УДК 517

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Д. Е. Марфин, С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.05.2025 г.

Аннотация. В работе доказана возможность разложения функций из некоторого класса по собственным функциям краевой задачи с разрывными решениями. Показана равномерная сходимость полученного ряда. При анализе мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным, а так же π-интеграл, введенный им же.

Ключевые слова: разложение, спектральная задача, равномерная сходимость, разрывные решения.

ON THE DECOMPOSITION OF FUNCTIONS IN EIGENFUNCTIONS OF A SPECTRAL PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS

D. E. Marfin, S. A. Shabrov, F. V. Golovaneva, P. V. Sadchikov

Abstract. This paper proves the possibility of expanding functions from a certain class in terms of the eigenfunctions of a boundary value problem with discontinuous solutions. Uniform convergence of the resulting series is demonstrated. In our analysis, we use the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokorny, as well as the π-integral he also introduced..

Keywords: decomposition, spectral problem, uniform convergence, discontinuous solutions.

Качественная теория дифференциальных уравнений второго с негладкими и разрывными решениями получила бурное развитие после выхода работы Ю. В. Покорного [1] в 1999 году. Так была построена точная параллель классической теории ОДУ вплоть до осцилляционных теорем [2–8]. Этому есть простое объяснение: в отличие от теории обобщенных функций в которой уравнение понимается как равенство функционалов, заданных на некотором пространстве основных функций, поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным, трактует уравнение как связь между значениями функции и ее производными в точке, т. е. как обыкновенное.

Однако, остались некоторые вопросы, которые в приведенных работах не обсуждались, например, вопрос о разложении функции в ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи с разрывными решениями.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mu(x)$ – строго возрастающая и ограниченная на $[0;\ell]$ функция. Нам удобно считать ее заданной на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_s$, которое строится следующим образом. Пусть $S(\mu)$ – множество точек разрыва функции $\mu(x)$. При этом, мы считаем, что $S(\mu)$ непустно и

$\mu(x)$ не задано в точках разрыва. На множестве $J_S = [0;\ell]\backslash S(\mu)$, введем метрику $\rho_\mu(x,y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Так как $S(\mu) \neq \varnothing$, то метрическое пространство (J_S, ρ_μ) не является полным. Стандартное положение с точностью до изоморфизма и приводит нас к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на упорядоченную пару собственных элементов $\{\xi_-,\xi_+\}$, бывшие ранее предельными. Доопределим функцию $u(x)$, заданную ранее на отрезке $[0;\ell]$, в точках ξ_-, ξ_+ предельными значениями.

Рассмотрим задачу с разрывными решениями

$$-\left(pu'_\mu\right)'_{[\sigma]} + u\left(Q'_{[\sigma]} - \lambda M'_{[\sigma]}\right) = 0, \tag{1}$$

где внутренняя производная по мере понимается следующим образом. Во всех точках непрерывности функции $\mu(x)$ производная понимается как предел отношения

$$u'_\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\mu(x+\Delta x) - \mu(x)}; \tag{2}$$

в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ — как отношение скачков:

$$u'_\mu(\xi) = \frac{u(\xi+0) - u(\xi-0)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)}. \tag{3}$$

Первую производную $u'_\mu(x)$ нам удобно считать определенной на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ в котором точки ξ «вставлены» на свои прежние места, при этом естественно, считать $\xi_- < \xi < \xi_+$. Другими словами, каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов ξ_-,ξ,ξ_+.

Внешняя производная будет уже «двузначной» в каждой точке разрыва $\mu(x)$:

$$(pu'_\mu)'_{[\sigma]}(\tau_1^\xi) = \frac{pu'_\mu(\xi) - pu'_\mu(\xi-0)}{\sigma(\xi) - \sigma(\xi-0)}; \tag{4}$$

и

$$(pu'_\mu)'_{[\sigma]}(\tau_2^\xi) = \frac{pu'_\mu(\xi+0) - pu'_\mu(\xi)}{\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi)}. \tag{5}$$

Отметим, что мы считаем $\tau_1^\xi < \tau_2^\xi$ для всех точек x, принадлежащих множеству точек разрыва функции $\mu(x)$.

Таким образом, вторая производная $\left(pu'_\mu\right)'_{[\sigma]}$ определена на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(2)}$ отрезка $[0;\ell]$, которое строится аналогичным образом, что и $\overline{[0;\ell]}_S$, и $\overline{[0;\ell]}_\mu$.

Обозначим через $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На отрезке $[0;\ell]$ введем метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Нетрудно видеть, что в случае, когда $S(\sigma)$ не является пустым, то метрическое пространство $([0;\ell];\rho)$ не будет полным. Стандартное его дополнение приводит нас к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-,\xi,\xi_+\}$. Отметим, что ξ_- и ξ_+ ранее были предельными значениями. Формальная замена тройки $\{\xi_-,\xi,\xi_+\}$ на четверку упорядоченных собственных элементов $\left\{\xi_-,\tau_1^\xi,\tau_2^\xi,\xi_+\right\}$ и дает нам множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(2)}$.

Функцию $\sigma(x)$, порождающую на $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(2)}$ меру, мы будем считать заданной на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, при этом, $[\sigma]$ — меру элементов $\tau_i^\xi, (i = 1, 2)$ множества $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(2)}$ соответсвтенно зададим следующим образом:
$\sigma\left\{\tau_1^\xi\right\} = \sigma(\xi) - \sigma(\xi-0)$; $\sigma\left\{\tau_2^\xi\right\} = \sigma(\xi+0) - \sigma(\xi)$.

Всюду далее, чтобы не затенять сути дела, мы предполагаем множеством точек разрыва функций $\mu(x)$ и $\tau(x)$ совпадают. Заметим, что в уравнении (34), в точках разрыва $S(\mu)$ понимается как равенства

$$-pu'_\mu(\xi) + pu'_\mu(\xi-0) + (Q(\xi) - Q(\xi-0) + \lambda(M(\xi) - M(\xi-0)))u(\xi-0) = 0, \tag{6}$$

и
$$-pu'_\mu(\xi+0)+pu'_\mu(\xi)+(Q(\xi+0)-Q(\xi)+\lambda(M(\xi+0)-M(\xi))u(\xi+0)=0. \qquad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ π-ИНТЕГРАЛА

Пусть на множестве $[0;\ell]\backslash S(\sigma)$ определена функция $u(x)$, а на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ — $v(x)$. Положим

$$\int\limits_0^\ell u\,d\,[v] = uv\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v\,du, \qquad (8)$$

где интеграл в правой части равенства (8) понимается по Лебегу–Стилтьесу и $uv\Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell)-u(0)v(0)$. Квадратные скобки у дифференциала в интеграле, стоящего в левой части, поставлены специально для того, чтобы отличать его от интеграла Лебега–Стилтьеса и будем его называть π-интегралом или интегралом Покорного–Стилтьеса. Из определения вытекает следующее свойство π-интеграла: его линейность.

Докажем вначале лемму о возможности предельного перехода под знаком интеграла.

Лемма 1. *Пусть $\{v_n(x)\}$ последовательность функций, имеющих конечное на $[0;\ell]$ изменение, сходящаяся поточечно к функции $v(x)$, причем последовательность вариаций и сама последовательность ограничены в совокупности. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\ell u\,d\,[v_n] = \int\limits_0^\ell u\,d[v] \qquad (9)$$

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что предельная функция $v(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение и возможность применимости теоремы Хелли. Тогда последовательно находим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\ell u\,d\,[v_n] = \lim_{n\to\infty}\left(uv_n\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v_n\,du\right) =$$
$$= uv\Big|_0^\ell - \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\ell v\,du = uv\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell vdu = \int\limits_0^\ell u\,d[v], \qquad (10)$$

в силу законности предельного перехода под знаком интеграла Лебега–Стилтьеса. Тем самым лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение. Тогда π-интеграл может быть вычислен следующим образом:*

$$\int\limits_0^\ell u\,d\,[v] = \int\limits_0^\ell u\,dv_0 + \sum_{\xi\in S(v):0\leqslant\xi<\ell} u\,(\xi+0)\,\Delta^+v(\xi) + \sum_{\xi\in S(v):0<\xi\leqslant\ell} u\,(\xi-0)\,\Delta^-v(\xi), \qquad (11)$$

где $v_0(x)$ — непрерывная составляющая функция $v(x)$, $\Delta^-v(\xi)=v(\xi)-v\,(\xi-0)$ и $\Delta^+v(\xi) = v\,(\xi+0)-v(\xi)$ — левый и правый скачки функции $v(x)$ в точке ξ, и интеграл в правой части равенства (11) понимается по Лебегу–Стилтьесу.

Отметим, что, интеграл $\int\limits_0^\ell u\,dv_0$ существует и в смысле Римана–Стилтьеса, так как функция $u(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, а $v_0(x)$ непрерывна на $[0;\ell]$.

Доказательство. Пусть $S = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — множество внутренних точек разрыва функции $v(x)$. Положим

$$v_s^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \xi_k \\ \Delta^- v(\xi_k), & \text{если } x = \xi_k; \\ \Delta^+ v(\xi_k), & \text{если } x > \xi_k, \end{cases} \tag{12}$$

$$v_s^{(0)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \Delta^+ v(0), & \text{если } x > 0, \end{cases} \tag{13}$$

и

$$v_s^{(\ell)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \ell \\ \Delta^- v(\ell), & \text{если } x = \ell. \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что последние две (или одна из них) функции необходимы только, если $x = 0$ и/или $x = \ell$ являются точками разрыва функции $v(x)$.

Нетрудно видеть, что функция скачков $v_s(x)$ для функции $v(x)$ имеет вид

$$v_s(x) = \sum_k v_s^{(k)}(x) + v_s^{(0)}(x) + v_s^{(\ell)}(x). \tag{15}$$

Из определения (8) для функции $v_0(x)$ последовательно находим

$$\int\limits_0^\ell u\,d\,[v_0] = uv_0\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v_0\,du = uv_0\Big|_0^\ell - v_0 u\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell u\,dv_0 = \int\limits_0^\ell u\,dv_0, \tag{16}$$

так как для интеграла Римана–Стилтьеса формула интегрирования по частям справедлива, и в этом случае теорема доказана.

Для функции $v_s^{(k)}(x)$ получаем

$$\int\limits_0^\ell u\,d\left[v_s^{(k)}\right] = uv_s^{(k)}\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v_s^{(k)} du =$$
$$= u(\ell)\Delta v(\xi_k) - \Delta^- v(\xi_x)\Delta u(\xi_k) - \Delta v(\xi_k)\left(u(\ell) - u(\xi_k + 0)\right) \tag{17}$$

После приведения подобных и перегруппировки слагаемых, мы придем к равенству

$$\int\limits_0^\ell u\,d\left[v_s^{(k)}\right] = u(\xi_k - 0)\Delta^- v(\xi_k) + u(\xi_k + 0)\Delta^+ v(\xi_k) \tag{18}$$

Точно так же легко мы получим равенство

$$\int\limits_0^\ell u\,d\left[v_s^{(0)}\right] = uv_s^{(0)}\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v_s^{(0)}\,du =$$
$$= u(\ell)v_s^{(0)}(\ell) - v_s^{(0)}(0)\Delta^+ u(0) - \Delta^+ v(0)\left(u(\ell) - u(+0)\right) =$$

$$= u(+0)\Delta^+ v(0), \quad (19)$$

так как $v_s^{(0)}(0) = 0$;

$$\int_0^\ell u\, d\left[v_s^{(\ell)}\right] = uv_s^{(\ell)}\Big|_0^\ell - \int_0^\ell v_s^{(\ell)} du = u(\ell)v_s^{(\ell)}(\ell) - v_s^{(\ell)}(\ell)\Delta^- u(\ell) = u(\ell - 0)\Delta^- v(\ell). \quad (20)$$

Складывая (18) по k от 1 до n, придем к равенству

$$\int_0^\ell u\, d\left[\sum_{k=1}^n v_s^{(k)}\right] = \sum_{k=1}^n u(\xi_k - 0)\Delta^- v(\xi_k) + u(\xi_k + 0)\Delta^+ v(\xi_k). \quad (21)$$

Если множество S конечно, то добавляя почленно к нему равенства (16), (19) и (20) мы получим требуемое.

Пусть теперь S счетно. Переходя в равенстве (21) к пределу при $n \to \infty$, в силу леммы, получим

$$\int_0^\ell u\, d\,[v_s] = \sum_{n=1}^\infty u(\xi_k - 0)\Delta^- v(\xi_k) + u(\xi_k + 0)\Delta^+ v(\xi_k). \quad (22)$$

Добавляя к последнему равенству почленно (16), (19) и (20) мы снова придем к требуемому. Теорема доказана. □

Заметим, что введенный интеграл может быть сведен к интегралу Лебега–Стилтьеса только в некоторых частных случаях, например, в случае регулярных функций т. е. $u(x) = \dfrac{u(x+0) + u(x-0)}{2}$ и $v(x) = \dfrac{v(x+0) + v(x-0)}{2}$ для всех точек отрезка $[0;\ell]$. В общем случае это невозможно. Докажем это.

Покажем, что найдется функция $v(x)$, имеющая конечное на $[0;\ell]$ изменение (и порождающая на отрезке $[0;\ell]$ заряд) такая, что как бы мы не определяли заряд $\varphi(x)$, найдется функция $u(x)$, принадлежащая $BV[0;\ell]$, что равенство

$$\int_0^\ell u\, d[v] = \int_0^\ell u\, d\varphi \quad (23)$$

невозможно. При этом, интеграл в правой части равенства (23) понимается по Лебегу–Стилтьесу.

Доказательство. Предположим, что это не так: для любой функции $v(x)$ с ограниченной на $[0;\ell]$ вариацией, существует функция $\varphi(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ знаконеопределенную меру, такую, что для всякой функции $u(x)$, оконченной на $[0;\ell]$ вариацией, справедливо равенство (23).

Пусть ξ – произвольная внутренняя точка отрезка $[0;\ell]$. Рассмотрим следующую функцию

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \xi; \\ 0, & \text{если } x \neq \xi. \end{cases} \quad (24)$$

Очевидно, что $v(x)$ имеет на $[0;\ell]$ конечную вариацию.

В соответствие с нашим предположением существует функция $\varphi(x) \in BV[0;\ell]$, такая, что

$$u(\xi - 0)\Delta^- v(\xi) + u(\xi + 0)\Delta^+ v(\xi) = \int_0^\ell u\, d\varphi, \quad (25)$$

причем последнее равенство должно выполняться для всякой функции $u(x)$ с ограниченной на $[0;\ell]$ вариацией.

Так как $\Delta^- v(\xi) = 1$ и $\Delta^+ v(\xi) = -1$, то (25) допускает перезапись

$$u(\xi-0)-u(\xi+0)=\int\limits_0^\ell u\,d\varphi. \tag{26}$$

Рассмотри две последовательности функций

$$u_n^{(1)}(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<\xi-\frac{1}{n};\\ 1+n(x-\xi), & \text{при } \xi-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\xi;\\ 0, & \text{при } x>\xi, \end{cases} \tag{27}$$

и

$$u_n^{(2)}(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<\xi;\\ 1+n(\xi-x), & \text{при } \xi\leqslant x\leqslant\xi+\frac{1}{n};\\ 0, & \text{при } x>\xi+\frac{1}{n}, \end{cases} \tag{28}$$

при этом n можем взять достаточно большим, что точки $\xi\pm\frac{1}{n}$ принадлежали отрезку $[0;\ell]$.

Нетрудно видеть, что при каждом n функции $u_n^{(1)}(x)$ и $u_n^{(2)}(x)$ ограничены и имеют вариацию на отрезке $[0;\ell]$ равную 2 и каждая из них сходится поточечно к функции $v(x)$. Так как сами последовательности $\left\{u_n^{(1)}(x)\right\}$ и $\left\{u_n^{(2)}(x)\right\}$ и их вариации ограничены в совокупности, то возможен предельный переход под знаком интеграла. Для каждой из них, из равенства (25) последовательно находим

$$\lim_{n\to\infty}\Big(u_n^{(1)}(\xi-0)-u_n^{(1)}(\xi+0)\Big)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\ell u_n^{(1)}\,d\varphi, \tag{29}$$

или

$$1=\int\limits_0^\ell v\,d\varphi, \tag{30}$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\Big(u_n^{(2)}(\xi-0)-u_n^{(2)}(\xi+0)\Big)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\ell u_n^{(2)}\,d\varphi \tag{31}$$

или

$$-1=\int\limits_0^\ell v\,d\varphi, \tag{32}$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^\ell v\,d\varphi$ принимает два различных значения, что невозможно.

Разберем теперь ситуацию, когда равенство (23) принимает вид

$$\int\limits_0^\ell u\,d[v]=\int\limits_0^\ell w\,d\varphi, \tag{33}$$

т. е. интеграл сводится к интегралу Стилтьеса, но функция $u(x)$ сама «трансформируется» в некоторую измеримою функцию w, такую что интеграл в правой части (23) существует. Из равенства (23) следует, что w зависит от u линейным образом. Рассмотрим как и ранее последовательности $\left\{u_n^{(1)}(x)\right\}$ и $\left\{u_n^{(2)}(x)\right\}$, которым будут соответствовать последовательности $\left\{w_n^{(1)}(x)\right\}$ и $\left\{w_n^{(2)}(x)\right\}$

И как нетрудно видеть, мы снова придем к противоречию, интеграл $\int\limits_0^\ell v\,d\varphi$ будет принимать два различных значения. □

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Вернемся к анализу задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]}(pu'_\mu) + (Q'_{[\sigma]} - \lambda M'_{[\sigma]})u = 0; \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Будем говорить, что некоторое число λ_0, вообще говоря, комплексное, является собственным значением,если существует функция $\varphi_0(x)$, отличная от тождественного нуля, удовлетворяющая краевым условиям $u(0) = u(\ell) = 0$, и уравнение, после подстановки в него функции $\varphi_0(x)$, превращается в тождество

$$-\frac{d}{d[\sigma]}(p{\varphi_0}'_\mu) + (Q'_{[\sigma]} - \lambda_0 M'_{[\sigma]})\varphi_0 \equiv 0. \tag{35}$$

Отметим, что спектр задачи (34) достаточно подробно изучен в работе [8]. В частности показано, что спектр задачи является осцилляционным, т. е. состоит только из собственных значений, каждое из которых является вещественным и положительным, единственная точка сгущения — $+\infty$; при этом каждое собственное значение является простым, другими словами, имеет алгебраическую и геометрическую кратности равную единице. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система нормированных собственных функций спектральной задачи (34), т. е. $\max\limits_{\overline{[0;\ell]}_S} |\varphi_n(x)| = 1$.

Теорема 2. *Пусть $p(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; $\inf\limits_{[0;\ell]} p(x) > 0, Q'_\sigma(x) \geqslant 0$ и $M'_\sigma(x) > 0$; $\{\lambda_n\}$ — собственные значения спектральной задачи. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{\lambda_n}^{\frac{2}{3}+\delta}} \tag{36}$$

сходится при всех положительных δ.

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают невырожденность краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{37}$$

и, как следствие, существование и единственность функции Грина $G(x{,}s)$ краевой задачи (1).

Тогда, спектральная задача эквивалентна спектральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^\ell G(x{,}s) M'_{[\sigma]}(s) u(s)\, d\left[\sigma(s)\right]. \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что собственное значение спектральной задачи определяется как нули определителя Фредгольма, и, в нашем случае, он определяется следующим образом

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_n}{n!} A_n, \tag{39}$$

где

$$A_n = \int_0^{\ell} \ldots \int_0^{\ell} \begin{vmatrix} G(s_1,s_1) & \ldots & G(s_1,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G(s_n,s_1) & \ldots & G(s_n,s_n) \end{vmatrix} d\left[\sigma(s_1)\right] \ldots d\left[\sigma(s_n)\right]. \tag{40}$$

Легко видеть, что ряд (39) сходится при всех, вообще говоря, комплексных λ.

Для всех i и j ($i = 1,2,\ldots,n-1$; $j = 1,2,\ldots,n$) мы имеем следующее $G(s_{i+1},s_j) - G(s_i,s_j) = b_{i,j}(\mu(s_{i+1}) - \mu(s_i))$ при некоторых $b_{i,j}$. При этом, мы считаем, что s_i принадлежат множеству $\overline{[0;\ell]}_{\sigma}$.

Так как $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи, то найдется такая константа K, не зависящая от n и s_i и s_j, что неравенства $|G(x,s)| \leqslant K$ и $|b_{i,j}| \leqslant K$ справедливы при всех x, s, i, j.

Тогда при $n \geqslant 2$ мы последовательно имеем

$$\begin{vmatrix} G(s_1,s_1) & G(s_1,s_2) & \ldots & G(s_1,s_n) \\ G(s_2,s_1) & G(s_2,s_2) & \ldots & G(s_2,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G(s_{n-1},s_1) & G(s_{n-1},s_2) & \ldots & G(s_{n-1},s_n) \\ G(s_n,s_1) & G(s_n,s_2) & \ldots & G(s_n,s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} G(s_1,s_1) & G(s_1,s_2) & \ldots & G(s_1,s_n) \\ G(s_2,s_1) & G(s_2,s_2) & \ldots & G(s_2,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G(s_{n-1},s_1) & G(s_{n-1},s_2) & \ldots & G(s_{n-1},s_n) \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ldots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} (\mu(s_{i+1}) - \mu(s_i)) =$$

$$= \begin{vmatrix} G(s_1,s_1) & G(s_1,s_2) & \ldots & G(s_1,s_n) \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-2,1} & b_{n-2,1} & \ldots & b_{n-2,n} \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ldots & b_{n-1,n}. \end{vmatrix} (\mu(s_2) - \mu(s_1))(\mu(s_3) - \mu(s_2)) \ldots$$

$$\ldots (\mu(s_n) - \mu(s_{n-1})). \tag{41}$$

Применим неравенство Адамара и оценку

$$|(\mu(s_2) - \mu(s_1))(\mu(s_3) - \mu(s_2)) \ldots (\mu(s_n) - \mu(s_{n-1}))| \leqslant \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-1}\right)^{n-1}, \tag{42}$$

для A_n мы получим

$$|A_n| \leqslant K^n n^{\frac{n}{2}} (M(\ell) - M(0))^n \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{\left[K(M(\ell) - M(0))(\mu(\ell) - \mu(0))\right]^n}{\mu(\ell) - \mu(0)} \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}. \tag{43}$$

Далее, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$.

Поэтому, при достаточно больших n справедливо равенство

$$|A_n| \leqslant \frac{[K(M(\ell)-M(0))(\mu(\ell)-\mu(0))]^n}{\mu(\ell)-\mu(0)} \cdot n^{-\frac{n}{2}+\varepsilon n}. \tag{44}$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [12], [13] показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3}-\varepsilon$ для любого $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Тогда, $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $\frac{2}{3}$, следовательно, для произвольного положительного σ ряд (36) сходится. $\square$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Положим,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^\ell {\varphi_n}^2(x) M'_\sigma(x)\, d[\sigma(x)]}} \cdot \int\limits_0^\ell h(x)\varphi_n(x) M'_{[\sigma]}(x)\, d[\sigma(x)]\,, n=1,2,\ldots. \tag{45}$$

Или, вспоминая теорему о замене меры [9], равенства (45) можно переписать в следующем виде

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^\ell {\varphi_n}^2(x)\, d[M(x)]}} \cdot \int\limits_0^\ell h(x)\varphi_n(x)\, d[M(x)]\,. \tag{46}$$

По сути дела, коэффициенты a_n — ряда Фурье для функции $h(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ с весом $M'_{[\sigma]}(x)$, и интеграл понимается как π–интеграл.

Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{47}$$

сходится равномерно и абсолютно к функции $h(x)$. Для этого применим критерий Коши.

Пусть n и m некоторые натуральные числа. К сумме $\sum\limits_{k=n}^{n+m} |c_k\varphi_k(x)|$ применим неравенство Коши

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k\varphi_k(x)| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2\lambda_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Сумма $\sum\limits_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$ может быть оценена равномерно на $[0;\ell]$ следующей $\sum\limits_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}$, которая является отрезком сходящегося числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2$ сходится.

Обозначим через E — множество μ – абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, μ–производная которых имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, и обращающихся на концах отрезка в нуль.

На этом множестве рассмотрим функционал

$$\Phi(X) = \int\limits_0^\ell pX'_\mu\, d\mu + \int\limits_0^\ell X^2\, d[Q]\,. \tag{49}$$

В работе [10] доказано, что если функция $\varphi(x)$ дает минимуму (49), то существует строго возрастающая функция $\sigma(x)$ такая что, производная $\varphi'_\mu(x), p(x), Q(x)$ и $M(x)$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$. Нетрудно видеть, что функции

$$h_N(x) = h(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x) \tag{50}$$

принадлежат E при всех натуральных N.

Введем следующие обозначения

$$\Delta_N^2 = \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x) h_N^2(x)\, d\left[\sigma(x)\right], \tag{51}$$

$$\psi_N(x) = \frac{h_N(x)}{\Delta_N}. \tag{52}$$

Найдем значения функционала (49) на функции $\psi_N(x)$, т. е. $\Phi(\psi_N)$:

$$\begin{gathered}
\Phi(\psi_N) = \int_0^\ell p {\psi_N}'^2_\mu \, d\mu + \int_0^\ell \psi_N^2 d\left[Q\right] = \\
= \frac{1}{\Delta_N^2} \left[\int_0^\ell p(x) \left(h'_\mu(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k {\varphi_k}'_\mu(x) \right)^2 d\mu(x) + \right. \\
\left. + \int_0^\ell \left(h(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x) \right)^2 d\left[Q(x)\right] \right] = \\
= \frac{1}{\Delta_N^2} \left[\int_0^\ell p(x) {h'_\mu}^2(x)\, d\mu(x) + \int_0^\ell h^2(x)\, d\left[Q(x)\right] - \right. \\
- 2 \sum_{k=1}^{N} c_k \left(\int_0^\ell p(x) h'_\mu(x) {\varphi_k}'_\mu(x)\, d\mu(x) + \int_0^\ell h(x)\varphi_k(x)\, d\left[Q(x)\right] \right) + \\
\left. + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} c_k c_m \left(\int_0^\ell p(x) {\varphi_k}'_\mu(x) {\varphi_m}'_\mu(x)\, d\mu(x) + \int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_m(x)\, d\left[Q(x)\right] \right) \right] = \\
= \frac{1}{\Delta_N^2} \left[\Phi(h) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k {c_k}^2 \right],
\end{gathered} \tag{53}$$

так как

$$\begin{gathered}
\int_0^\ell p(x) h'_\mu(x) {\varphi_k}'_\mu(x)\, d\mu(x) + \int_0^\ell h(x) \varphi_k\, d\left[Q\right] = \\
= p(x) {\varphi_k}'_\mu(x) h(x) \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell h(x) \left(p(x) {\varphi_k}'_\mu(x) \right)'_{[\sigma]}(x)\, d\left[\sigma(x)\right] +
\end{gathered}$$

$$+\int_0^\ell h(x)\varphi_k(x)Q'_{[\sigma]}(x)\,d\,[\sigma(x)] = \int_0^\ell h(x)\lambda_k M'_{[\sigma]}(x)\,d\,[\sigma] = \lambda_k c_k. \quad (54)$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались равенством нулю функции $h(x)$ на концах отрезка $[0;\ell]$, $\varphi_k(x)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_k, и тем, что $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированная система. Покажем, что для всех N справедливо неравенство

$$\Phi(\psi_N) \geqslant \lambda_{N+1}, \quad (55)$$

где λ_{N+1} — $(N+1)$-ое собственное значение спектральной задачи (34) при $F(x) \equiv \mathrm{const}$.

Рассмотрим вначале задачу нахождения минимума функционала $\Phi(X)$ при условии

$$\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X^2(x)\,d\,[\sigma(x)] = 1 \quad (56)$$

на множестве E. Из результатов работы [11] следует, что минимум достигается в классе E, следовательно, функция, которая доставляет этот минмум, при некотором λ должна удовлетворять уравнению Эйлера-Лагранжа для функционала

$$\Phi_0(X) = \Phi(X) - \lambda \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X^2(x)\,d\,[\sigma(x)]\,, \quad (57)$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с уравнением

$$-\left(pX'_\mu\right)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]} = \lambda M'_{[\sigma]}X, \quad (58)$$

и, кроме того, минимизирующая функция удовлетворяет краевым условиям $X(0) = X(\ell) = 0$.

Обозначим эту функцию через $\varphi_1(x)$, которая является собственной функцией спектральной задачи (34) при $F(x) \equiv \mathrm{const}$, и удовлетворяет равенству $\int_0^\ell M'_{[\sigma]}\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma] = 1$.

Найдем значение функционала $\Phi(X)$ на функции $\varphi_1(x)$:

$$\Phi(\varphi_1) = \int_0^\ell p\varphi_{1\mu}^{2\prime}\,d\mu + \int_0^\ell \varphi_1^2\,d\,[Q] =$$

$$= p{\varphi_1}'_\mu\varphi_1\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \varphi_1\left(p{\varphi_1}'_\mu\right)'_{[\sigma]}\,d\,[\sigma] + \int_0^\ell \varphi_1^2\,d\,[Q] =$$

$$= \lambda\int_0^\ell M'_{[\sigma]}\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma] = \lambda, \quad (59)$$

и, очевидным образом, является наименьшим собственным значением. Обозначим его через λ_1. Таким образом, значение функционала $\Phi(X)$ на множестве E не меньше λ_1, т. е. $\Phi(X) \geqslant \lambda_1$ для всех $X \in E$, причем знак равенства достигается на функции $\varphi_1(x)$.

Докажем теперь, что функция $X(x)$, которая дает минимум функционалу $\Phi(X)$ в классе E, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\int_0^\ell M'_\sigma X^2(x)d\,[\sigma] = 1 \quad (60)$$

и

$$\int_0^\ell M'_\sigma X(x)\varphi_1(x) d\,[\sigma] = 0, \tag{61}$$

является собственной функцией, соответствующей второму собственному значению λ_2.

В самом деле, функция $X(x)$, которая дает минимум функционалу $\Phi(X)$ при уловиях (60) и (61) должен удовлетворять уравнению Эйлера–Лагранжа для функционала

$$\Phi_1(X) = \int_0^\ell p(x){X'_\mu}^2(x)\,d\mu(x) + \int_0^\ell X^2(x)Q'_{[\sigma]}(x)\,d\,[\sigma(x)] - \\ - \lambda\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X^2(x)\,d\,[\sigma(x)] - \nu\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X(x)\varphi_1(x)\,d\,[\sigma(x)] \tag{62}$$

при некоторых λ и ν. Расчеты показывают, что это уравнение имеет вид

$$-\left(pX'_\mu\right)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]} - \lambda M'_{[\sigma]}X - \frac{\nu}{2}M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1(x) = 0. \tag{63}$$

Докажем $\nu = 0$. Тождество

$$-\left(p{\varphi_1}'_\mu\right)'_{[\sigma]} + \varphi_1 Q'_{[\sigma]} - \lambda_1 M'_{[\sigma]}\varphi_1 \equiv 0 \tag{64}$$

умножим на $X(x)$, а (63) — $\varphi_1(x)$, вычтем почленно одно из другого, а затем результат проинтегрируем по мере σ по отрезку $[0;\ell]$:

$$-\int_0^\ell \left(pX'_\mu\right)'_{[\sigma]}\varphi_1\,d\,[\sigma] - \lambda\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X(x)\varphi_1(x)\,d\,[\sigma] - \\ - \frac{\nu}{2}\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma] + \int_0^\ell \left(p{\varphi_1}'_\mu\right)'_{[\sigma]}X(x)\,d\,[\sigma] + \\ + \lambda_1\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1(x)X(x)\,d\,[\sigma] = 0. \tag{65}$$

Так как функция $X(x)$ должна удовлетворять условию (61), то равенство (65) примет вид

$$-\int_0^\ell \left(pX'_\mu\right)'_{[\sigma]}\varphi_1\,d\,[\sigma] - \frac{\nu}{2}\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma] + \int_0^\ell \left(p{\varphi_1}'_\mu\right)'_{[\sigma]}X\,d\,[\sigma] = 0. \tag{66}$$

Первый и последний интегралы в левой части проинтегрируем по частям

$$-pX'_\mu\varphi_1\Big|_0^\ell + \int_0^\ell pX'_\mu{\varphi_1}'_\mu\,d\mu - \frac{\nu}{2}\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma] + \\ + p{\varphi_1}'_\mu X\Big|_0^\ell - \int_0^\ell p{\varphi_1}'_\mu X'_\mu\,d\mu = 0, \tag{67}$$

или, в силу взаимной ликвидации интегралов и краевых задач, равенство (67) принимает вид

$$-\frac{\nu}{2}\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}\varphi_1^2(x)\,d\,[\sigma]=0, \tag{68}$$

из которого и следует требуемое.

Итак, уравнение (63) принимает вид

$$-\left(pX'_\mu\right)'_{[\sigma]}+XQ'_{[\sigma]}-\lambda M'_{[\sigma]}X=0 \tag{69}$$

и $X(x)$ является собственной функцией. Обозначим через $\varphi_2(x)$.

Обозначим через λ_2 значение функционала $\Phi(X)$, при условии $\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi^2(x)=1$, на функции $\varphi_2(x)$. Ввиду того, что при увеличении числа условий на допустимые функции минимум функционала не может уменьшиться, то $\Phi(\varphi_2)\geqslant\Phi(\varphi_1)$. При этом, равенство в последнем неравенстве невозможно, так как в противном случае функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ были бы линейно зависимыми, что противоречит условию (61).

Покажем, что между λ_1 и λ_2 нет других собственных значений. Предположим противное: существует собственное значение λ^*, лежащее между λ_1 и λ_2. Но, в этом случае, собственная функция $\varphi^*(x)$, отвечающая λ^*, должна давать минимум функционалу $\Phi(X)$ при условиях (60) и (61), а это, как нетрудно видеть, невозможно.

Рассмотрим теперь задачу минимизации $\Phi(X)$ на множестве E при следующих условиях (60),

$$\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X(x)\varphi_i(x)\,d\,[\sigma]=0,(i=1{,}2,\ldots,n-1) \tag{70}$$

где $\varphi_i(x)$ — собственная функция, отвечающая собсвтенному значению λ_i. При этом, $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{n-1}$.

Функция, дающая на E минимум функционалу $\Phi(X)$ при условиях (60) и (70), должна удовлетворять уравнению Эйлера–Лагранжа для функционала

$$\Phi_n(X)=\Phi(X)-\lambda\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X^2(x)\,d\,[\sigma(x)]-\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)X(x)\varphi_i(x)\,d\,[\sigma]\,. \tag{71}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение и в этом случае принимает вид

$$-\left(p(x)X'_\mu\right)'_{[\sigma]}+XQ'_{[\sigma]}-\lambda M'_{[\sigma]}X-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i\int\limits_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_i(x)=0. \tag{72}$$

Отметим, что уравнение (72) должно быть дополнено краевыми условиями $X(0)=X(\ell)=0$.

Покажем, что все ν_i равны нулю.

Зафиксируем по произволу число j $(j=1{,}2,\ldots,n-1)$. Тождество

$$-\Big(p(x){\varphi_j}'_\mu\Big)'_{[\sigma]}+Q'_{[\sigma]}\varphi_j(x)-\lambda_j M'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x)\equiv 0 \tag{73}$$

умножив на $X(x)$, тождество, полученное из (72) подстановкой в него функции $X(x)$, — на $\varphi_j(x)$, вычитая почленно одно из другого, и интегрируя по мере σ в пределах от 0 до ℓ, будем иметь

$$-\int_0^\ell \left(p(x)X_\mu'\right)'_{[\sigma]} \varphi_j(x)\, d\,[\sigma] - \lambda \int_0^\ell X(x)\varphi_j(x)\, d\,[\sigma] - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, d\,[\sigma] + \\ + \int_0^\ell \left(p{\varphi_j}'_\mu\right)'_{[\sigma]}(x)X(x)\, d\,[\sigma] + \lambda_j \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x)X(x)\, d\,[\sigma] = 0. \quad (74)$$

Интегралы

$$-\int_0^\ell \left(p(x)X_\mu'\right)'_{[\sigma]} \varphi_j(x)\, d\,[\sigma] \quad \text{и} \quad \int_0^\ell \left(p{\varphi_j}'_\mu\right)'_{[\sigma]}(x)X(x)\, d\,[\sigma]$$

проинтегрируем дважды по часатям равенство (74), с учетом

$$\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, d\,[\sigma] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (75)$$

принимает вид

$$- pX_\mu'\varphi_j \Big|_0^\ell + Xp{\varphi_j}'_\mu \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \left(p{\varphi_j}'_\mu\right)'_{[\sigma]} X\, d\,[\sigma] - \lambda_j \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x)X(x)\, d\,[\sigma] + \\ + \nu_j + p{\varphi_j}'_\mu X \Big|_0^\ell - pX_\mu'\varphi_j \Big|_0^\ell + \int_0^\ell \left(pX_\mu'\right)'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x)\, d\,[\sigma] + \\ + \lambda_j \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x)X(x)\, d\,[\sigma] = 0, \quad (76)$$

или, используя равенство (70) и краевые условия $X(0) = X(\ell) = 0$, которым должны удовлетворять функции $X(x)$ и все $\varphi_i(x), \nu_j = 0$. В силу произвола j мы получаем требуемое.

Таким образом, $X(x)$ есть n-ая собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n, причем, как нетрудно видеть, $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ и между λ_{n-1} и λ_n нет других собственных значений.

Более того, значение функционала $\Phi(X)$ на функции $X(x)$, удовлетворяющей условиям (60) и (70) не меньше λ_n.

Таким образом, неравенство (55) доказано.

Далее, из (55) вытекает

$$\Delta_N \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left[\Phi(h) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k {c_k}^2\right], \quad (77)$$

а так как $\lambda_{N+1} \to +\infty$ при $N \to +\infty$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N = 0$.

Как следует из результатов работ [11] следует, что $\lambda_{N+1} \to +\infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k {c_k}^2 \leqslant \Phi(h). \tag{78}$$

Переходя к пределу $N \to +\infty$ получим аналог равенства Парсеваля.

Неравенство (48) и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2$ сходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

9. Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. — М., 1949. — 494 с.

10. Шабров, С. А. О μ-регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — 1999. — С. 166–169.

11. Зверева, М. Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса / М. Б. Зверева. — Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю. В. Покорный, 2005. — 120 с.

12. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М. : Наука, 1980. — 464 с.

13. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1956. — 632 с.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

9. Saks S. Theory of the Integral. [Saks S. Teoriya integrala]. Moscow, 1949, 494 p.

10. Shabrov S.A. On the μ–regularization of a function with finite variation. [Shabrov S.A. O μ-regulyarizacii funkcii s konechnym izmeneniem]. *Sbornik statej aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU — The collection of articles of students and postgraduates of mathematical faculty of VSU*, 1999, pp. 166–169.

11. Zvereva M.B. On Some Issues in the Qualitative Theory of Differential Equations with Stieltjes Derivatives. [Zvereva M.B. O nekotoryh voprosah kachestvennoj teorii differencial'nyh uravnenij s proizvodnymi Stilt'esa]. Voronezh State University; scientific supervisor Yu.V. Pokorny, 2005, 120 p.

12. Titchmarsh E. Theory of functions. [Titchmarsh E. Teoriya funkcij]. Moscow: Nauka, 1980, 464 p.

13. Levin B.Ya. The distribution of roots of entire functions. [Levin B.Ya. Raspredelenie kornej celyx funkcij]. Moscow, 1956, 632 p.

Марфин Даниил Евгеньевич, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: danil-marfin@yandex.ru

Daniil Evgenievich Marfin, Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: danil-marfin@yandex.ru

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежсского государственного университета, кандидат физико-математических наук, Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Садчиков Павел Валерьевич, доцент кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Sadchikov Pavel Valerievich, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia