

МЕТОД ОДНОВРЕМЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Е. И. Иохвидов

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 23.04.2025 г.

Аннотация. Исследуются квадратные матрицы произвольного порядка n с произвольными, вообще говоря, комплексными элементами. По элементам квадратной матрицы строится квадратичная система, состоящая из $n - 1$ алгебраических уравнений с $n - 1$ неизвестными. Каждое решение этой системы даёт пару $\{\lambda; \mathbf{h}\}$, где λ — собственное значение матрицы, а $\mathbf{h}$ — соответствующий собственный вектор. При этом и λ , и $\mathbf{h}$ выписываются по найденному решению сразу, без дальнейших вычислений. В конечном счёте получаем собственное значение и координаты собственного вектора в виде выражений, зависящих от элементов исходной матрицы. Заметим, что метод не требует решения характеристического (векового) уравнения.

Ключевые слова: собственные значения и векторы, квадратичная система уравнений, опорная строка.

THE METHOD OF SIMULTANEOUS COMPUTATION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A SQUARE MATRIX

E. I. Iohvidov

Abstract. Square matrices of arbitrary order n with arbitrary, generally complex, elements are studied. A quadratic system consisting of $n - 1$ algebraic equations in $n - 1$ unknowns is constructed based on the elements of the square matrix. Each solution of this system yields a pair $\{\lambda; \mathbf{h}\}$, where λ is an eigenvalue of the matrix and $\mathbf{h}$ is the corresponding eigenvector. Both λ and $\mathbf{h}$ are obtained directly from the solution without further computations. As a result, the eigenvalue and the coordinates of the eigenvector are expressed in terms of the elements of the original matrix. It is worth noting that the method does not require solving the characteristic (secular) equation.

Keywords: eigenvalues and eigenvectors, quadratic system of equations, pivot row.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

В общем случае для матрицы порядка n можно составить в точности n различных систем. Всё зависит от выбора строки исходной матрицы. Будем называть эту строку **опорной** строкой. Заметим сразу, что от выбора опорной строки зависит степень сложности решения соответствующей системы. Для большей наглядности ограничимся случаем $n = 3$. Итак, пусть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & k & m \\ p & r & s \end{pmatrix}$$

— матрица размером 3×3 с произвольными элементами.

Первой опорной строке соответствует система

$$\begin{cases} x(a + bx + cy) = d + kx + my \\ y(a + bx + cy) = p + rx + sy \end{cases} \quad (1)$$

Второй опорной строке соответствует система

$$\begin{cases} x(dx + k + my) = ax + b + cy \\ y(dx + k + my) = px + r + sy \end{cases} \quad (2)$$

Наконец, для третьей опорной строки имеем систему

$$\begin{cases} x(px + ry + s) = ax + by + c \\ y(px + ry + s) = dx + ky + m \end{cases} \quad (3)$$

Все три системы различны, однако у них есть общие черты. Во-первых, в левых частях уравнений повторяется опорная строка, а в правых частях фигурируют **другие** строки исходной матрицы, причём они следуют в строгом порядке. Во-вторых, в каждой из трёх систем свободный член взят из столбца, номер которого совпадает с номером опорной строки.

Далее, пусть $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ ортонормированный базис в трёхмерном пространстве. Пусть $\{x_1; y_1\}$ некоторое решение системы (1). Тогда матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение

$$\lambda_1 = a + bx_1 + cy_1 \quad (4)$$

и отвечающий ему собственный вектор

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 + y_1\mathbf{e}_3. \quad (5)$$

Пусть, далее, $\{x_2; y_2\}$ какое-то решение системы (2). Тогда матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение

$$\lambda_2 = dx_2 + k + my_2 \quad (6)$$

и отвечающий ему собственный вектор

$$\mathbf{h}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + y_2\mathbf{e}_3. \quad (7)$$

Наконец, некоторое решение $\{x_3; y_3\}$ системы (3) даёт пару $\{\lambda_3; h_3\}$, где

$$\lambda_3 = px_3 + ry_3 + s, \quad (8)$$

$$\mathbf{h}_3 = x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

Как видим, при всех вариантах выбора опорной строки формулы для λ и $\mathbf{h}$ совсем простые, и вся трудность заключается в решении соответствующей квадратичной системы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Сначала рассмотрим случай выбора **первой** опорной строки матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & k & m \\ p & r & s \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Следующие два условия эквивалентны:

- 1) $\{x_1; y_1\}$ - некоторое решение системы (1).
- 2) Имеет место формула

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1\mathbf{h}_1, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + bx_1 + cy_1, \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 + y_1\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем сначала $1) \Rightarrow 2)$.

Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & k & m \\ p & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \\ &= (a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_1 + (d + kx_1 + my_1)\mathbf{e}_2 + (p + rx_1 + sy_1)\mathbf{e}_3 = \\ &= (\text{в силу (1)}) = \lambda_1\mathbf{e}_1 + x_1\lambda_1\mathbf{e}_2 + y_1\lambda_1\mathbf{e}_3 = \lambda_1(\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 + y_1\mathbf{e}_3) = \\ &= \lambda_1\mathbf{h}_1. \text{ Итак, имеем } \mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1\mathbf{h}_1. \end{aligned}$$

Теперь докажем $2) \Leftarrow 1)$.

Пусть, обратно, матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение

$$\lambda_1 = a + bx_1 + cy_1 \text{ и собственный вектор } \mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 + y_1\mathbf{e}_3.$$

Покажем, что числа $\{x_1; y_1\}$ являются решением системы (1).

В самом деле, левая часть формулы $\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1\mathbf{h}_1$ равна

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = (a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_1 + (d + kx_1 + my_1)\mathbf{e}_2 + (p + rx_1 + sy_1)\mathbf{e}_3,$$

а правая часть

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{h}_1 &= (a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_1 + (a + bx_1 + cy_1)x_1\mathbf{e}_2 + (a + bx_1 + cy_1)y_1\mathbf{e}_3 = \\ &= (a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_1 + x_1(a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_2 + y_1(a + bx_1 + cy_1)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Сравнивая в двух полученных выражениях коэффициенты при ортах $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, получаем, что числа x_1, y_1 - это решение системы (1). Теорема доказана. $\square$

Далее, случай выбора **второй** опорной строки описывает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 2. Если $\{x_2; y_2\}$ некоторое решение системы (2), то матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ_2 и соответствующий собственный вектор $\mathbf{h}_2$, которые вычисляются по формулам

$$\lambda_2 = dx_2 + k + my_2, \quad (11)$$

$$\mathbf{h}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + y_2\mathbf{e}_3. \quad (12)$$

Обратно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение и собственный вектор, заданные формулами (11) и (12), то пара чисел $\{x_2; y_2\}$ является решением системы (2).

И, наконец, выбор **третьей** опорной строки описывает

Теорема 3. Если $\{x_3; y_3\}$ - некоторое решение системы (3), то матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ_3 и собственный вектор $\mathbf{h}_3$, которые вычисляются по формулам

$$\lambda_3 = px_3 + ry_3 + s, \quad (13)$$

$$\mathbf{h}_3 = x_3 \mathbf{e}_1 + y_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

Обратно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ_3 и собственный вектор $\mathbf{h}_3$, определяемые формулами (13) и (14) соответственно, то пара чисел $\{x_3; y_3\}$ является решением системы (3).

ПРИМЕР

Рассмотрим матрицу 4×4 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ k & 0 & m & 0 \\ 0 & p & 0 & r \end{pmatrix}$$

с произвольными, вообще говоря, комплексными элементами.

Выбираем **первую** опорную строку. В этом случае соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x(a + by) &= cx + dz \\ y(a + by) &= k + my \\ z(a + by) &= px + rz \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Второе уравнение этой системы - это квадратное уравнение:

$$by^2 + (a - m)y - k = 0, \quad (16)$$

а его корни суть

$$y_{1,2} = \frac{1}{2b}(m - a \pm R), \quad (17)$$

где

$$R = \sqrt{(m - a)^2 + 4kb}. \quad (18)$$

Далее, первое и третье уравнения системы (15) являются однородными, и можно взять тривиальное решение

$$\{x_{1,2} = 0, z_{1,2} = 0\}. \quad (19)$$

Итак, мы нашли два решения системы (15). Будем считать, что первому из них отвечает знак “минус” перед радикалом R , а второму - знак “плюс”.

Теперь можно вычислить оба собственных значения. В соответствии с вышеописанным алгоритмом вычисляем:

$$\lambda_1 = a + by_1 = a + \frac{1}{2}(m - a - R),$$

или, окончательно,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(m + a - R). \quad (20)$$

Аналогично получим и второе собственное значение:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(m + a + R). \quad (21)$$

Так как сейчас мы используем **первую** опорную строку, то, согласно нашему алгоритму, коэффициент при **первом** орте $\mathbf{e}_1$ должен быть равен единице. Следовательно, если считать, что

$$\lambda_1 \longleftrightarrow \mathbf{h}_1, \lambda_2 \longleftrightarrow \mathbf{h}_2, \quad (22)$$

то собственные векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ вычисляются так:

$$\tilde{\mathbf{h}}_1 = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2b}(m - a - R)\mathbf{e}_3$$

или, в окончательном виде:

$$\mathbf{h}_1 = (2b)\mathbf{e}_1 + (m - a - R)\mathbf{e}_3. \quad (23)$$

Аналогично,

$$\mathbf{h}_2 = (2b)\mathbf{e}_1 + (m - a + R)\mathbf{e}_3. \quad (24)$$

Таким образом, мы нашли две пары,

$$\{\lambda_1; \mathbf{h}_1\} \text{ и } \{\lambda_2; \mathbf{h}_2\}. \quad (25)$$

Далее перейдём к использованию **второй** опорной строки. В этом случае система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x(c + dz) &= ax + by \\ y(c + dz) &= kx + my \\ z(c + dz) &= p + rz \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Здесь третье уравнение - квадратное, и его корни такие:

$$z_{3,4} = \frac{1}{2d}(r - c \pm S), \quad (27)$$

где

$$S = \sqrt{(r - c)^2 + 4dp}. \quad (28)$$

Первым двум уравнениям системы (26) очевидно удовлетворяет тривиальное решение:

$$\{x_{3,4} = 0, y_{3,4} = 0\}$$

Вычисляем собственные значения.

$$\lambda_3 = c + dz_3 = c + \frac{1}{2}(r - c - S),$$

или окончательно

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(r + c - S). \quad (29)$$

Аналогично

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}(r + c + S). \quad (30)$$

Одновременно выписываем собственные векторы $\mathbf{h}_3$ и $\mathbf{h}_4$. Так как сейчас мы используем **вторую** строку, то коэффициент единица должен быть перед **вторым** ортом $\mathbf{e}_2$. Поэтому имеем:

$$\tilde{\mathbf{h}}_3 = \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2d}(r - c - S)\mathbf{e}_4$$

или в окончательном виде:

$$\mathbf{h}_3 = (2d)\mathbf{e}_2 + (r - c - S)\mathbf{e}_4.$$

Точно так же получаем:

$$\mathbf{h}_4 = (2d)\mathbf{e}_2 + (r - c + S)\mathbf{e}_4.$$

Итак, используя наш метод, мы вычислили все собственные значения

$$\{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4\}$$

исходной матрицы A , а также нашли соответствующие собственные векторы

$$\{\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2; \mathbf{h}_3; \mathbf{h}_4\}.$$

При этом нам не пришлось решать характеристическое уравнение.

ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. Описанный в этой работе метод был открыт (достаточно неожиданно) в ходе исследований автора по теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой (см. [1]).

Замечание 2. Возможно, что наш метод окажется полезным и в тех случаях, когда решение квадратичной системы найдено каким-нибудь численным методом (см., например, [2]).

Замечание 3. Автор признателен Воевудскому В. П. и Дёшиной А. Е. за обсуждение статьи и набор рукописи в формате LaTeX.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — Москва : Наука, 1986. — 352 с.
2. Хемминг, Р. В. Численные методы (для научных работников и инженеров) / Р. В. Хемминг. — Москва : Наука, 1968. — 399 с.

REFERENCES

1. Azizov T.Ya., Iohvidov I.S. Theory of linear operators in spaces with an indefinite metric. [Azizov T.YA., Iohvidov I.S. Osnovy, teorii linejnyh operatorov v prostranstvah s indefinitnoj metrikoj]. Moscow: Nauka, 1986, 352 p.
2. Hamming R. Numerical Methods for Researchers and Engineers. [Hemming R.V. Chislennyye metody (dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov)]. Moscow: Nauka, 1968, 399 p.

Иохвидов Евгений Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Россия
E-mail: 2199199@mail.ru

Iohvidov Eugueniy Iosifovich, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: 2199199@mail.ru