УДК 517.927.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЯ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Э. Ш. Шамов, Т. И. Ибавов

Дагестанский государственный технический университет

Поступила в редакцию 14.04.2025 г.

Аннотация. В работе исследовано существование положительного решения для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля и нелокальными граничными условиями. Для преобразования исходного уравнения в интегральное уравнение построена функция Грина и получены достаточные условия существования функции Грина. Доказана теорема о существовании, по крайней мере, двух положительных решений задачи. Приведен пример, показывающий существование двух положительных решений и для наглядности построены графики приближений.

Ключевые слова: дробная производная, положительное решение, краевая задача, интегральное уравнение, последовательные приближения, неподвижная точка.

ON THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR A NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE FRACTIONAL RIEMANN-LIUVILLE DERIVATIVE AND THE NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

E. Sh. Shamov, T. I. Ibavov

Abstract. In the paper, we investigate the existence of a positive solution for a non-linear differential equation with fractional Riemann-Liuville derivative and non-linear boundary conditions. In order to convert the original equation into an integral equation, a Green function has been constructed and sufficient conditions of existence of the Green function have been obtained. The theorem on the existence of at least two positive solutions to the problem has been proved. An example is given, showing the existence of two positive solutions and for illustration the graphs of approximations are constructed.

Keywords: fractional derivative, positive solution, edge problem, integral equation, consecutive approximations, fixed point.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для описания различных нелокальных процессов в физике, химии, биологии используют дифференциальные уравнения с производными дробного порядка [1, 2, 3, 4]. Этим и обусловлено развитие теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Большинство работ в этой области связано с исследованием краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто [5, 6, 7, 8]. В последнее время появляются много работ, посвященные существованию положительного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка.

В работе [9] исследовано существование положительного решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $1 < \alpha \leqslant 2$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$- непрерывная функция.

В работе [10] исследована краевая задача с дробной производной Римана-Лиувилля вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) + a(t)f(u) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0,\ u'(1) = 0,$$

где $1 < \alpha < 2$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$- непрерывная функция.

В работе [11] исследована краевая задача с дробной производной Римана-Лиувилля вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) + a(t)f(t,u,u') = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = \ u'(0) = u^{//}(0) = u^{//}(1) = 0,$$

где $3 < \alpha \leqslant 4$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная функция.

Работы [14–17] также посвящены исследованию существования положительного решения краевых задач для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной.

Но при этом, авторы упомянутых работ, рассматривают краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля с локальными граничными условиями, что думаем, является ошибочным подходом. Локальные краевые условия, в этом случае, однозначно не определяют значения постоянных коэффициентов в решении при построении функции Грина.

В работе исследовано существование двух положительных решений краевой задачи для нелинейного уравнения с производной дробного порядка Римана-Лиувилля и нелокальными граничными условиями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = 0,\ k = 2,3,...,n, \quad D_{0t}^{\beta}u(1) = 0, \tag{2}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u(t)$ — производная дробного порядка Римана-Лиувилля, $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n-2 < \beta \leqslant n-1$, $0 < \alpha - \beta - 1$, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная функция.

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Построим сначала функцию Грина, для преобразования исходной задачи (1), (2) в интегральное уравнение.

Лемма 1. [18] Пусть $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, $\alpha > 0$ и $\alpha \in C(0,1) \cap L(0,1)$, тогда имеет место равенство:

$$I_{0t}^{\alpha} D_{0t}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_{n-1} t^{\alpha-n}, \tag{3}$$

где $C_i \in R, i = 1,2,...,n$.

Рассмотрим краевую задачу:

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) + p(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = 0,\ k = 2,3,...,n, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\beta} u(t) = 0, \tag{5}$$

Воспользовавшись (3), решение задачи (4), (5) при $n - 1 < \alpha \leqslant n$ можно представить в виде:

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds. \tag{6}$$

Лемма 2. Пусть $p(t) \in C[0,1]$ и $1 < \alpha \leqslant 2$, тогда решение задачи

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) + p(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = 0,\ k = 2,3,...,n, \quad D_{0t}^{\beta} u(1) = 0, \tag{8}$$

можно представить в виде:

$$u(t) = \int_0^t G(t,s) p(s) ds, \tag{9}$$

где

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1},\ 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Из левых граничных условий получим:

$$C_2 = C_3 = ... = C_n = 0.$$

Имеем:

$$D_{0t}^{\beta} u(t) = C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} p(s) ds.$$

Тогда из правого граничного условия получим:

$$C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} p(s) ds = 0,$$

то есть $C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} p(s) ds$. Следовательно, равенство (6) примет вид:

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} p(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} p(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left[t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] p(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} p(s)ds =$$

$$= \int\limits_0^t G(t,s)p(s)ds.$$

Лемма 3. Функция Грина $G(t,s)$, определяемое равенством (10), удовлетворяет следующим условиям:

Функция $G(t,s)$ непрерывна на множестве $[0,1] \times [0,1]$;

$$G(t,s) > 0 \text{ для любых } \quad s,t \in (0,1).$$

Доказательство. Условие (1) легко проверить. Докажем условие 2).

Введем следующие обозначения:

$$g_1(t,s) = t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,$$

$$g_2(t,s) = t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1},\ 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1.$$

Покажем выполнение неравенства $g_1(t,s) > 0$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$. Пусть

$$h(t,s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\alpha-1},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \quad \text{тогда} \quad g_1(t,s) = \frac{t^{\alpha-1}h(t,s)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Так как

$$\frac{\partial h(t,s)}{\partial t} = -(\alpha-1) \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\alpha-2} \frac{s}{t^2} \leqslant 0,$$

то $h(t,s)$ убывает на отрезке $[s,1]$ относительно переменной t. Имеем:

$$h(1,s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1} > 0, 0 \leqslant s \leqslant t.$$

В случае, когда $\alpha - \beta - 1 = 0$, то $h(1,s) = 1 - (1-s)^{\alpha-1} > 0$, $0 < s \leqslant t$, а когда $\alpha - \beta - 1 > 0$, то $h(1,0) = 0$, $(1-s)^{\beta} \geqslant 0$. Таким образом,

$$h(1,s) = (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1} = (1-s)^{\alpha-\beta-1}\left[1 - (1-s)^{\beta}\right] \geqslant (1-s)^{\alpha-\beta-1} > 0$$

Не трудно заметить, что $\min\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} h(1,s) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant t$ и $h'(1,0) = \beta > 0$ для всех $s \in (0,t]$. Таким образом, $g_1(t,s) > 0$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$. Аналогично можно показать, что $g_2(t,s) = t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} > 0$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$. Следовательно, $G(t,s) > 0$ для любых $s,t \in (0,1)$. Лемма доказана.

Лемма 4. Функция Грина, определяемая равенством (10), удовлетворяет следующим условиям:

$$0 < G(t,s) \leqslant \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t,s \in [0,1], \tag{11}$$

$$q(t) \cdot g(s) \leqslant G(t,s) \leqslant g(s), \quad t,s \in [0,1], \tag{12}$$

где $q(t) = \alpha \cdot t^{\alpha-1}(1-t)$, $g(s) = \frac{s \cdot (1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

Доказательство. Доказательство условия (11) следует из Леммы 3 и равенства (10). Докажем условие (12).

$$G(t,s) = \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant \frac{t^{\alpha-1}\left[(1-s)^{\alpha-\beta-1} - \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}\left[1-(1-s)^{\beta}\right]}{\Gamma(\alpha)} \leqslant \frac{s\cdot(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} = g(s).$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь исследуем задачу (1), (2). Функция $u(t)$ будет решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда функция $u(t)$ будет решением нелинейного интегрального уравнения:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(t,u(t))dt,$$

где $t \in [0,1]$, $u \in C[0,1]$, $G(t,s)$ — функция Грина, задаваемая равенством (10). Предположим, что функции $f(t,u(t))$, $h(t)$ удовлетворяют условиям:

$$1)\ f : [0,1]\times[0,\infty) \to [0,\infty) \text{ непрерывная функция и } f(t,0)\neq 0 \text{ на } [0,1]; \tag{13}$$

$$2)\ q : (0,1) \to [0,\infty) \text{ непрерывная функция и } 0 < \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}q(s)ds < \infty. \tag{14}$$

Рассмотрим вещественное Банахово пространство $C[0,1]$ с нормой $\|u\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$. Зададим в этом пространстве конус K в виде:

$$\mathrm{K} = \{u \in C[0,1] : u(t) \geqslant 0, u(t) \geqslant q(t)\,\|u\|\,, t \in [0,1]\}.$$

А оператор $T : C[0,1] \to C[0,1]$ определим следующим образом:

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s)ds,\ t \in [0,1],\ u \in C[0,1]. \tag{15}$$

Существование положительного решения задачи связано с существованием неподвижной точки оператора T в конусе K.

При этом оператор T является полным непрерывным и $T(K) \subseteq K$. Это легко можно показать, применяя теорему Арцела-Асколи ввиду равномерной непрерывности и ограниченности оператора T. Покажем, что $T(K) \subseteq K$. Для любого $u \in K$ и, воспользовавшись условиями (12), (13) и (14), получим:

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u(s)ds \leqslant \int_0^1 g(s)q(s)f(s,u(s)ds,\ t \in [0,1]\ . \tag{16}$$

Из неравенства (16) следует, что

$$\|Tu\| \leqslant \int_0^1 g(s)q(s)f(s,u(s)ds\ . \tag{17}$$

Таким образом, на основании неравенства (17) можно утверждать, что $Tu \in K$. Введем следующее обозначение:

$$Y = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}q(s)ds\right)^{-1}\ . \tag{18}$$

На основании условия (14) можно утверждать, что $Y > 0$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (12), (13) и пусть существует $\gamma > 0$, такое что

$$f(t,x) \leqslant f(t,z) \leqslant Y\gamma,\ 0 \leqslant x \leqslant z \leqslant \gamma,\ t \in [0,1], \tag{19}$$

где оператор Y определяется равенством (18). Тогда задача (1), (2) имеет по крайней мере два положительных решения $\overline{u_1}(t)$ и $\overline{u_2}(t)$, которые удовлетворяют условиям $0 < \|\overline{u_1}(t)\| \leqslant \|\overline{u_2}(t)\| \leqslant \gamma$. При этом, последовательные приближения $u_1^{k+1} = Tu_1^k$, $u_2^{k+1} = Tu_2^k$, $k = 0,1,2,\ldots.$, сходятся по норме в пространстве C к положительным решениям $u_1(t)$ и $u_2(t)$ соответственно, где $u_1^0(t) = 0$ и $u_2^0(t) = \gamma \cdot t^{\alpha-1}$, $t \in [0,1]$, а также, имеют место следующие неравенства:

$$u_1^0(t) \leqslant u_1^2(t) \leqslant \ldots \leqslant u_1^k(t) \leqslant \ldots \leqslant \overline{u_1}(t) \leqslant \overline{u_2}(t) \leqslant \ldots \leqslant u_2^k(t) \leqslant \ldots \leqslant u_2^1(t) \leqslant u_2^0(t),\ t \in [0,1].$$

Доказательство. Пусть $K_\gamma = \{u \in K : \|u\| \leqslant \gamma\}$. Тогда $T(K_\gamma) \subseteq K_\gamma$. На самом деле, если $u \in K_\gamma$, $0 \leqslant u(s) \leqslant \|u\| \leqslant \gamma$, $s \in [0,1]$. Тогда на основании (11) и (19) получим:

$$0 \leqslant (Tu)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)h(s)f(s,u(s))ds \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} q(s) f(s,\gamma) ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Y\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} q(s) ds = \gamma,\ t \in [0,1]. \tag{20}$$

Из (20) следует, что $\|Tu\| \leqslant \gamma$ и, следовательно, $T(K_\gamma) \subseteq K_\gamma$.

Покажем теперь, что последовательные приближения $\{u_1^k\}$образуют монотонно возрастающую последовательность, которая стремится в пределе к $\overline{u}_1 \in K_\gamma$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k - v^*\| = 0$, и $\overline{u_1}(t) \in K_\gamma$- положительное решение задачи (1), (2). Имеем $Tu_1^0 = T0 = 0$, $u_1^0 \in K_\gamma$. Из полной непрерывности оператора T следует, что множество последовательных приближений $\{u_1^k\}_{k=0}^\infty$ образует секвенциально компактное множество, то есть из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\overline{u_1}(t)$. Так как, $u_1^1 = Tu_1^0 = T0 \in K_\gamma$, то

$$\gamma \geqslant u_1^1(t) = (Tu_1^0)(t) = (T0)(t) = u_1^0(t),\ t \in [0,1].$$

Из (19) следует, что оператор T является неубывающим, следовательно,

$$u_1^2(t) = (Tu_1^1)(t) \geqslant (Tu_1^0)(t) = u_1^1(t),\ t \in [0,1].$$

Пусть для произвольного приближения $u_1^k \in K_\gamma$ выполняется неравенство $u_1^k(t) \geqslant u_1^{k-1}(t)$, $t \in [0,1]$. Тогда:

$$u_1^{k+1}(t) = (Tu_1^k)(t) \geqslant (Tu_1^{k-1})(t) = u_1^k(t),\ t \in [0,1],\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Из приведенных выше рассуждений, следует существование решения $\overline{u_1}(t) \in K_\gamma$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_1^k - \overline{u_1}\| = 0$. В силу непрерывности оператора T и уравнения $u_1^{k+1} = Tu_1^k$, получим $T\overline{u_1} = \overline{u_1}$. Так как ноль не является решением задачи (1), (2), то $\|\overline{u_1}\| > 0$.

Из определения конуса имеем, что $\overline{u_1}(t) \geqslant q(t) \|\overline{u_1}(t)\| > 0$, $t \in (0,1)$. Таким образом, $\overline{u_1}(t)$-положительное решение задачи (1), (2).

Последовательность приближений $\{u_2^k\}$образует монотонно убывающую последовательность и существует $\overline{u_2}(t) \in K_\gamma$ такое, что$\lim\limits_{k\to\infty} \|u_2^k - \overline{u_2}\| = 0$, и $\overline{u_2}(t) \in K_\gamma$- положительное решение задачи (1), (2). Нетрудно заметить, что $u_2^0 \in K_\gamma$. Так как $T : K_\gamma \to K_\gamma$, то

$u_2^k \in T(K_\gamma) \subseteq K_\gamma$, $k = 1,2,\ldots$. Из полной непрерывности оператора T следует, что множество последовательных приближений $\{u_2^k\}_{k=0}^\infty$ образует секвенциально компактное множество. Имеем $u_2^1 = Tu_2^0 \in K_\gamma$. Тогда в силу (11) получим:

$$(Tu_2^0)(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u_2^0(s))ds \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}q(s)f(s,u_2^0(s)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{\alpha-1}Y\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}q(s)ds = \gamma\cdot t^{\alpha-1} = u_2^0(t), \quad t\in[0,1].$$

Следовательно, $u_2^1(t) \leqslant u_2^0(t)$. Принимая во внимание это неравенство и, воспользовавшись неравенством (19) получим:

$$u_2^2(t) = (Tu_2^1)(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u_2^1(s))ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u_2^0(s))ds = (Tu_2^0)(t) = u_2^1(t), \quad t\in[0,1].$$

Продолжая этот процесс, получим $u_2^{k+1}(t) \leqslant u_2^k(t)$, $t \in [0,1]$, $k = 1,2,\ldots$. Из приведенных рассуждений, следует существование решения $\overline{u_2}(t) \in K_\gamma$, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_2^k - \overline{u_2}\| = 0$. В силу непрерывности оператора T можно утверждать, что$\overline{u_2}(t)$ является положительным решением задачи (1), (2). Так как ноль не является решением задачи (1), (2), то $\|\overline{u_2}(t)\| > 0$.

Воспользовавшись неравенством $u_1^0(t) \leqslant u_2^0(t)$, $t\in[0,1]$, получим:

$$u_1^1(t) = (Tu_1^0)(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u_1^0(s))ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,u_2^0(s))ds = (Tu_2^0)(t) = u_2^1(t), \quad t\in[0,1].$$

Тогда на основании метода индукции можно утверждать, что $u_1^k(t) \leqslant u_2^k(t)$, $t \in [0,1]$, $k = 1,2,\ldots$. Таким образом, теорема доказана.

Возможно, положительные решения совпадать, то есть $\overline{u_1}(t) = \overline{u_2}(t)$. Тогда задача (1), (2) имеет одно положительное решение в K_γ.

Пусть выполнены условия (13) и (14) и пусть функция $f(t,x)$ неубывающая по переменной x для каждого $t\in[0,1]$ и имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,x)}{x} < Y$, тогда задача (1), (2) имеет не менее двух положительных решений.

4. ПРИМЕРЫ

В качестве примера, рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_{0t}^\alpha u(t) + \frac{1}{4}u^2 + t + 1 = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(t) = 0,\ k = 2,3, \quad \lim_{t\to 1} D_{0t}^{\beta}u(t) = 0.$$

Возьмем $\alpha = 3.5$, $q(t) \equiv 1$, $f(t,u) = \frac{1}{4}u^2 + t + 1$, $\gamma = 4$, $\beta = 2.5$ Тогда

$$Y = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}q(s)ds\right)^{-1} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8},$$

$$f(t,x) \leqslant f(t,2) \leqslant f(1,2) = 3 < \frac{15\sqrt{\pi}}{2}.$$

Построим последовательность приближений в следующем виде:

$$u_1^0(t) = 0,$$

$$u_1^{k+1}(t) = \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}\left(\left(u_1^k(s)\right)^2 + 4s + 4\right)ds -$$

$$-\frac{2}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\left(u_1^k(s)\right)^2 + 4s + 4\right)ds, \quad t \in [0,1], \quad k = 1,2,\ldots.$$

и

$$u_2^0(t) = 4t^{5/2},$$

$$u_2^{k+1}(t) = \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1}\left(\left(u_2^k(s)\right)^2 + 4s + 4\right)ds -$$

$$-\frac{2}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\left(u_2^k(s)\right)^2 + 4s + 4\right)ds, \quad t \in [0,1], \quad k = 1,2,\ldots.$$

Найдем последовательные приближения:

$$u_1^1(t) = \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (4s+4)ds - \frac{2}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (t-s)^{5/2}(4s+4)ds =$$

$$= \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[6 - \frac{16}{63}t^2 - \frac{8}{7}t\right].$$

$$u_1^2(t) = \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 \left[\frac{4}{225\pi}\left(\frac{36}{3969}s^6 + \frac{256}{441}s^5 - \frac{256}{147}s^4 - \frac{96}{7}s^3 + 36s^2\right) + 4s + 4\right]ds -$$

$$-\frac{2}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-s)^{5/2}\left[\frac{4}{225\pi}\left(\frac{36}{3969}s^6 + \frac{256}{441}s^5 - \frac{256}{147}s^4 - \frac{96}{7}s^3 + 36s^2\right) + 4s + 4\right]ds =$$

$$= \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[\frac{21858053}{3614641} + \frac{471}{4346100922}t^7 + \frac{8700}{792220039}t^6 - \frac{9943}{184747552}t^5 -\right.$$

$$\left.- \frac{32807}{39670811}t^4 + \frac{32268}{6860491}t^3 + \frac{16}{63}t^2 + \frac{2}{7}t\right].$$

$$u_2^1(t) = \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 \left(16s^5 + 4s + 4\right)ds - \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-s)^{5/2}\left(16s^5 + 4s + 4\right)ds =$$

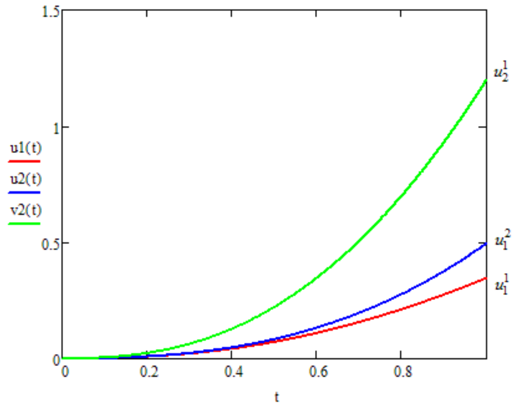

Рис. 1.

$$= \frac{2t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[\frac{26}{3} - \frac{2048}{153153}t^6 - \frac{16}{63}t^2 - \frac{8}{7}t\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Издательство “Артишок”, 2008. — 512 с.

2. Beybalaev, V. D. Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition / V. D. Beybalaev, A. A. Aliverdiev, J. Hristov // Fractal Fractional. — 2023. — V. 7(10), №. 770.

3. Hristov, J. Constitutive fractional modeling / J. Hristov // In: Contemporary Mathematics. Mathematical Modelling: Principle and Theory — 2023. — V. 786. — P. 37–140.

4. Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations / V. D. Beybalaev [et al.] // Fractal and Fractional. — 2023. — V. 7(3), № 265.

5. Miller, K. S. Fractional differential equations / K. S. Miller // J. Fract. Calc. — 1993. — V. 3. — P. 49–57.

6. Nakhushev, A. M. The Sturm–Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms / A. M. Nakhushev // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1977. — V. 234. — P.308–311.

7. Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering / I. Podlubny. — New York : Academic Press, 1999.

8. Podlubny, I. The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, Inst / I. Podlubny // Expe. Phys., Slov. Acad. Sci., UEF-02-94, Kosice, 1994.

9. Bai, Z.B. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation / Z. B. Bai, H. S. Lü // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — V. 311. — P. 495–505.

10. Kaufmann, E. R. Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation / E. R. Kaufmann, E. Mboumi // Electron J. Qual. Theory Diff. Equ. — 2008. — № 3. — P. 1–11.

11. Bai, C. Z. Triple positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation / C. Z. Bai // Electron J. Qual. Theory Diff. Equ. — 2008. — № 24. — P. 1–10.

12. Yuan, C. J. Two positive solutions for (n − 1, 1)-type semipositone integral boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations / C. J. Yuan // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2012. — № 17. — P. 930–942.

13. Zhai, C. B. Mixed monotone operator methods for the existence and uniqueness of positive solutions to Riemann-Liouville fractional differential equation boundary value problems / C. B. Zhai, M. R. Hao // Bound. Value Probl. — 2013. — Article ID 85.

14. Zhang, S. Q. The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation / S. Q. Zhang // Comput. Math. Appl. — 2010. — № 59. — P. 1300-1309.

15. Zhang, X. G. Existence and uniqueness of positive solutions for higher order nonlocal fractional differential equations / X. G. Zhang, Y. F. Han // Appl. Math. Lett. — 2012. — № 25. — P. 555–560.

16. Zhang, X. G. Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term / X. G. Zhang, L. S. Liu, Y. H. Wu // Math. Comput. Model. — 2012. — № 55. — P. 1263–1274.

17. The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations / X. G. Zhang, L. S. Liu, Y. H. Wu, Y. N. Lu // Appl. Math. Comput. — 2013. — № 219. — P. 4680–4691.

18. Li, C. F. Existence of positive solutions of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equations / C. F. Li, X. N. Luo, Y. Zhou // Computers and Mathematics with Applications. — 2010. — V. 59. — P. 1363–1375.

REFERENCES

1. Uchaikin V.V. Method of fractional derivatives. [Uchajkin V.V. Metod drobnyh proizvodnyh]. Ulyanovsk: Artichoke Publishing House, 2008, 512 p.

2. Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A., Hristov J. Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition. Fractal Fractional, 2023, vol. 7(10), no. 770.

3. Hristov J. Constitutive fractional modeling, In: Contemporary Mathematics. Mathematical Modelling: Principle and Theory, 2023, vol. 786, pp. 37–140.

4. Beybalaev V.D. [et al.] Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations. Fractal and Fractional, 2023, vol. 7(3), no. 265.

5. Miller K.S. Fractional differential equations. J. Fract. Calc., 1993, vol. 3, pp. 49–57.

6. Nakhushev A.M. The Sturm–Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1977, vol. 234, pp. 308–311.

7. Podlubny I. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering. New York, Academic Press, 1999.

8. Podlubny I. The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, Inst. Expe. Phys., Slov. Acad. Sci., UEF-02-94, Kosice, 1994.

9. Bai Z.B., Lü H.S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl., 2005, vol. 311, pp. 495–505.

10. Kaufmann E.R., Mboumi E. Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation. Electron J. Qual. Theory Diff. Equ., 2008, no. 3, pp. 1–11.

11. Bai C.Z. Triple positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ., 2008, no. 24, pp. 1–10.

12. Yuan C.J. Two positive solutions for (n – 1, 1)-type semipositone integral boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2012, no. 17, pp. 930–942.

13. Zhai C.B., Hao M.R. Mixed monotone operator methods for the existence and uniqueness of positive solutions to Riemann-Liouville fractional differential equation boundary value problems. Bound. Value Probl., 2013, Article ID 85.

14. Zhang S.Q. The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation. Comput. Math. Appl., 2010, no. 59, pp. 1300–1309.

15. Zhang X.G., Han Y.F. Existence and uniqueness of positive solutions for higher order nonlocal fractional differential equations. Appl. Math. Lett., 2012, no. 25, pp. 555–560.

16. Zhang X.G., Liu L.S., Wu Y.H. Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term. Math. Comput. Model., 2012, no. 55, pp. 1263–1274.

17. Zhang X.G., Liu L.S., Wu Y.H., Lu Y.N. The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations. Appl. Math. Comput., 2013, no. 219, pp. 4680–4691.

18. Li C.F., Luo X.N., Zhou Y. Existence of positive solutions of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications, 2010, vol. 59, pp. 1363–1375.

Шамов Э.Ш., Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Россия
E-mail: Shamov1978@yandex.ru

Shamov E. Sh., Dagestan State Technical Univercity, Makhachkala, Russia
E-mail: Shamov1978@yandex.ru

Ибавов Т. И., Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: ibavov94@mail.ru

Ibavov T. I., Dagestan State Univercity; Makhachkala, Russia
E-mail: ibavov94@mail.ru