии внешнего нестационарного источника или поглощения было начато в [14, 15].

В [16] исследованы инвариантные подмодели ранга 1 для общей двумерной модели движения жидкости или газа в пористой среде при наличии внешнего нестационарного источника или поглощения.

В нашей работе мы будем изучать осесимметричную модель, описывающую движение жидкости или газа в пористой среде со степенной нелинейностью при наличии внешнего нестационарного источника или поглощения. Эта модель задается уравнением

$$\partial_t = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) (p^\beta) + f(t) p, \beta(\beta - 1) \neq 0, f'(t) \neq 0, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, функция $f(t)$ определяет нестационарный внешний источник или поглощение. Для каждого реального процесса эта функция конкретизируется эмпирическим путем. Случай $f(t) > 0$ соответствует наличию внешнего источника. Случай $f(t) < 0$ соответствует наличию внешнего поглощения.

2. СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ (2)

Основным методом исследования уравнения (2) является групповой (симметричный) анализ дифференциальных уравнений. Групповой анализ является одним из наиболее эффективных способов получения максимальной информации о свойствах решений дифференциальных уравнений. Основные понятия и алгоритмы современного группового анализа дифференциальных уравнений можно найти, например, в [17–21] и приведенных там ссылках.

Оператор, допускаемый уравнением (2), ищется в виде

$$X = \xi^0(t, r, z, p) \partial_t + \xi^1(t, r, z, p) \partial_r + \xi^2(t, r, z, p) \partial_z + \eta(t, r, z, p) \partial_p$$

где $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \eta$ — неизвестные функции своих переменных.

Условие инвариантности многообразия, заданного уравнением (2) относительно этого оператора и расщепление по параметрическим производным дает переопределенную систему определяющих уравнений. После третьего продолжения эта система приводится в инволюцию и интегрируется. Решение этой системы показывает, что основная группа Ли преобразований уравнения (2) является четырехпараметрической группой G_4 , алгебра Ли которой L_4 имеет базис

$$Y_1 = \partial_z, Y_2 = r \partial_r + z \partial_z + \frac{2}{\beta-1} p \partial_p, Y_3 = \frac{\int h(t) dt}{h(t)} \partial_t + \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{h'(t) \int h(t) dt}{h^2(t)} - 1 \right) p \partial_p, \\ Y_4 = \frac{1}{h(t)} \left(\partial_t + \frac{h'(t)}{(\beta-1)h^2(t)} p \partial_p \right), h(t) = \exp \left((\beta-1) \int f(t) dt \right).$$

Функция $f(t)$, определяющая нестационарный внешний источник или поглощение, выражается через функцию $h(t)$ по формуле

$$f(t) = \frac{h'(t)}{(\beta-1)h(t)}.$$

Для алгебры L_4 строится группа внутренних автоморфизмов, под действием которой L_4 разбивается на непересекающиеся классы изоморфных подалгебр. В каждом классе выбирается подалгебра, базис которой содержит наименьшее число произвольных постоянных. Получаются оптимальные системы неизоморфных подалгебр всех размерностей алгебры Ли L_4 . Каждой подалгебре из этих оптимальных систем соответствует подгруппа группы G_4 . В

результате получаются оптимальные системы неподобных подгрупп всех порядков группы Ли G_4 . Применяя критерий инвариантности функции относительно группы Ли преобразований [17–21], находим универсальный инвариант в пространстве $R^4(t, r, z, u)$ для каждой подгруппы из этих оптимальных систем подгрупп. Это дает нам представление для всех инвариантных решений уравнения (2). Эти решения определяют все инвариантные подмодели модели, задаваемой этим уравнением.

Мы изучаем только инвариантные осесимметричные решения, которые удовлетворяют следующим условиям

$$\partial_r p \neq 0, \partial_z p \neq 0. \quad (3)$$

Поэтому в оптимальные системы подгрупп мы включили только те подгруппы H , для которых инвариантное H -решение удовлетворяет условиям (3). Оптимальные системы этих подгрупп приведены в таблицах 1, 2, где λ – произвольная постоянная. Для всех трехпараметрических подгрупп условия (3) не выполняются, поэтому оптимальная система этих подгрупп не приводится.

Таблица 1. Однопараметрические подгруппы $\theta_{1,k}$.

k	Базис подалгебры	Универсальный инвариант
1	$Y_2 + \lambda Y_3$	$z^{-\lambda} \int h(t) dt, \frac{r}{z}, \left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} z^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p.$
2	Y_3	$r, z, \left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p$
3	$Y_1 + Y_3$	$\exp(-z) \int h(t) dt, r, \left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p$
4	$\pm Y_2 + Y_4$	$\int h(t) dt \mp \ln z, \frac{r}{z}, (h(t))^{\frac{1}{1-\beta}} \exp\left(\frac{2}{1-\beta} \int h(t) dt\right) p$
5	$Y_1 + Y_4$	$\int h(t) dt - z, r, (h(t))^{\frac{1}{1-\beta}} p$
6	Y_4	$r, z, (h(t))^{\frac{1}{1-\beta}} p.$

Таблица 2. Двухпараметрические подгруппы $\theta_{2,k}$.

k	Базис подалгебры	Универсальный инвариант
1	$Y_1 + Y_3$	$Y_4, r, (h(t))^{\frac{1}{1-\beta}} \exp\left(\frac{z}{\beta-1}\right) p$
2	$Y_2 + \lambda Y_3$	$Y_4, \frac{r}{z}, \left(z^{2-\lambda} h(t) \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p$
3	$Y_1 + Y_4$	$Y_2 + Y_3, \frac{g(t) - z}{r}, (rh(t))^{\frac{1}{1-\beta}} p$
4	Y_2	$Y_3, \frac{r}{z}, \left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} z^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p$

3. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (2)

Каждое решение уравнения (2) определяет многообразие в пространстве $R^4(t, r, z, p)$. Для каждой подгруппы, допускаемой уравнением, решение называется инвариантным относительно данной подгруппы, если это многообразие является инвариантным многообразием

этой подгруппы. Размерность этого многообразия в пространстве инвариантов подгруппы называется рангом инвариантного решения [17–21].

Универсальные инварианты всех подгрупп, приведенные в таблицах 1, 2, позволяют получить представление всех существенно различных (не связанных посредством точечных преобразований) инвариантных решений ранга 1 и 2 уравнения (2), удовлетворяющих условию (3).

Таблица 1 дает представление всех инвариантных решений ранга 2. Для каждой подгруппы из этой таблицы с универсальным инвариантом $\{I_1, I_2, I_3\}$, представление инвариантного решения имеет вид $I_3 = U(I_1, I_2)$. Подстановка этого представления в уравнение (2) дает уравнение для функции U , зависящей от двух переменных. Тем самым, в уравнении (2) происходит редукция числа независимых переменных.

Представление всех инвариантных решений ранга 1 дает Таблица 2. Для каждой подгруппы из этой таблицы с универсальным инвариантом $\{I_1, I_2\}$ представление инвариантного решения имеет вид $I_2 = U(I_1)$.

В дальнейших будем исследовать только инвариантные решения ранга 1.

В последующих формулах величины c_n ($n = 1, 2, 3, 4$), $t_0 \geq 0$, $r_0, z_0, p_0 > 0$, p_1, p_2 являются произвольными вещественными числами, на которые в отдельных случаях будут накладываться дополнительные ограничения.

3.1. Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{2,1} \langle Y_1 + Y_3, Y_4 \rangle$.

Из Таблицы 2 следует представление этого решения

$$p = (h(t))^{\frac{1}{\beta-1}} \exp\left(\frac{z}{1-\beta}\right) U(r). \quad (4)$$

Подстановка (4) в (2) дает уравнение

$$\left(U^{\beta-1}U'\right)' + \frac{1}{r}U^{\beta-1}U' + \frac{\beta}{(\beta-1)^2}U^\beta = 0$$

общее решение которого имеет вид

$$U = \left(c_1 J_0\left(\left|\frac{\beta}{\beta-1}\right|r\right) + c_2 N_0\left(\left|\frac{\beta}{\beta-1}\right|r\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а $N_0(x)$ — функция Неймана нулевого порядка.

Давление определяется по формуле

$$p = (h(t))^{\frac{1}{\beta-1}} \exp\left(\frac{z}{1-\beta}\right) \left(c_1 J_0\left(\left|\frac{\beta}{\beta-1}\right|r\right) + c_2 N_0\left(\left|\frac{\beta}{\beta-1}\right|r\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (5)$$

На каждой цилиндрической поверхности $r = \text{const} > 0$ внутри пористой среды давление распределено по формуле

$$p = c(h(t))^{\frac{1}{\beta-1}} \exp\left(\frac{z}{1-\beta}\right), c = \text{const} > 0.$$

Приведем два примера, задавая конкретные значения величинам $c_1, c_2, \beta, r, h(t)$.

При $c_1 = 1, c_2 = 0, \beta = -1, h(t) = \frac{1}{t^2+t+1}, r = 2, z > 0$ распределение давления показано на Рис. 1.

В данном случае давление на цилиндрической поверхности $r = 2$ монотонно возрастает со временем под воздействием внешнего источника и стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

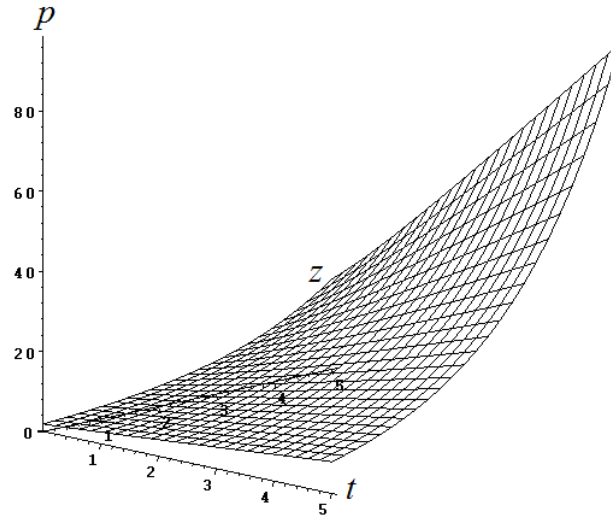


Рис. 1. Распределение давления на цилиндрической поверхности $r = 2$.

При $c_1 = 1, c_2 = 0, \beta = \frac{1}{4}, h(t) = 2(t + 1), r = 2, z > 0$ распределение давления показано на Рис. 2.

В этом случае давление на цилиндрической поверхности $r = 2$ монотонно убывает со временем под воздействием внешнего поглощения и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

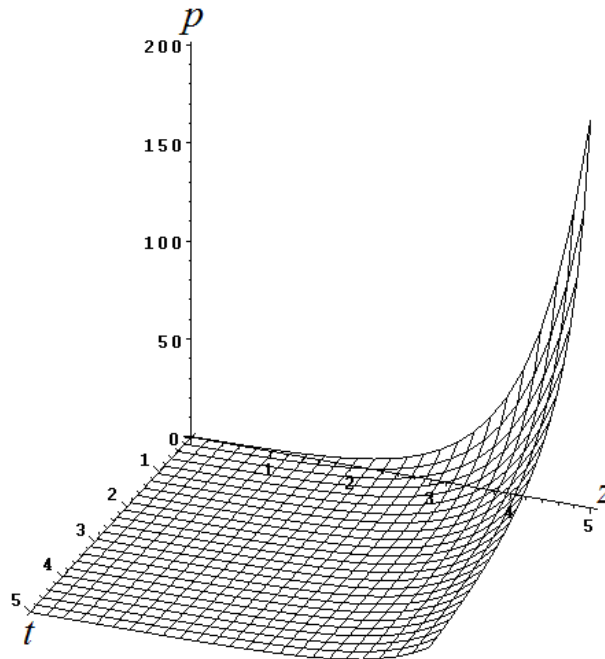


Рис. 2. Распределение давления на цилиндрической поверхности $r = 2$.

3.2. Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{2,2} \langle Y_2 + \lambda Y_3, Y_4 \rangle$.

Представление этого решения

$$p = \left(z^{\lambda-2} h(t) \right)^{\frac{1}{\beta-1}} U(\xi), \xi = \frac{r}{z}. \quad (6)$$

Функция $U(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(\xi^2 + 1) (U^{\beta-1} U')' + \left(\frac{1}{\xi} + 2\gamma\xi \right) U^{\beta-1} U' + \gamma(\gamma + 1) U^\beta = 0, \gamma = \frac{\beta(\lambda - 2)}{\beta - 1}. \quad (7)$$

При $\lambda = 2$ решение уравнения (7) имеет вид

$$U = \left(c_3 + c_4 \left(\sqrt{\xi^2 + 1} + \ln \frac{\xi}{1 + \sqrt{\xi^2 + 1}} \right) \right)^\beta.$$

Давление определяется по формуле

$$p = (h(t))^{\frac{1}{\beta-1}} \left(c_3 + c_4 \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z} + \ln \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} \right) \right)^\beta. \quad (8)$$

В каждый фиксированный момент времени во всех точках каждой конической поверхности $r = cz$ ($c = \text{const} > 0$) давление одинаково.

При $c_3 = 0, c_4 = 1, \beta = 2, h(t) = 2(2t + 1), r = 2, z > 0$ распределение давления показано на Рис. 3.

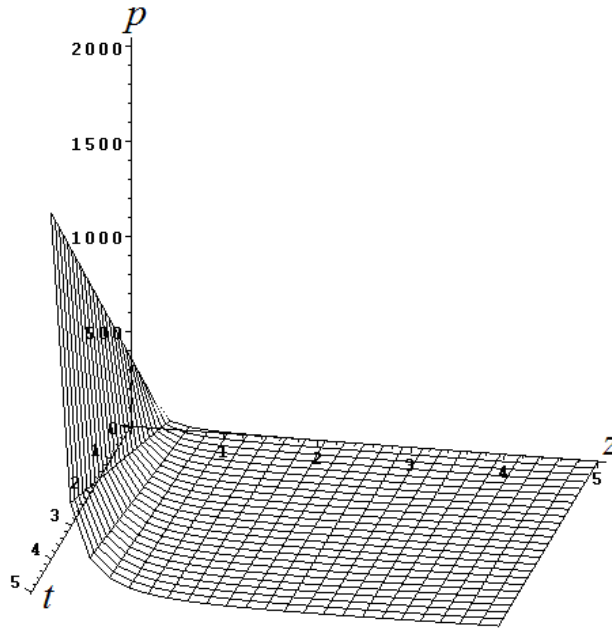


Рис. 3. Распределения давления для решения (8) при $r = 2$.

В данном случае давление монотонно возрастает со временем под воздействием внешнего источника и стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

При $\lambda \neq 2$ уравнение (7) с помощью новой неизвестной функции $W = U^\beta$ принимает вид

$$(\xi^2 + 1) W'' + \left(\frac{1}{\xi} + 2\gamma\xi \right) W' + \gamma(\gamma + 1) W = 0. \quad (9)$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$W' = \frac{1}{\xi^2 + 1} \left(V - \left(\frac{1}{\xi} + (2\gamma - 1)\xi \right) W \right), V' = - \left(\gamma^2 + 3\gamma - 2 + \frac{1}{\xi} \right) W \quad (10)$$

А именно: 1) для любого решения $(W(\xi), V(\xi))$ системы (10) функция $W(\xi)$ удовлетворяет уравнению (9), 2) обратно, для любого решения $W(\xi)$ уравнения (9) пара функций $(W(\xi), V(\xi) = (\xi^2 + 1)W'(\xi) + \left(\frac{1}{\xi} + 2(\gamma - 1)\xi\right)W)$ удовлетворяет системе (10).

Используем систему (10) для отыскания давления в пористой среде, если в начальный момент времени $t = t_0 \geq 0$ в фиксированной точке (r_0, z_0) заданы давление и его радиальная производная

$$p(t_0, r_0, z_0) = p_0 > 0, p_r(t_0, r_0, z_0) = p_1, r_0 > 0, z_0 > 0. \quad (11)$$

В этом случае начальные данные для системы (10) имеют вид

$$\begin{aligned} W(\xi_0) &= \left(z_0^{2-\lambda} h(t_0)\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} p_0^\beta, \xi_0 = \frac{r_0}{z_0}, \\ V(\xi_0) &= z_0^{\gamma-1} (h(t_0))^{\frac{\beta}{1-\beta}} p_0^{\beta-1} \left(\beta(r_0^2 + z_0^2)p_1 + \frac{1}{r_0}(2(\gamma-1)r_0^2 + z_0^2)p_0\right). \end{aligned} \quad (12)$$

В силу гладкости правых частей системы (10) решение задачи Коши (10), (12) существует и единственно в окрестности точки ξ_0 .

По формуле

$$p = \left(z^{\lambda-2} h(t)\right)^{\frac{1}{\beta-1}} W^{\frac{1}{\beta}}(\xi), \xi = \frac{r}{z}. \quad (13)$$

получаем единственное решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (11), для которого вдоль каждой конической поверхности $r = cz$ ($c = \text{const} > 0$) величина $(z^{\lambda-2} h(t))^{\frac{1}{1-\beta}} p(t, r, z)$ постоянна.

Например, при $t_0 = 0, \beta = \frac{3}{2}, \lambda = 1, r_0 = 1, z_0 = 1, p_0 = 16, p_1 = -1, h(t) = 2t + 1, z > 0$ задача Коши (10), (12) численно решена методом Рунге-Кутты-Фельберга [22] (с порядком точности 4). График функции $W = W(\xi)$ показан на Рис. 4.

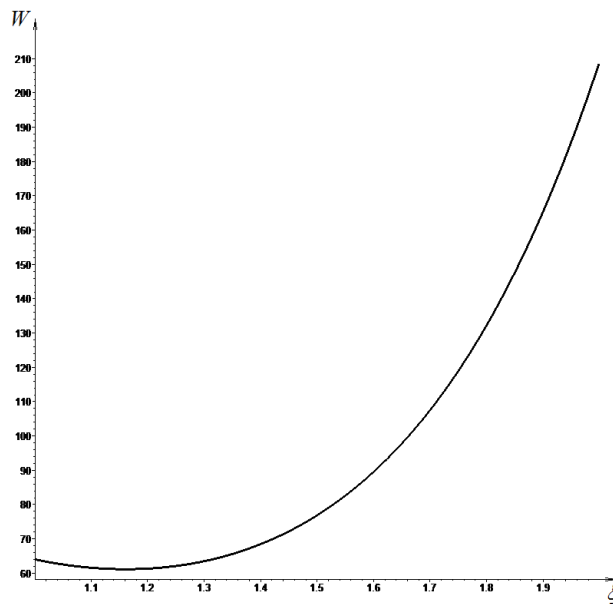


Рис. 4. График функции $W = W(\xi)$.

Из этого графика в силу формулы (13) следует, что давление монотонно возрастает со временем под воздействием внешнего источника и стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

3.3. Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{2.3} \langle Y_1 + Y_4, Y_2 + Y_3 \rangle$.

Представление этого решения

$$p = (rh(t))^{\frac{1}{\beta-1}} U(\xi), \xi = \frac{\int h(t) dt - z}{r}. \quad (14)$$

Функция $U(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(\xi^2 + 1) (U^{\beta-1} U')' - \frac{\beta+1}{\beta-1} \xi U^{\beta-1} U' - \frac{1}{\beta} U' + \frac{\beta}{(\beta-1)^2} U^\beta = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) эквивалентно системе

$$U' = U^{1-\beta} W, W' = \frac{1}{\xi^2 + 1} \left(\frac{1}{\beta} U^{1-\beta} W - \frac{\beta}{(\beta-1)^2} U^\beta + \frac{\beta+1}{\beta-1} \xi W \right). \quad (16)$$

Пусть в начальный момент $t = t_0 \geq 0$ времени в фиксированной точке с координатами $r = r_0 > 0, z = z_0$ задано давление и скорость его изменения вдоль оси Oz

$$p(t_0, r_0, z_0) = p_0 > 0, p_z(t_0, r_0, z_0) = p_2. \quad (17)$$

Начальные данные для системы (16) имеют вид

$$\begin{aligned} U(\xi_0) &= (r_0 h(t_0))^{\frac{1}{1-\beta}} p_0, \\ W(\xi_0) &= r_0^{\frac{1}{1-\beta}} (h(t_0))^{\frac{\beta}{1-\beta}} p_0^{\frac{1}{1-\beta}} p_2, \xi_0 = \frac{g(t_0) - z_0}{r_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу гладкости правых частей системы (16) решение задачи Коши (16), (18) существует и единственно в окрестности точки ξ_0 .

Применяя формулу (14), получаем единственное решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (17), для которого вдоль каждой траектории $z = \int h(t) dt - cr$ ($c = const$) величина $(rh(t))^{\frac{1}{1-\beta}} p(t, r, z)$ постоянна.

Например, при $t_0 = 0, \beta = 2, r_0 = 1, z_0 = 1, p_0 = 4, p_2 = 1, z > 0, h(t) = 2(t+1)$ задача Коши (16), (18) численно решена методом Рунге-Кутты-Фельберга [22] (с порядком точности 4). График функции $U(\xi)$ представлен на Рис. 5.

Из этого графика в силу формулы (14) следует, что давление монотонно возрастает со временем под воздействием внешнего источника и стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

3.4. Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{2,4} \langle Y_2, Y_3 \rangle$.

Это решение имеет вид

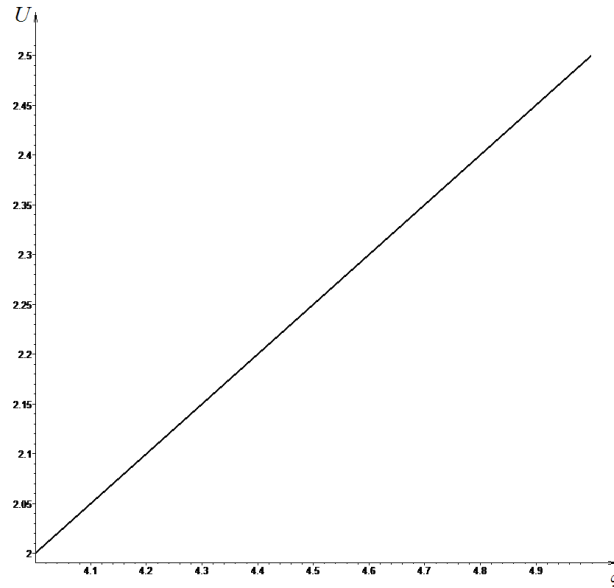
$$p = \left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} z^2 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} U(\xi), \xi = \frac{r}{z}, \quad (19)$$

где функция $U(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (\xi^2 + 1) (U^{\beta-1} U')' + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{2(2\beta-1)}{\beta-1} \xi \right) U^{\beta-1} U' - \\ - \frac{\beta(3\beta-13)}{\beta-1} U^\beta - \frac{1}{\beta(\beta-1)} U = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) эквивалентно системе

$$U' = U^{1-\beta} W, W' = \frac{1}{\xi^2 + 1} \left(\frac{1}{\beta} U^{1-\beta} W - \frac{\beta}{(\beta-1)^2} U^\beta + \frac{\beta+1}{\beta-1} \xi W \right). \quad (21)$$


Рис. 5. График функции $U(\xi)$.

Если в начальный момент времени $t = t_0 \geq 0$ в фиксированной точке с координатами $r = r_0 > 0, z = z_0 > 0$ давление и его радиальная производная заданы формулами (11), то начальные данные для системы (21) имеют вид

$$U(\xi_0) = \left(z_0^2 \frac{g'(t_0)}{g(t_0)} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} p_{0,W}(\xi_0) = z_0^{\frac{\beta+1}{1-\beta}} \left(\frac{h(t_0)}{\int h(t_0) dt_0} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} p_0^{\beta-1} p_1, \quad (22)$$

$$\xi_0 = \frac{r_0}{z_0}.$$

В силу гладкости правых частей системы (21) решение задачи Коши (21), (22) существует и является единственным в окрестности точки ξ_0 .

Применяя формулу (19) получаем единственное решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (11), для которого вдоль каждой конической поверхности $r = cz$ ($c = \text{const} > 0$) величина $\left(\frac{h(t)}{\int h(t) dt} z^2 \right)^{\frac{1}{\beta-1}} p(t, r, z)$ постоянна.

Например, при $t_0 = 0, \alpha = 1.8, r_0 = 1, z_0 = 1, p_0 = 4, p_1 = 1, z > 0, h(t) = \frac{1}{t^2 + 2t + 2}$ задача Коши (21), (22) численно решена методом Рунге-Кутты-Фельберга [22] (с порядком точности 4). График функции $U(\xi)$ представлен на Рис. 6.

Из этого графика в силу формулы (19) следует, что давление монотонно убывает со временем под воздействием внешнего поглощения и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе методами группового (симметричного) анализа исследована обобщенная осесимметричная модель движения жидкости или газа в пористой среде со степенной нелинейностью при наличии нестационарного внешнего источника или поглощения. Найденная основная группа Ли преобразований дифференциального уравнения, задающего эту модель, позволила получить вид всех ее инвариантных подмоделей, которые задаются инвариантными решениями указанного уравнения. Их вид приведен в таблицах 1 и 2.

Получены все инвариантные решения ранга 1. Это решения (5) и (8), найденные в явном виде, и решения (6), ((14) и (19), отыскание которых сведено к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (10, (16) и (21) соответственно.

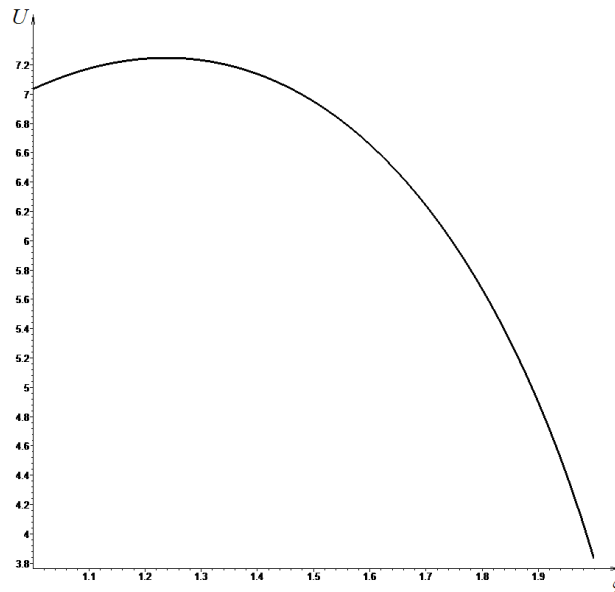


Рис. 6. График функции $U(\xi)$.

Для решений (5) и (8) при некоторых конкретных значениях, входящих в них параметров, построены графики распределения давления. Эти графики приведены на рисунках 1, 2, 3. Указан физический смысл приведенных решений.

Решения (10), (16) и (21) были использованы для исследования физически содержательных краевых задач, для которых в начальный момент времени в фиксированной точке среды задается давление и либо скорость его изменения вдоль оси симметрии, либо радиальная скорость его изменения. Эти краевые задачи решаются численно при некоторых конкретных значениях, входящих в них параметров. Получены графики функций, определяющих эти решения. Эти графики приведены на рисунках 4, 5, 6.

Значимость найденных решений заключается в следующем:

1. Они описывают конкретные физические процессы.
2. Эти решения могут быть использованы в качестве тестов в численных расчетах при изучении движения жидкости или газа в пористой среде при наличии нестационарного внешнего источника или поглощения.
3. Найденные в работе решения зависят от 5 произвольных числовых параметров и одной произвольной функции, которые определяются эмпирически в зависимости от изучаемого физического процесса. Это позволяет использовать подмодели, определяемые этими решениями, для исследования других физически содержательных краевых задач, отличных от рассмотренных в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darcy, H. Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. — Dalmont, Paris, 1856.
2. Darcy, H. Recherches Experimentales Relatives au Mouvement de l'Eau dans les Tuyaux / H. Darcy, Malle Bachelier, Paris, 1857.
3. Darcy, H. Experimental studies of relatives in motion. l'eau dans les tuyaux / H. Darcy // in Me'moires Presente's par Divers Savants a' l'Academie des Sciences de l'Institut Imperial de France. — 1858. — Vol. 15. — P. 14–401.
4. Dupuis, J. Traite Theorique et Pratique de la Conduite et de la Distribution des Eaux / J. Dupuis. — Carilian-Goeury et Dalmont, Paris, 1854.
5. Dupuis, J. Mouvement de l'eau a travers le terrains permeables / J. Dupuis // C. R. Hebd.

Sessions acad. Sciences. — 1857. — Vol. 45. — P. 92–96.

6. Dupuis, J. Etudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Decouverts et a Travers les Terrains Permeables J. Dupuis. — Dunot, Paris, 1863.

7. Лейбензон, Л. С. Собрание трудов : Т. 2. Подземная гидрогазодинамика / Л. С. Лейбензон. — М. : Изд. АН СССР, 1953. — 544 с.

8. Лейбензон, Л. С. Собрание трудов : Т.4. Нефтепромысловая механика / Л. С. Лейбензон. — М. : Акад. наук СССР, 1955. — 678 с.

9. Barenblatt, G. I. A new free boundary problem for unsteady flows in porous media / G. I. Barenblatt, J. L. V'azquez // European J. Appl. Math. — 1998. — Vol. 9, No. 1, P. 37–54.

10. Otto, F. The geometry of dissipative evolution equations: The porous medium equation / F. Otto // Commun. Partial Differ. Equations. — 2001. — Vol. 26, no. 1–2. — P. 101–174.

11. V'azquez J. L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory / J. L. V'azquez. — Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press. Oxford, 2007.

12. Kienzler, C. Flatness implies smoothness for solutions of the porous medium equation / C. Kienzler, H. Koch, J. L. V'azquez. — preprint arXiv:1609.09048.v1

13. Casas, P. S. Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity / P. S. Casas, R. Quintanilla // Mech. Res. Commun. — 2005. — Vol. 32. — P. 652–658.

14. Chirkunov, Yu. A. Nonlinear three-dimensional diffusion models of porous medium in the presence of non-stationary source or absorption and some exact solutions / Yu. A. Chirkunov, Yu. L. Skolubovich // Int. J. Non-Linear Mech. — 2018. — Vol. 106. — P. 29–37.

15. Chirkunov, Yu. A. Self-similar waves in a three-dimensional porous medium in the presence of non-stationary singular source or absorption / Yu. A. Chirkunov // Int. J. Non-Linear Mech. — 2019. — Vol. 117. — P. 103205.

16. Chirkunov, Yu. A. Submodels of 2-d model of the motion of fluid or gas in a porous medium with an external non-stationary source or absorption / Yu. A. Chirkunov, M. Yu. Chirkunov // Int. J. Non-Linear Mech. — 2024. — Vol. 163. — P. 104759.

17. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 399 с.

18. Olver, P.J. Application of Lie groups to differential equations / P. J. Olver. — New York : Springer-Verlag, 1986.

19. Чиркунов, Ю. А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений / Ю. А. Чиркунов. — Новосибирск : НГУЭиУ, 2007. — 362 с.

20. Чиркунов, Ю. А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.

21. Chirkunov, Yu. A. Generalized Equivalence Transformations and group classification of systems of differential equations / Yu. A. Chirkunov // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 2012. — Vol. 53, No. 2. — P. 147–155.

22. Butcher, J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J. C. Butcher. — New York : John Wiley & Sons, 2016.

REFERENCES

1. Darcy H. Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris, 1856.
2. Darcy H. Recherches Experimentales Relatives au Mouvement de l'Eau dans les Tuyaux, Malle Bachelier, Paris, 1857.
3. Darcy H. Experimental studies of relatives in motion. l'eau dans les tuyaux, in Me'moires Presente's par Divers Savants a' l'Academie des Sciences de l'Institut Imperial de France, Paris, 1858, vol. 15, pp. 14–401.

4. Dupuis J. Traite Theorique et Pratique de la Conduite et de la Distribution des Eaux, Carilian-Goeury et Dalmont, Paris, 1854.
5. Dupuis J. Mouvement de l'eau a travers le terrains permeables, C. R. Hebd. Sessions acad. Sciences, 1857, vol. 45, pp. 92–96.
6. Dupuis J. Etudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Decouverts et a Travers les Terrains Permeables, Dunot, Paris, 1863.
7. Leibenzon L.S. Collected Works: Vol. 2. Underground Hydrogasdynamics. [Lejbenzon L.S. Sobranie trudov: T. 2. Podzemnaya gidrogazodinamika]. Moscow, 1953, 544 p.
8. Leibenzon L.S. Collected Works: Vol. 4. Oilfield Mechanics.
9. Barenblatt G.I., V'azquez J.L. A new free boundary problem for unsteady flows in porous media, European J. Appl. Math., 1998, vol. 9, no. 1, pp. 37–54.
10. Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: The porous medium equation. Commun. Partial Differ. Equations, 2001, vol. 26, no. 1–2, pp. 101–174.
11. V'azquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press. Oxford, 2007.
12. Kienzler C., Koch H., V'azquez J.L. Flatness implies smoothness for solutions of the porous medium equation. preprint arXiv:1609.09048.v1.
13. Casas P.S., Quintanilla R. Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity, Mech. Res. Commun., 2005, vol. 32, pp. 652–658.
14. Chirkunov Yu.A., Skolubovich Yu.L. Nonlinear three-dimensional diffusion models of porous medium in the presence of non-stationary source or absorption and some exact solutions. Int. J. Non-Linear Mech., 2018, vol. 106, pp. 29–37.
15. Chirkunov Yu.A. Self-similar waves in a three-dimensional porous medium in the presence of non-stationary singular source or absorption. Int. J. Non-Linear Mech., 2019, vol. 117, p. 103205.
16. Chirkunov Yu.A., Chirkunov M.Yu. Submodels of 2-d model of the motion of fluid or gas in a porous medium with an external non-stationary source or absorption. Int. J. Non-Linear Mech., 2024, vol. 163, p. 104759.
17. Ovsiyannikov L.V. Group analysis of differential equations. [Ovsiyannikov L.V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij]. Moscow: Nauka, 1978, 399 p.
18. Olver P. J. Application of Lie groups to differential equations. New York: Springer-Verlag, 1986.
19. Chirkunov Yu.A. Group analysis of linear and quasilinear differential equations. [Chirkunov YU.A. Gruppovoj analiz linejnyh i kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij]. Novosibirsk: NGUEiU, 2007, 362 p.
20. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics. [Chirkunov YU.A., Khabirov S. V. Elementy simmetrijnogo analiza differencial'nyh uravnenij mekhaniki sploshnoj sredy]. Novosibirsk: NSTU, 2012, 659 p.
21. Chirkunov Yu.A. Generalized Equivalence Transformations and group classification of systems of differential equations. J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2012. — vol. 53, no. 2, pp. 147–155.
22. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, 2016.

Чиркунов Юрий Александрович, д. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой высшей математики, зав. и ведущий научный сотрудник НИЛ "Математические модели механики сплошной среды" ФГБОУВО "Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия
E-mail: chr101@mail.ru

*Chirkunov Yury Alexandrovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Head. and Leading Researcher the Scientific Research Laboratory "Mathematical Models of Continuum Mechanics" FGBOUVO "Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)", Novosibirsk, Russia
E-mail: chr101@mail.ru*

Чиркунов Михаил Юрьевич, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУВО "Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)", Новосибирск, Россия
E-mail: mihail0807@mail.ru

*Chirkunov Mikhail Yuryevich, graduate student of the Department of Higher Mathematics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)", Novosibirsk, Russia
E-mail: mihail0807@mail.ru*