УДК 517.9

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ*

Е. Д. Федотов

Научно-исследовательский институт математики СВФУ

Поступила в редакцию 10.02.2025 г.

Аннотация. В данной работе получены априорные оценки для задачи Коши для однородной системы уравнений высокого порядка в частных производных с дробной производной Герасимова–Капуто по времени.

Ключевые слова: функция Миттаг-Леффлера, дробная производная, система уравнений в частных производных, производная Герасимова–Капуто, преобразование Фурье, дробное исчисление.

A PRIORI ESTIMATES OF THE CAUCHY PROBLEM WITH CONSTANT COEFFICIENTS OF A HOMOGENEOUS SYSTEM OF HIGHER-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GERASIMOV-CAPUTO FRACTIONAL TIME DERIVATIVE

E. D. Fedotov

Abstract. In this paper, we obtain a priori estimates for the Cauchy problem for a homogeneous system of high–order partial differential equations with a fractional Gerasimov-Caputo time derivative.

Keywords: Mittag–Leffler function, fractional derivative, system of partial differential equations, Gerasimov–Caputo derivative, Fourier transform, fractional calculus.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, существует большое количество разных определений дробной производной которая является обобщением производной целого порядка. В данной работе мы будем использовать определение дробной производной Герасимова-Капуто [1], [2], [3]. Следует также отметить, что работа Герасимова [2] вышла раньше работы Капуто [3].

В случае $0 < \alpha < 1$ данная производная определяется следующим образом:

$$\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\varphi(t),$$

* Разделы 1, 3 выполнены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSRG–2023–0025. Раздел 2 выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075–02–2025–1792

где $\mathcal{I}^{\alpha}_{0t}$ является дробным интегралом Римана–Лиувилля и определятся следующим образом:

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{0t}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau.$$

В данной работе под $(\partial^{\alpha}_{0t})^k$ стоит понимать конкатенацию, а именно $(\partial^{\alpha}_{0t})^k = \underbrace{\partial^{\alpha}_{0t}\partial^{\alpha}_{0t}\ldots\partial^{\alpha}_{0t}}_{k}$. Также отметим, что эту операцию можно представить как производную Джрбашяна–Нерсесяна [4]

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе R. Gorenflo и F. Mainardi [5] была показана реализуемость метода преобразования Лапласа для решения уравнений дробного порядка и важность функции Миттаг – Леффлера в дробном исчислении. Функция Миттаг – Леффлера представляется следующим рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать оценки данной функции, в работе А.Ю.Попова и А.М.Селедцкого [6] были получены следующие асимптотические разложения:

$$\mathcal{L}_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}|\, z \neq 0, ;\ |\arg z| \leqslant \alpha\pi\}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases}\alpha^{-1}z^{(1-\beta)/\alpha}\exp(z^{1/\alpha}) + H_m(z) + R^{[1]}_m(z); & z \in \mathcal{L}_{\alpha}\\ H_m(z) + R^{[2]}_m; & z \in \mathbb{C}/\mathcal{L}_{\alpha}, z \neq 0,\end{cases}$$

где

$$H_m(z) = -\sum_{k=1}^{m}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)},$$

а также показано, что остатки $R^{[1]}_m$ и $R^{[2]}_m$ допускают оценки

$$|R^{[i]}_m| \leqslant C|z|^{-m-1}.$$

Пусть $\mathbb{C}^{+}_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}/\{0\}|\,|arg\, z| < \alpha\pi/2\}$, $\mathbb{C}^{0}_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}/\{0\}|\,|arg\, z| = \alpha\pi/2\}$ и $\mathbb{C}^{-}_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}/\{0\}|\,\alpha\pi/2 < |arg\, z| \leqslant \alpha\pi\}$. Также пусть $t \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $0 < \alpha < 1$.

$$E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}) = \begin{cases}\alpha^{-1}\exp(\lambda^{1/\alpha}t) + H_m(\lambda t^{\alpha}) + R(\lambda t^{\alpha}), & \lambda \in \mathbb{C}^{+}_{\alpha}, Re(\lambda^{1/\alpha}) > 0\\ \alpha^{-1}\exp(i|\lambda|^{1/\alpha}t) + H_m(\lambda t^{\alpha}) + R(\lambda t^{\alpha}), & \lambda \in \mathbb{C}^{0}_{\alpha}\\ \alpha^{-1}\exp(\lambda^{1/\alpha}t) + H_m(\lambda t^{\alpha}) + R(\lambda t^{\alpha}), & \lambda \in \mathbb{C}^{-}_{\alpha}, Re(\lambda^{1/\alpha}) < 0\\ H_m(\lambda t^{\alpha}) + R(\lambda t^{\alpha}), & \lambda \in \mathbb{C}/\mathcal{L}_{\alpha}, \lambda \neq 0.\end{cases}$$

Отсюда мы можем получить соответствующие оценки учитывая, что в окрестности нуля она ограничена:

$$|E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})| \leqslant \begin{cases}C|\exp(\lambda^{1/\alpha}t)|, & \lambda \in \mathbb{C}^{+}_{\alpha}, Re(\lambda^{1/\alpha}) > 0,\\ C_1 + \frac{C_2(1+|\lambda|^2)^{1/2}}{1+C_3t^{\alpha}}, & \lambda \in \mathbb{C}^{0}_{\alpha},\\ C_1|\exp(\lambda^{1/\alpha}t)| + \frac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3t^{\alpha}}, & \lambda \in \mathbb{C}^{-}_{\alpha}, Re(\lambda^{1/\alpha}) < 0,\\ \frac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3t^{\alpha}}, & \lambda \in \mathbb{C}/\mathcal{L}_{\alpha}, \lambda \neq 0.\end{cases}$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered} P\left(\partial_{0t}^{\alpha},D_x\right)u(t,x)=\sum_{k+|\beta|=m}A_{k,\beta}\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k}D_x^{\beta}u(t,x)=0,\quad 0<\alpha<1,\\ \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k}u(t,x)\Big|_{t=0}=\begin{cases}0, & k=0,\dots,m-2,\\ f(x), & k=m-1,\end{cases}\end{gathered} \tag{1}$$

где $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$–мультииндекс, $A_{k\beta}$–квадратные матрицы с постоянными коэффициентами размера $N\times N$, ∂_{0t}^{α}–дробная производная Герасимова-Капуто порядка α, $D_x^{\beta}=\partial^{|\beta|}/\partial_{x_1}^{\beta_1}\dots\partial_{x_n}^{\beta_n}$ и $|\beta|=\beta_1+\dots+\beta_n$. При этом предполагаем что $A_{m,0}=E$.

Решение будем искать в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ix*y}Z(t,y)\widehat{f}(y)dy. \tag{2}$$

Тогда для матрицы $Z(t,y)$ мы получим следующую задачу Коши:

$$P\left(\partial_{0t}^{\alpha},iy\right)Z(t,y)=0,\quad 0<\alpha<1,$$

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k}Z(t,y)\Big|_{t=0}=\begin{cases}0, & k=0,\dots,m-2,\\ E, & k=m-1,\end{cases}$$

$$Z(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(P(i\lambda,iy)\right)^{-1}E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})d\lambda,$$

где контур Γ содержит в себе все mN корней, характеристического уравнения $det(P(\lambda,y))=0$.

Прямой подстановкой несложно проверить что

$$P\left(\partial_{0t}^{\alpha},iy\right)Z(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}P\left(\partial_{0t}^{\alpha},iy\right)E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})\left(P(i\lambda,iy)\right)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})d\lambda=0$$

$$P(i\lambda,iy)=(i\lambda)^{m}P(1,y/\lambda)=(i\lambda)^{m}(E-B),\ B=-\sum_{\substack{k+|\beta|=m\\ k\neq m}}A_{k,\beta}y^{\beta}/\lambda^{|\beta|}$$

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k}Z(t,y)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}(i\lambda)^{k}\left(P(i\lambda,iy)\right)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}(i\lambda)^{k-m}\left(E+B+B^2+\dots\right)d\lambda.$$

Функция определенная формулой (2) является формальным решением задачи (1). Обозначим за $Q(\lambda,y)=\det(P(\lambda,y))$. Также в силу однородности $P(\lambda,y)$ мы получим что корни представимы в виде $\lambda_k=\mu_k|y|$, обозначим за $\eta=y/|y|$ тогда $Q(\lambda,y)=|y|^{mN}Q(\mu,\eta)$.

Далее будем предполагать, что $Q(\lambda,y)$ не имеет кратных корней. Тогда мы можем явно вычислить $Z(t,y)$ методом вычетов и получим выражение

$$Z(t,y)=\sum_{k=1}^{mN}(i)^{1-m}\frac{C_p^{*}(\lambda_k,y)}{Q_{\lambda}(\lambda_k,y)}E_{\alpha}(i\lambda_k t^{\alpha}),$$

где $C_p^{*}(\lambda,y)$ является союзной матрицей (транспонированная матрица алгебраических дополнений) матрицы $P(\lambda,y)$. В силу однородности $P(\lambda,y)$ мы получим

$$\begin{aligned}&P(i\lambda_k,iy)=(i|y|)^{m}P(\mu_k,\eta),\ \lambda_k=\mu_k|y|,\ y=\eta|y|,\ |\eta|=1,\\ &Q(\lambda_k,y)=det(P(\lambda_k,y))=|y|^{mN}det(P(\mu_k,\eta)),\\ &C_p^{*}(\lambda_k,y)=|y|^{m(N-1)}C_p^{*}(\mu_k,\eta).\end{aligned}$$

Так как $Q_\mu(\mu_k,\eta) \neq 0$, и μ_k непрерывно зависит от η то $|Q_\mu(\mu_k,\eta)| \geqslant b$, также элементы матрицы $C_p^*(\mu_k,\eta)$ будут ограниченны некоторой константой, или же $|C_p^*(\mu_k,\eta)| \leqslant B$. Также принимая во внимание оценки функции Миттаг-Леффлера мы получим что $i\mu_k$ должны лежать в области $\mathbb{C}/\mathbb{C}_\alpha^+$.

3.1. Априорные оценки

Из вышесказанного мы можем найти оценки для $(\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t,y)$:

$$| (\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t,y)| \leqslant C|y|^{1+k-m} \left|\sum_{k=1}^{mN} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha)\right|.$$

Уточним случай при $|y| \to 0$:

$$\lim_{|y|\to 0} (\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t,y) = \lim_{|y|\to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma (P(i\lambda,iy))^{-1} (i\lambda)^k E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma ((i\lambda)^m E)^{-1} (i\lambda)^k \times$$

$$\times E_\alpha(i\lambda t^\alpha) d\lambda = \frac{i^{1+k-m}}{(m-k)!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m-k-1} E_\alpha(i\lambda t^\alpha)\Big|_{\lambda=0} = \frac{(t^\alpha)^{m-k-1}}{(m-k)\Gamma(\alpha(m-k-1)+1)}.$$

Как видим, при $k \leqslant m-1$ особенностей не возникает. А при $k \geqslant m$ контурный интеграл будет равен нулю. Тогда мы можем переписать оценку при $k \leqslant m-1$ следующем виде:

$$| (\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t,y)| \leqslant C \left(1+|y|^2\right)^{(1+k-m)/2} \left|\sum_{k=1}^{mN} E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha)\right|.$$

Оценки функции Миттаг–Леффлера зависят от сектора, в котором лежат λ_k. Если предположить, что $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^0$ для любого $y \in \mathbb{R}_+$, тогда мы получим

$$| (\partial_{0t}^\alpha)^k Z(t,y)| \leqslant C \left(1+|y|^2\right)^{(1+k-m)/2},$$

где $C > 0$. Тогда для $u(t,x)$ используя равенство Парсеваля, получим

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} | (\partial_{0t}^\alpha)^k D_x^\beta u(t,x)|^2 dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Аналогично мы можем найти оценки и для остальных случаев. При $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^-$

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} | (\partial_{0t}^\alpha)^k D_x^\beta u(t,x)|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(C_1 |\exp(C_2|y|^{1/\alpha})| + \frac{C_3(1+|y|^2)^{1/2}}{1+C_4 t^\alpha}\right) |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

При $i\lambda_k \in \mathbb{C}/\mathcal{L}_\alpha$ для любых $y \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} | (\partial_{0t}^\alpha)^k D_x^\beta u(t,x)|^2 dx \leqslant \frac{C_1}{(1+C_2 t^\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-1} |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

Случай при $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^+$ не будем рассматривать так как функция Миттаг-Леффлера неограниченно растет, как $\exp(C|y|^{1/\alpha})$.

3.2. Обсуждение результатов

В случае $i\lambda_k \in \mathbb{C}_\alpha^0$ для любых $y \in \mathbb{R}_+$, можно с некоторой уверенностью сказать, что система является гиперболической. Так как полученные оценки являются оценками по сечению времени, мы можем оценить его дробные производные при $t = \tau_1 > 0$ и получим, что

$$(\partial_{0t}^\alpha)^k u(t,x)\Big|_{t=\tau_1} = f_k^{[1]}(x),$$

$$|\widehat{f}_k^{[1]}(y)| \sim \left(1+|y|^2\right)^{(1+k-m)/2} |\widehat{f}(y)|.$$

Решим соответствующую задачу Коши, начиная уже с этого момента. Сдвинув задачу на τ_1 получим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} &P\left(\partial_{0t}^{\alpha}, D_x\right) u^{[1]}(t,x) = \sum_{k+|\beta|=m} A_{k,\beta} \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta} u^{[1]}(t,x) = 0, \quad 0<\alpha<1 \\ &\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k u^{[1]}(t,x)\Big|_{t=0} = f_k^{[1]}(y), k=0,\ldots,m-1 \end{aligned} \tag{3}$$

Для получения оценок поступим следующим образом. В силу однородности нашего уравнения мы решим задачу Коши для каждого отдельного $f_k^{[1]}(y)$, т.е. полагая все начальные данные равными нулю кроме одного некоторого $k=r$. Получение оценок не будет отличаться от того, как мы их получали до этого, с той лишь разницей что

$$Z_r(t,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} (i\lambda)^{m-1-r} \left(P(i\lambda, iy)\right) E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) d\lambda.$$

Получим следующие оценки:

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta} u^{[1]}(t,x)|^2 dx \leqslant C \sum_{r=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|y|^2\right)^{m-1-r} |\widehat{f}_k^{[1]}(y)|^2 dy \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

Отсюда видно, что $u(t,x)$ с течением времени, в сечении по времени не становится «хуже» по x.

В случае если $i\lambda_k \in \mathbb{C}_{\alpha}^{-}$ для любых $y \in \mathbb{R}_+$, получим задачу (3) где

$$|\widehat{f}_k^{[1]}(y)|^2 \sim \left(C_1 \exp(-2C_2|y|^{1/\alpha}\tau_1) + C_3\left(1+|y|^2\right)^{-1}\right)\left(1+|y|^2\right)^{1+k-m} |\widehat{f}(y)|^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta} u^{[1]}(t,x)|^2 dx \leqslant \sum_{r=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(C_1 \exp(-2C_2|y|^{1/\alpha}t) + \\ + C_3 \frac{\left(1+|y|^2\right)^{-1}}{(1+C_4 t^{\alpha})^2}\Big) \left(1+|y|^2\right)^{1+r-m} |\widehat{f}_r^{[1]}(y)|^2 dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \Big(C_1 \exp(-2C_2|y|^{1/\alpha}t) + \\ + C_3 \frac{\left(1+|y|^2\right)^{-1}}{(1+C_4 t^{\alpha})^2}\Big) \left(C_1 \exp(-2C_2|y|^{1/\alpha}\tau_1) + C_3\left(1+|y|^2\right)^{-1}\right) |\widehat{f}(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

При малых τ_1, как видим, оценка особо не меняется. Получили, что задача (3) в данном случае будет похожа на параболическую. Отметим, что при $\alpha \to 1$ степенная часть исчезнет, и останется только экспоненциальная часть.

Случай $i\lambda_k \in \mathbb{C}/\mathcal{L}_{\alpha}$ не поддается анализу с помощью изложенного метода. Ведь если продолжим, получим что

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta} u^{[1]}(t,x)|^2 dx \leqslant \frac{C_1}{(1+C_2 t^{\alpha})^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-2} |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

Теперь если мы еще несколько раз реализуем эту схему, получим что

$$\max_{k+|\beta|\leqslant m-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta} u^{[q]}(t,x)|^2 dx \leqslant \frac{C_1}{(1+C_2 t^{\alpha})^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-q-1} |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

Отсюда получим что решение за любое ненулевое время становится сколь угодно малым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // ПММ. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 251–260.

3. Caputo, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Annali Geofis. — 1966. — V. 19. — P. 383–393.

4. Джрбашян, М. М. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнение дробного порядка / М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян // Изв. АН АрмССР. Матем. — 1968. — № 3. — С. 3–28.

5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order / R. Gorenflo, F. Mainardi // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. — 1997. — P. 223–276.

6. Попов, А. Ю. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера / А. Ю. Попов, А. М. Седлецкий // СМФН. — 2011. — № 40. — С. 3–171.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. Fractional Calculus and Its Applications. [Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

2. Gerasimov A.N. A generalization of linear laws of deformation and its application to the problems of internal friction. [Gerasimov A.N. Obobshchenie linejnyh zakonov deformirovaniya i ego primenenie k zadacham vnutrennego treniya]. *PMM — Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260.

3. Caputo M.Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Annali Geofis., 1966, vol. 19, pp. 383–393.

4. Jrbashyan M.M., Nersesyan A.B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for fractional differential equations. [Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differencial'nyh uravnenie drobnogo poryadka]. *Izv. AN ArmSSR. Matem. — Izv. AN ArmSSR. Matem.*, 1968, no. 3, pp. 3–28.

5. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, 1997, pp. 223–276.

6. Popov A.Yu., Sedletsky A.M. Distribution of the roots of the Mittag–Leffler functions. [Popov A.YU., Sedleckij A.M. Raspredelenie kornej funkcij Mittag-Lefflera]. *SMFN — SMFN*, 2011, no. 40, pp. 3–171.

Федотов Егор Дмитриевич, мл. науч. сотр., Научно-исследовательский институт математики СВФУ, Якутск, Россия
E-mail: egorfedotov2011@gmail.com

Fedotov Egor D., junior researcher, Scientific Research Institute of Mathematics, Yakutsk, Russia
E-mail: egorfedotov2011@gmail.com