

О РАЗРЕШИМОСТИ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ МОДЕЛИ BOUC-WEN С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Л. В. Стенюхин

*Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 17.12.2024 г.

Аннотация. В работе рассматривается простейшая одномерная гистерезисная модель Bouc-Wen с оператором дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля. Получены локальные решения задачи в терминах функций Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: гистерезис, модель Bouc-Wen, производная Римана-Лиувилля, функция Миттаг-Леффлера.

ON THE SOLVABILITY OF THE BOUC-WEN HYSTERESIS MODEL WITH A FRACTIONAL DIFFERENTIATION OPERATOR

L. V. Stenyukhin

Abstract. The paper considers the simplest one-dimensional Bouc-Wen hysteresis model with the Riemann-Liouville fractional order differentiation operator. Local solutions of the problem are obtained in terms of Mittag-Leffler functions.

Keywords: hysteresis, Bouc-Wen model, Riemann-Liouville derivative, Mittag-Leffler function.

ВВЕДЕНИЕ

Гистерезис встречается в самых разных процессах, в которых динамические соотношения между входными и выходными данными переменных включают в себя эффекты памяти. Примеры можно найти в биологии, оптике, электронике, сегнетоэлектричестве, магнетизме, механике, структурах и других областях. Для описания поведения гистерезисных процессов было предложено несколько математических моделей [1]: модель Дюгема [2] использует свойство, согласно которому выходной сигнал гистерезисной системы меняет свой характер при изменении направления входного сигнала; оператор гистерезиса Ишлинского был предложен в качестве модели пластичности-эластичности [3], а модель Прейсаха использовалась для моделирования электромагнитного гистерезиса [4]. Обзор математических моделей гистерезиса можно найти в [5], [6], [7].

Существенное продвижение в исследовании гистерезисных моделей имеется в работах профессора М.Е. Семенова и его учеников [8], [9], которому автор выражает глубокую благодарность.

Методы оптимального управления применялись Л. В. Стенюхиным в решении различных задач [10], [11], [12].

В настоящей работе рассматривается простейшая одномерная гистерезисная модель Воус-Вен с оператором дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля. Получены локальные решения задачи в терминах функций Миттаг-Леффлера.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ГИСТЕРЕЗИСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Физическая система с гистерезисом модели Воус-Вен описывается гомотопическим отображением

$$\Phi_{BW}(u, z, t) = \alpha k u(t) + (1 - \alpha) D k z(t), \quad (1.1)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, $k > 0$, $D > 0$ и $u(t)$, $z(t)$ — кусочно-дифференцируемые функции, связанные уравнением

$$\dot{z}(t) = \dot{u}(t) (\alpha - [\beta \operatorname{sign}(z(t) \dot{u}(t)) + \gamma] |z(t)|^n), \quad (1.2)$$

$\alpha, \beta > 0$, γ, n — числа, $n \in \mathbb{N}$, $\dot{z}, \dot{u}$ — производная по времени, $t \in [-a; a]$, $a > 0$.

Положим, что эволюция модели определяется гармоникой

$$u(t) = A \sin \omega t, \quad \dot{u}(t) = A \omega \cos \omega t,$$

$$\beta_i = \beta \operatorname{sign}(z(t) \dot{u}(t)) + \gamma = \begin{cases} \beta_1 = -\beta + \gamma, \\ \beta_2 = \beta + \gamma, \end{cases} \quad i = 1; 2. \quad (1.3)$$

Тогда уравнение гистерезиса (1.2) примет вид

$$\dot{z}(t) = A \omega \cos \omega t (\alpha - \beta_i |z(t)|^n), \quad (1.4)$$

$$\beta_i = \beta \operatorname{sign}(A \omega z(t) \cos \omega t) + \gamma, \quad i = 1; 2.$$

Представим отрезок определения функций $z(t)$, $u(t)$ в виде объединения отрезков, на которых знаки выражения (1.3) однозначно и будем полагать дифференцируемость функций $z(t)$, $u(t)$ на отрезках разбиения, $[-a; a] = \bigcup_{k=1}^n [t_{k-1}; t_k]$, $t_0 = -a$, $t_n = a$, $z_k = z(t_k)$.

На отрезках разбиения уравнение (1.4) можно записать в виде

$$A \sin \omega t = \int_{z_k}^z \frac{dz}{\alpha - \beta_i |z(t)|^n}, \quad (1.5)$$

β_i определены в (1.3).

Проинтегрируем уравнение (1.5) для $n = 1$. Так как

$$\int_{z_k}^z \frac{dz}{\alpha - \beta_i |z(t)|} = -\frac{1}{\beta_i} \operatorname{sign} z \cdot \ln |\alpha - \beta_i |z(t)|| + \tilde{C}(z_k), \quad (1.5)$$

то уравнение (1.5) запишется в виде

$$\ln |\alpha - \beta_i |z(t)||^{\operatorname{sign} z} = -A \beta_i \sin \omega t + \beta_i \tilde{C}(z_k)$$

или

$$\left(\alpha - \beta_i |z(t)| \right)^{\operatorname{sign} z} = e^{\beta_i \tilde{C}(z_k)} \cdot e^{-A \beta_i \sin \omega t}.$$

Если $\text{sign} z = 1$, $\alpha - \beta_i |z(t)| = C_i(z_k) e^{-A\beta_i \sin \omega t}$, то

$$|z(t)| = \frac{\alpha}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_i} C_i(z_k) e^{-A\beta_i \sin \omega t}. \quad (1.6)$$

Если $\text{sign} z = -1$, $\alpha - \beta_i |z(t)| = C_i^{-1}(z_k) e^{A\beta_i \sin \omega t}$, то

$$|z(t)| = \frac{\alpha}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_i} C_i^{-1}(z_k) e^{A\beta_i \sin \omega t}. \quad (1.7)$$

Объединяя случаи (1.6) и (1.7), получим

$$|z(t)| = \frac{\alpha}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_i} C_i^{\pm 1}(z_k) e^{\mp A\beta_i \sin \omega t}, \quad (1.8)$$

$C_i(z_k) = e^{\beta_i \tilde{C}(z_k)}$, $i = 1; 2$ — интегральные константы.

Проинтегрируем уравнение (1.5) для $n = 2$. Так как

$$\int_{z_k}^z \frac{dz}{\alpha - \beta_i z^2} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta_i}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_i} z + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta_i} z - \sqrt{\alpha}} \right| + \tilde{C}(z_k), & \beta_i > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\alpha\beta_i}} \arctan \frac{\sqrt{-\beta_i} z}{\sqrt{\alpha}} + \tilde{C}(z_k), & \beta_i < 0, \end{cases}$$

то имеем

1 случай, $\beta_i > 0$.

$$\ln \left| \frac{\sqrt{\beta_i} z + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta_i} z - \sqrt{\alpha}} \right| = 2\sqrt{\alpha\beta_i} (A \sin \omega t - \tilde{C}(z_k)),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\beta_i} z + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta_i} z - \sqrt{\alpha}} = C_i(z_k) \cdot e^{2\sqrt{\alpha\beta_i} A \sin \omega t}, \quad (1.9)$$

где $C_i(z_k) = e^{-2\sqrt{\alpha\beta_i} \tilde{C}(z_k)}$, $i = 1; 2$ — интегральные константы.

2 случай, $\beta_i < 0$.

$$\arctan \frac{\sqrt{-\beta_i} z}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-\alpha\beta_i} A \sin \omega t - \sqrt{-\alpha\beta_i} \tilde{C}(z_k). \quad (1.10)$$

Обозначим $C_i(z_k) = \sqrt{-\alpha\beta_i} \tilde{C}(z_k)$. Обращая равенство (1.10) при условии

$$-\pi < 2\sqrt{-\alpha\beta_i} A \sin \omega t - 2C_i(z_k) < \pi, \quad (1.11)$$

получим

$$z = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta_i}} \tan \left(\sqrt{-\alpha\beta_i} A \sin \omega t - C_i(z_k) \right). \quad (1.12)$$

2. МОДЕЛЬ ТИПА ВОУС-ВЕН ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим физическую систему гистерезисного типа Вouc-Wen (1.1) – (1.4) с дифференциальным оператором дробного порядка α при $n = 1$ с начальным условием, получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = -A\beta_i \omega \cos \omega t |z(t)| + A\alpha \omega \cos \omega t, \\ \left. \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} z(t) \right|_{t=+0} = b_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь и ниже

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = (\mathcal{D}_{0+}^\alpha z)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

правая производная Римана-Лиувилля.

Вначале рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = -A\beta_i \omega \cos \omega t |z(t)|, \\ \left. \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} z(t) \right|_{t=+0} = b_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для разрешимости задачи (2/2) воспользуемся фактами из теории дифференциальных уравнений [КСМ]. Рассмотрим задачу Коши для дробного порядка с начальным условием

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = f(t, z), 0 < \alpha \leq 1, \\ \left. \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} z(t) \right|_{t=+0} = b, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $f(t, z)$, α, b — заданные функции и постоянные величины, $-\lceil -\alpha \rceil = 1$. Обозначим через R_1 следующее множество точек $(t, z) \in D \subset \mathbb{R}^2$:

$$R_1 = \left\{ (t, z) \in D : 0 < t \leq h, \left| t^{1-\alpha} z(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq a \right\}, \quad (2.4)$$

$$a > \frac{hb}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$\Gamma(\alpha)$ — гамма функция.

Теорема 1. Пусть $f(t, z)$ — непрерывная в D функция, удовлетворяющая по z условию Липшица

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq A|z_1 - z_2|$$

и ограничению $\sup_{(t,z) \in D} |f(t, z)| = b_0 < \infty$. Тогда решение задачи Коши (2.3) существует и единственно в R_1 и представимо в виде

$$z(t) = b \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau, z) d\tau.$$

В частности, решение задачи

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = \lambda z(t)$$

является

$$z(t) = b \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{t^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} = b t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha),$$

а решением задачи

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} z(t) = \lambda z(t) + h(t)$$

является

$$z(t) = b \cdot t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau,$$

где $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ — функция Миттаг-Леффлера, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$, $\alpha, \beta > 0$.

Функция $f(t, z) = -A\beta_i\omega \cos \omega t |z(t)|$ очевидно удовлетворяет условию Липшица и её супремум конечен на области D , поэтому в силу теоремы 1, задача (2.2) и задача (2.1) разрешимы и имеют единственные решения.

Для нахождения решения задачи (2.2), сначала построим итерации решения. Пусть

$$z_0(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Рассмотрим итерации

$$z_m(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot \cos \omega \tau \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau.$$

Потребуем принадлежность точек $(t, z_m(t)) \in R_1$ при $0 < t \leq h$. Из условия $\sup_{(t,z) \in D} |f(t,z)| = b_0$ следуют оценки

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha} z_m(t) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| &= \left| \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot (-A\beta_i\omega) \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot \cos \omega \tau \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{A\beta_i\omega b_0 x}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{A\beta_i\omega b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)} < a, \end{aligned}$$

получим принадлежность точек $(t, z_m(t)) \in R_1$ при $0 < t \leq h$. Оценим разность $z_2(t) - z_1(t)$. Из предыдущей оценки и условия Липшица

$$\begin{aligned} |z_2(t) - z_1(t)| &= \frac{A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau, z_1(\tau)) - f(\tau, z_0(\tau))) d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{A\beta_i\omega L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot \cos \omega \tau \cdot |z_1(\tau) - z_0(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{A\beta_i\omega L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot \frac{A\beta_i\omega b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)} d\tau \leq \frac{A^2\beta_i^2\omega^2 h^{2\alpha} L}{\Gamma(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

По индукции получим

$$|z_m(t) - z_{m-1}(t)| \leq \frac{A^m \beta_i^m \omega^m h^{m\alpha} L^{m-1}}{\Gamma(m\alpha+1)}.$$

Последовательность $\{z_n(t)\}$ равномерно сходится к $z(t)$.

Оценим погрешности итераций. Для этого в итерациях $z_m(t)$ справа в окрестности нуля имеет место разложение

$$\cos \omega t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!},$$

которое используем в итерациях. Получим

$$z_m(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} +$$

$$+ \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k(\omega\tau)^{2k}}{(2k)!} \right) (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau.$$

Рассмотрим

$$\tilde{z}_m(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau,$$

итерации, определяемые первым слагаемым разложения $\cos \omega t$.

Для $0 < \tau \leq t \leq h$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |z_m(t) - \tilde{z}_m(t)| &= \\ &= \left| \frac{A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \right| \left| \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k(\omega\tau)^{2k}}{(2k)!} (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \right| \sum_{k=1}^n \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \int_0^t \tau^{2k} (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \left| \frac{A\beta_i\omega \max_{t \in [0;h]} |z_{m-1}(t)|}{\Gamma(\alpha)} \right| \sum_{k=1}^n \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \int_0^t \tau^{2k} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \leq \\ &\leq \left| \frac{A\beta_i\omega M_{m-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right| \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\omega^{2k} h^{2k+\alpha}}{(2k)!} \end{aligned}$$

так как $\int_0^t \tau^{2k} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \leq \frac{h^{2k+\alpha}}{\alpha}$ и $M_{m-1} = \max_{t \in [0;t]} |z_{m-1}(t)|$.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Рассмотрим итерации решения

$$z_m(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot \cos \omega\tau \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau.$$

и воспользуемся разложением в окрестности $\tau = 0$

$$\cos \omega t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_m(t) &= b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \\ &+ \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k(\omega\tau)^{2k}}{(2k)!} \right) (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

и рассмотрим главную часть разложения, определяемую первым слагаемым суммы

$$z_m(t) = b_1 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{-A\beta_i\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot |z_{m-1}(\tau)| d\tau,$$

откуда получим

$$z_m(t) = b_1 \cdot \sum_{j=1}^{m+1} (-A\beta_i\omega)^{j-1} \cdot \frac{t^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}.$$

В пределе $m \rightarrow \infty$ имеем следующее представление искомого решения

$$z(t) = b_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (-A\beta_i\omega)^{j-1} \cdot \frac{t^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} = b_1 \cdot t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(-A\beta_i\omega t^\alpha),$$

$E_{\alpha,\beta}(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Решение задачи (2.1) получается методом последовательных приближений, аналогично решению предыдущей задачи и имеет вид

$$z(t) = b_1 \cdot t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(-A\beta_i\omega t^\alpha) + \\ + A\alpha\omega \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[(-A\beta_i\omega)(t-\tau)^\alpha] \cos \omega\tau \, d\tau.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Visintin, A. Differential Models of Hysteresis / A. Visintin. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
2. Duhem, P. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik / P. Duhem // I. Z. Phys. Chem. — 1897. — V. 22. — P. 543–589.
3. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — Москва : Наука, 1983.
4. Preisach, F. Über die magnetische nachwirkung / F. Preisach // Zeit. Phys. — 1935. — V. 94. — P. 277–302.
5. Macki, J. W. Mathematical models for hysteresis / J. W. Macki, P. Nistri, P. Zecca // SIAM Review. — 1993. — № 35(1). — P. 94–123.
6. Bouc, R. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis / R. Bouc // in Proceedings of the Fourth Conference on Non-Linear Oscillations. — 1967. — P. 315.
7. Ikhoulane, F. On the Hysteretic Bouc–Wen Model / F. Ikhoulane, J. Rodellar // Nonlinear Dynamics. — 2005. — V. 42. — P. 63–78.
8. Bouc-Wen model of hysteretic damping / A. M. Solovyov, M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, A. I. Barsukov // Procedia Engineering, 3rd International Conference “Information Technology and Nanotechnology”, ITNT-2017, V. 201, 25–27 April 2017, Samara, Russia. — 2017. — P. 549–555.
9. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A. M. Solovyov [et al.] // Procedia Engineering, 3rd International Conference “Information Technology and Nanotechnology”, ITNT-2017, V. 201, 25–27 April 2017, Samara, Russia. — 2017. — P. 578–583.
10. Стенюхин, Л. В. Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией / Л. В. Стенюхин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 242–245.
11. Стенюхин, Л. В. Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией / Л. В. Стенюхин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия : Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 77–83.
12. Стенюхин, Л. В. О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств / Л. В. Стенюхин // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 11. — С. 51–59.

REFERENCES

1. Visintin A. Differential Models of Hysteresis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
2. Duhem P. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik, I. Z. Phys. Chem., 1897, vol. 22, pp. 543–589.
3. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. [Krasnosel'skij M.A., Pokrovskij A.V. Sistemy s gisterезisom]. Moscow, Nauka, 1983.
4. Preisach F. Über die magnetische nachwirkung, Zeit. Phys., 1935, vol. 94, pp. 277–302.
5. Macki J.W., Nistri P., Zecca P. Mathematical models for hysteresis, SIAM Review, 1993, vol. 35(1), pp. 94–123.
6. Bouc R., Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis, in Proceedings of the Fourth Conference on Non-Linear Oscillations, 1967, p. 315.
7. Faycal Ikhoulane and José Rodellar, On the Hysteretic Bouc–Wen Model, Nonlinear Dynamics, 2005, vol. 42, p. 63–78.
8. Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Barsukov A.I. Bouc-Wen model of hysteretic damping. Procedia Engineering, vol. 201, 3rd International Conference “Information Technology and Nanotechnology”, ITNT-2017, 25–27 April 2017, Samara, Russia, p. 549–555.
9. Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.G. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems. Procedia Engineering, vol. 201, 3rd International Conference “Information Technology and Nanotechnology”, ITNT-2017, 25–27 April 2017, Samara, Russia, p. 578–583.
10. Stenyukhin L.V. On Special Solutions of the Capillary with Circular Symmetry. [Stenyuhin L.V. Ob osobyyh resheniyah zadachi kapillyarnosti s krugovoj simmetriey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 242–245.
11. Stenyukhin L.V. Bifurcation analysis of the problem of capillarity with circular symmetry. [Stenyuhin L.V. Bifurkatsionnyy analiz zadachi kapillyarnosti s krugovoj simmetriey]. *Vestnik YUzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye — Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 77–83.
12. Stenyukhin L.V. Minimal Surfaces with Constraints of Inequality Type. [Stenyuhin L.V. O minimal'nyh poverhnostyakh s ogranicheniyami tipa neravenstv]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2012, no. 11, pp. 45–51.

Стенюхин Леонид Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии, математический факультет, Воронежский государственный университет, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
E-mail: stenyuhin@mail.ru

Stenyukhin Leonid Vitalievich, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: stenyuhin@mail.ru