УДК 517.983.23

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРЫ В БАНАХОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. А. Павлов, А. И. Фурменко

Крымский инженерно-педагогический университет;
Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Поступила в редакцию 21.07.2025 г.

Аннотация. В данной статье изучается интегральный оператор Вольтерры с ядром $K(t,s)$, удовлетворяющим определенным условиям. Получены необходимые условия ограниченности оператора Вольтерры в некоторых классах идеальных структур.

Получен ряд достаточные условия на ядро $K(t,s)$ для ограниченности оператора Вольтерры в некоторых функциональных пространствах. При некоторых ограничениях на ядро $K(t,s)$ получен критерий ограниченности оператора Вольтерры в семействе интерполяционных между L_1 и L_∞ функциональных пространств.

Ключевые слова: идеальная структура, оператор Вольтерры, ограниченность, интерполяционное пространство.

ON THE BOUNDEDNESS OF THE VOLTERRA OPERATOR IN BANACH FUNCTION SPACES

E. A. Pavlov, A. I. Furmenko

Abstract. This paper studies the Volterra integral operator with kernel $K(t,s)$ satisfying certain conditions. Necessary conditions for the boundedness of the Volterra operator in certain classes of ideal structures are obtained.

A number of sufficient conditions on the kernel $K(t,s)$ for the boundedness of the Volterra operator in certain function spaces are obtained. Under certain restrictions on the kernel $K(t,s)$, a criterion for the boundedness of the Volterra operator in a family of interpolation spaces between L_1 and L_∞ function spaces is obtained.

Keywords: ideal structure, Volterra operator, boundedness, interpolation space.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Вольтерры были введены Вито Вольтеррой. Эти уравнения нашли применение во многих областях: демографии, исследовании вязко-упругих материалов и ряде других областей.В уравнения 1-го и 2-го типов входят интегральные выражения, названные оператором Вольтерры. Оператор Вольтерры - это частный случай интегрального оператора с ядром $K(t,s)$, где $0 \leqslant s < t$. Частным случаем оператора Вольтерры является интегральный оператор с ядром $K(t,s) = K(t-s)$, где $0 < s \leqslant t$, т.е. оператор свертки вида

$$T_k\, x(s) = \int\limits_0^t K(t, -s)x(s)\, ds,$$

который определен на измеримых в смысле Лебега функциях $x(s)$ определенных на полуоси $(0; +\infty)$.

Одним из выдающихся математиков П. Халмошем в монографии [1] была поставлена проблема: найти конструктивный критерий ограниченности интегрального оператора в различных банаховых функциональных пространствах. До сих пор нет ни одного критерия ограниченности интегрального оператора с произвольным ядром $K(t,s)$, хотя бы в одной паре (E,F) функциональны пространств. В своей монографии П. Халмош выразил сомнение, что такой критерий вообще существует без некоторых дополнительных условий на ядро $K(t,s)$. Для некоторых интегральных операторов такой критерий известен: Оператор Харди-Литтльвуда

$$Hx(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)\,ds, \tag{1}$$

который можно записать в виде

$$Hx(t) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\chi_{(0;t]}(s)x(s)\,ds. \tag{2}$$

Здесь ядро $K(t,s) = \frac{1}{t}\chi_{(0;t]}(s)$. Критерий ограниченности этого оператора в симметрических пространствах приведен в ([2, стр. 189]) и в [11]. Обобщенный оператор Харди-Литтльвуда

$$H_\varphi x(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_0^t x(s)\,d\varphi(s), \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ - вогнутая (или квазивогнутая) неотрицательная функция, определенная на$(0;+\infty)$. Этот оператор можно записать в виде

$$H_\varphi x(t) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varphi(t)}\chi_{(0;t]}(s)\varphi^{'}(s)x(s)\,ds, \tag{4}$$

для случая, когда $\varphi(t)$ - вогнутая функция. Ядро этого оператора имеет вид

$$K(t,s) = \frac{1}{\varphi(t)}\chi_{(0;t]}(s)\varphi^{'}(s). \tag{5}$$

Критерий ограниченности этого оператора в симметричном пространстве, получен в [7]. Критерий ограниченности оператора свертки

$$T_k\, x(s) = \int\limits_0^t K(t-s)x(s)\,ds, \tag{6}$$

где $K(t) \geqslant 0$, в паре Лебеговых пространств L_p,L_q получен авторами этой статьи в [8]

Операторы Харди-Литтльвуда и обобщенный оператор Харди-Литтльвуда, , также, как и интегральный оператор свертки (6), являются частными случаями операторы Вольтерры. Действительно

$$Hx(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{t}x(s)\,ds, \tag{7}$$

ядро $K(t,s) = \frac{1}{t}$

$$H_\varphi x(t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi^{'}(s)}{\varphi(t)}x(s)\,ds, \tag{8}$$

ядро $K(t,s)=\frac{\varphi'(s)}{\varphi(t)}$, $\varphi(t)$ - вогнута , $\varphi(t)\geqslant 0$.

В данной статье для операторов Вольтерры для ядер $K(t,s)$, удовлетворяющими дополнительным условиям, получены необходимые условия его ограниченности и критерий его ограниченности в идеальных структурах $E((0;+\infty);dt)$ с нормами инвариантными относительно сдвига и являющихся интерполяционными между $L_1((0;+\infty);dt)$ и $L_\infty((0;+\infty);dt)$.

Представляет интерес задача: Когда из ограниченности интегрального оператора в конкретном пространстве E , следует его ограниченность в некотором семействе пространств F ? В Данной статье дается ответ на этот вопрос для конкретного пространства E. Все необходимые определения, обозначения и необходимые факты можно найти в [2], [3], [4].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Пусть $E((0;+\infty);dt)$ - идеальная структура. Как и для симметричных пространств (перестановочно - инвариантных пространств в другой формулировке см. [9]) введем функцию

$$\varphi_E(t)=\|\chi_{(0;t]}\|_E. \tag{1}$$

Очевидно, что $\varphi_E(t)\geqslant 0$ и является возрастающей.

Замечание. Если, дополнительно, норма в E инвариантна относительно сдвига, то очевидно равенство

$$\|\chi_{[a;b]}\|_E=\|\chi_{(0;b-a)}\|_E. \tag{2}$$

Определение 2. Через $M_{\varphi_E}(t)$ обозначается функция растяжения для функции $\varphi_E(t)$.

Теорема 1. Пусть ядро $K(t,s)$ оператора Вольтерры обладает свойством: функция $\lambda(t)$, заданная формулой

$$\lambda(t)=\int\limits_0^t K(t,s)\,ds, \tag{3}$$

является возрастающей по t и $K(t,s)\geqslant 0$ (С таким свойством, например, является ядро $K(t,s)=K(t-s)$, где $K(t)\geqslant 0$), функция растяжения $M_{\varphi_E}(t)$ ограничена в окрестности единицы.

Тогда, если оператор Вольтерры с ядром $K(t,s)$, ограниченно действует в идеальной структуре $E((0;+\infty);dt)$ с нормой, инвариантной относительно сдвига, то будет выполняться неравенство

$$\sup_{0<\tau<\infty}\int\limits_0^\tau K(\tau,s)\,ds=c<\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x(s)\geqslant 0$ и $x(s)$ - невозрастает на $(0;+\infty)$. Получаем

$$\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\geqslant x(t)\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\geqslant x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\geqslant x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}\int\limits_0^\tau K(\tau,s)x(s)\,ds. \tag{5}$$

Из (5) получаем неравенство

$$\|\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\|_E\geqslant\int\limits_0^\tau K(\tau,s)\,ds\cdot\|x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t)\|_E. \tag{6}$$

Из условия ограниченности оператора Вольтерры следует неравенство

$$\|\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\|_E\leqslant C_1\|x\|_E. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует неравенство

$$c_1 \cdot \|x\|_E \geqslant \int_0^\tau K(\tau,s)\,ds \cdot \|x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t)\|_E. \tag{8}$$

Полагая в неравенстве (8) $x(t) = \chi_{(0;2\tau]}(t)$, получаем неравенство

$$c_1 \cdot \varphi_E(2\tau) \geqslant \int_0^\tau K(\tau,s)\,ds \cdot \varphi_E(\tau), \tag{9}$$

из которого следует, очевидно, неравенство

$$\int_0^\tau K(\tau,s)\,ds \leqslant c_1 \cdot \frac{\varphi_E(2\tau)}{\varphi_E(\tau)} \leqslant c_1 \cdot M_{\varphi_E}(2). \tag{10}$$

Так как по условию Теоремы 1 функция растяжения $M_{\varphi_E}(t)$ ограничена в окрестности единицы, значит она конечна в каждой точке $t \in (0;+\infty)$. Следовательно

$$c_1 \cdot M_{\varphi_E}(2) = c_2 < \infty. \tag{11}$$

Из (9) и (10) следует соотношение

$$\sup_{0<\tau<\infty} \int_0^\tau K(\tau,s)\,ds = c < \infty = c_2 < \infty. \tag{12}$$

Теорема доказана.

Замечание. Для некоторых классов ядер $K(t,s)$ утверждение Теоремы 1 остается справедливым без дополнительного условия возрастания функции

$$\gamma(t) = \int_0^t K(t,s)\,ds.$$

Такими являются, например, частные случаи ядер Пинкерле - Гурса вида

$$K(t,s) = K_1(t) \cdot K_2(s). \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть ядро оператора Вольтерры имеет вид $K(t,s) = K_1(t) \cdot K_2(s)$, где $K_1(t) \geqslant 0; K_2(s) \geqslant 0$, а $K_1(t)$ является полумультипликативной невозрастающей функцией.

Тогда, если оператор Вольтерры ограниченно действует в идеальной структуре $E((0;+\infty);)dt$, инвариантной относительно сдвига, то будет справедливо соотношение

$$\sup_{0<\tau<\infty} \int_0^t K(t,s)\,ds = c < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $x(t) \geqslant 0$ и $x(t)$ не возрастает на $(0;+\infty)$. Получаем

$$\int_0^t K(t,s)x(s)\,ds \geqslant x(t)\int_0^t K(t,s)\,ds \geqslant x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t) \cdot \int_0^t K(t,s)\,ds =$$

$$= x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t) \cdot K_1(t) \int\limits_0^t K_2(s)\,ds \geqslant x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t)K_1(2\tau) \cdot \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds. \qquad (15)$$

Из (15) следует неравенство

$$\| \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\|_E \geqslant K_1(2\tau) \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds \cdot \|x(t) \cdot \chi_{[\tau;2\tau]}(t)\|_E, \qquad (16)$$

с другой стороны верно неравенство

$$\| \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\|_E \leqslant c \cdot \|x\|_E. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) следует неравенство

$$c \cdot \|x\|_E \geqslant)K_1(2\tau) \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds\|x(t)\chi_{[\tau;2\tau]}(t)\|_E. \qquad (18)$$

Полагая $x(t) = \chi_{[\tau;2\tau]}(t)$, получаем неравенство

$$K_1(2\tau) \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds < \infty. \qquad (19)$$

Учитывая полумультипликативность функции $K_1(t)$, получаем

$$K_1(\tau) \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds \leqslant K_1(\frac{1}{2})K_1(2\tau) \int\limits_0^\tau K_2(s)\,ds < \infty. \qquad (20)$$

Из (20), очевидно, следует утверждение Теоремы 2. Теорема доказана.

Теорема 3. Если оператор Вольтерры ограниченно действует в $L_1(0;+\infty))dt$ и ядро $K(t,s)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1 или Теоремы 2 для ядра вида $K(t,s) = K_1(t) \cdot K_2(s)$, то оператор Вольтерры ограниченно действует в любом пространстве $E((0;+\infty))dt$, интерполяционном между L_1 и L_∞.

Доказательство. Пусть оператор Вольтерры ограниченно действует в L_1, тогда из Теоремы 1 для случая $E = L_1$ следует соотношение

$$\sup_{0<t<\infty} \int\limits_0^t K(t,s)\,ds = c < \infty. \qquad (21)$$

Далее, получаем

$$| \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds| \leqslant \int\limits_0^t K(t,s)\,ds \cdot \|x\|_{L_\infty}. \qquad (22)$$

Из (22) и соотношения (21), очевидно, следует неравенство

$$\| \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds\|_{L_\infty} \leqslant \sup_{0<t<\infty} \int\limits_s^t K(t,s)\,ds \cdot \|x\|_{L_\infty}, \qquad (23)$$

следовательно оператор Вольтерры ограниченно действует в L_∞. Так как по условию оператор Вольтерры ограниченно действует в L_1, то он ограниченно действует в в любом пространстве E, интерполяционном между L_1 и L_∞.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть ядро $K(t,s) \geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{0<s<\infty} \int\limits_s^\infty K(t,s)\,ds < \infty. \tag{24}$$

Тогда, если ядро $K(t,s)$ удовлетворяет условию теоремы 1 или теоремы 2 для ядра вида $K(t,s) = K_1(t) \cdot K_2(s)$, то для того, чтобы оператор Вольтерры ограниченно действовал в интерполяционном между L_1 и L_∞ пространстве E, необходимо и достаточно чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_{0<t<\infty} \int\limits_0^t K(t,s)\,ds < \infty. \tag{25}$$

Доказательство. Так как E интерполяционно между L_1 и L_∞, то E симметричное пространство (см. [2]). Необходимость вытекает из Теоремы 1. Достаточность. Из соотношения, как было уже показано, следует, что оператор Вольтерры ограниченно действует в пространстве L_∞. Далее, учитывая соотношение (24) и теорему Фубини - Тонелли, получаем

$$\int_0^\infty |\int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds|dt \leqslant \int_0^\infty \int\limits_0^t K(t,s)|x(s)|\,dsdt =$$

$$= \int_0^\infty (\int\limits_s^\infty K(t,s)dt)|x(s)|\,ds \leqslant \sup_{0<s<\infty} \int\limits_s^\infty K(t,s)\,dt \cdot \|x\|_{L_1}. \tag{26}$$

Итак, оператор Вольтерры ограниченно действует в пространстве L_1. Следовательно оператор Вольтерры ограниченно действует в любом пространстве E, интерполяционном между L_1 и L_∞. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халмош, П. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L_2 / П. Халмош, В. Сандер. — М. : Наука, 1985.

2. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М. : Наука, 1978.

3. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.

4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. Н. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966.

5. Забрейко, П. П. Нелинейные интегральные операторы / П. П. Забрейко // Труды сем. по функ. ан. — 1966. — вып. 8. — С. 1–148.

6. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко [и др.]. — М. : Наука, 1968.

7. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, А. Н. Тихонов. — М. : Физматлит, 2002.

8. Павлов, Е. А. О некоторых обобщениях неравенства Харди-Литтльвуда / Е. А. Павлов, А. И. Фурменко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 128–134.

9. Павлов, Е. А. Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств / Е. А. Павлов, А. И. Фурменко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2023. — № 83. — С. 52–58.

10. Luxemburg, W. A. Rearrangement invariant Banach function spaces / W. A. Luxemburg // Queen's Papers Pur Appl. Math. — 1967. — V. 10. — P. 83–144.

11. Shimogaki, T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces / T. Shimogaki // J. Math. Soc. Japan. — 1965. — V. 17, № 4. — P. 365–375.

REFERENCES

1. Halmos P., Sander V. Bounded integral operators in spaces L_2. [Halmosh P., Sander V. Ogranichennye integral'nye operatory v prostranstvah L_2]. Moscow, 1985.

2. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. [Krejn S.G., Petunin YU.I, Semenov E.M. Interpolyaciya linejnyh operatorov]. Moscow, 1978.

3. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. [Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funkcional'nyj analiz]. Moscow, 1977, 744 p.

4. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.N., Sobolevskii P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Pustyl'nik E.N., Sobolevskij P.E. Integral'nye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij]. Moscow, 1966.

5. Zabreyko P.P. Nonlinear integral operators. [Zabrejko P.P. Nelinejnye integral'nye operatory]. *Trudy seminara po funkcional'nomu analizu — Proceedings of the Seminar on Functional Analysis*, 1966, iss. 8, pp. 1–148.

6. Zabreiko P.P., Koshelev A.N., Krasnoselsky M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.Ya. Integral equations. [Zabrejko P.P., Koshelev A.N., Krasnosel'skij M.A., Mihlin S.G., Rakovshchik L.S., Stecenko V.YA. Integral'nye uravneniya]. Moscow, 1968.

7. Vasilyeva A.B., Tikhonov A.N. Integral equations. [Vasil'eva A.B., Tihonov A.N. Integral'nye uravneniya]. Moscow, 2002.

8. Pavlov E.A., Furmenko A.I. On some generalizations of the Hardy-Littlewood inequality. [Pavlov E.A., Furmenko A.I. O nekotoryh obobshcheniyah neravenstva Hardi-Littl'vuda]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 128–134.

9. Pavlov E.A., Furmenko A.I. On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces. [Pavlov E.A., Furmenko A.I. Ob ogranichennosti integral'nogo operatora svertki v pare klassicheskih lebegovyh prostranstv]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Bulletin. Mathematics and Mechanics*, 2023, no. 83, pp. 52–58.

10. Luxemburg W.A. Rearrangement invariant Banach function spaces. Queen's Papers Pur Appl. Math, 1967, vol. 10, pp. 83–144.

11. Shimogaki T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces. J. Math. Soc. Japan, 1965, vol. 17, no. 4, pp. 365–375.

Павлов Евгений Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, Россия
E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Pavlov Evgeny Alexandrovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Crimean Engineering and Pedagogical University, Simferopol, Russia
E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Фурменко Александр Иванович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Военно-воздушная академия им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Россия
E-mail: furmenko@mail.ru

Furmenko Aleksandr I., Candidate of Physicals and Mathematicas Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia
E-mail: furmenko@mail.ru