

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИТЕРИРОВАНИЯ СЕМЕЙСТВА ПОЛИНОМОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

В. С. Секованов¹, Л. А. Секованова²

¹ — *Костромской государственный университет;*

² — *Костромская государственная сельскохозяйственная академия*

Поступила в редакцию 30.03.2025 г.

Аннотация. В данной статье представлены результаты исследования структуры неподвижных точек некоторого семейства полиномов пятой степени, рассмотрены особенности множеств Жюлиа и Мандельброта данного семейства полиномов. Приведены алгоритмы и компьютерные программы построения множества Мандельброта и обрамления множества Мандельброта, заполняющего множества Жюлиа и множества Жюлиа, диска Зигеля, а также их визуализация.

Ключевые слова: неподвижная точка, орбита точки, множество Жюлиа, заполняющееся множество Жюлиа, множество Мандельброта, обрамление множества Мандельброта, структура неподвижных точек, критическая точка, диск Зигеля.

INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF FIXED POINTS OF A FAMILY OF ITERATED POLYNOMIALS OF THE FIFTH DEGREE

V. S. Sekovanov, L. A. Sekovanova

Abstract. This article presents the results of a study of the structure of fixed points of a certain family of polynomials of the fifth degree, and examines the features of the Julia and Mandelbrot sets of this family of polynomials. Algorithms and computer programs for constructing the Mandelbrot set and framing the Mandelbrot set, filling the Julia set and the Julia set, as well as their visualization are presented.

Keywords: fixed point, orbit of a point, Julia set, filling Julia set, Mandelbrot set, framing of the Mandelbrot set, structure of fixed points, critical point.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развивается новое направление науки – голоморфная динамика. Это связано, прежде всего, с ее научной и практической значимостью. Фрактальные множества Жюлиа, которые являются важнейшими объектами голоморфной динамики, нашли применение не только в различных областях науки, но и широко используются в информационных и коммуникационных технологиях. Отметим, что фракталы используются для генерации фрактального шума, применяемого в компьютерной графике и при построении аттракторов в нейросетях. С их помощью можно проводить исследования динамических систем в физике, проводить анализ временных рядов и сигналов, использовать для защиты и сжатия информации. Фрактальная аналитическая геометрия, как раздел математики, является одним из специальных курсов, изучаемых студентами математических специальностей вузов [1, 2].

В учебном пособии “Голоморфная динамика” [1], адресованном специалистам в области нелинейной динамики, аспирантам, бакалаврам и магистрам физико-математических и инженерных направлений подготовки университетов, излагаются основные понятия голоморфной динамики, даются определения фрактальным множествам на комплексной плоскости. В пособии рассматривается динамика итерирования функций комплексной переменной, исследуется структура неподвижных точек полиномов второй, третьей и четвертой степеней, множества Жюлиа и множества Мандельброта.

Результаты исследования структуры неподвижных точек семейства рациональных функций $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$, $c \in \mathbb{C}$, алгоритм построения множества Жюлиа и заполняющего множества Жюлиа для данного семейства функций представлены в статье [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К важнейшим понятиям голоморфной динамики относятся понятия неподвижных точек: притягивающей, нейтральной и отталкивающей.

В настоящей статье мы будем исследовать динамику неподвижных точек семейства итерированных полиномов пятой степени:

$$f_c(z) = z^5 + cz. \quad (1)$$

- 1) Исследуем структуру неподвижных точек;
- 2) Рассмотрим особенности множеств Жюлиа и Мандельброта для данного семейства полиномов;
- 3) Представим алгоритм и компьютерную программу построения множества Жюлиа и заполняющего множества Жюлиа, а также их визуализацию.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем следующие обозначения:

P — притягивающая неподвижная точка z , модуль первой производной в которой меньше единицы;

N — нейтральная неподвижная точка z , модуль первой производной в которой равен единице;

O — отталкивающая неподвижная точка z , модуль первой производной в которой больше единицы.

Будем считать, что семейство функций $f_c(z) = z^5 + cz$ имеет пять (пентада) отталкивающих неподвижных точек z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 и обозначать $(O O O O O)$. Если данное семейство имеет одну притягивающую неподвижную точку и четыре нейтральные, то будем записывать как $(P N N N N)$. Аналогично, определяются случаи $(P O O O O)$, $(N N N N N)$, $(P P O O N)$ и т. д.

Всего имеется 21 вариант или 21 пентада (табл. 1).

Замечание 1. Мы не берем в расчет порядок следования неподвижных точек одного типа, содержащихся в пентаде. Например, последовательности наборов точек $(O O O N P)$ и $(O N O O P)$ мы не различаем.

Замечание 2. Если мы выявили значение c , при котором характер неподвижных точек функции описывает определенная пентада, например, $(P O O O O)$, то для краткости изложения, будем говорить, что имеет место случай $(P O O O O)$ или выполняется условие $(P O O O O)$.

Исследуем структуру неподвижных точек семейства функций $f_c(z) = z^5 + cz$.

Каждая неподвижная точка удовлетворяет уравнению

$$z^5 + cz - z = 0. \quad (2)$$

Таблица 1. Возможные варианты, составляющие структуру неподвижных точек функции $f_c(z) = z^5 + cz$.

1	O O O O O	8	O O O N N	15	N P P P P
2	O O O O P	9	O O N N N	16	O N N N P
3	O O O P P	10	O N N N N	17	O N N P P
4	O O P P P	11	N N N N N	18	O N P P P
5	O P P P P	12	N N N N P	19	O O N N P
6	P P P P P	13	N N N P P	20	O O N P P
7	O O O O N	14	N N P P P	21	O O O N P

Заметим, что $z_0 = 0$ всегда неподвижная точка. Оставшиеся четыре неподвижных точки z_2 , z_3 , z_4 и z_5 являются корнями уравнения

$$z^4 + c - 1 = 0. \quad (3)$$

Решая данное уравнение, получим четыре комплексных корня:

$$z_{2,3,4,5} = \sqrt[4]{1-c}. \quad (4)$$

Заметим, что

$$f'_c(z) = 5z^4 + c. \quad (5)$$

Из определения отталкивающих, притягивающих и нейтральных неподвижных точек семейства функций (1) имеем:

- z — отталкивающая неподвижная точка, если

$$|5z^4 + c| > 1, \quad (6)$$

- z — притягивающая неподвижная точка, если

$$|5z^4 + c| < 1, \quad (7)$$

- z — нейтральная неподвижная точка, если

$$|5z^4 + c| = 1. \quad (8)$$

Отметим, что неподвижная точка $z_1 = 0$ при любом значении параметра c по модулю меньшему единицы — притягивающая, поскольку значение производной в данной точке равно c .

Значения производной в неподвижных точках z_2 , z_3 , z_4 , z_5 вычисляются по формулам:

$$f'_c(z_i) = 1 + 4z_i^4, \quad i = 2, 3, 4, 5. \quad (9)$$

Действительно, взяв отличную от нуля неподвижную точку z , из равенства (3) получим $z^4 + c = 1$. Далее имеем:

$$f'_c(z) = 5z^4 + c = 5 - 5c + c = 5 - 4c; \quad f'_c(z) = 5z^4 + c = 5z^4 + 1 - z^4 = 4z^4 + 1.$$

Заметим, что $f'_c(z_2) = f'_c(z_3) = f'_c(z_4) = f'_c(z_5)$.

Таким образом, указанные ниже случаи не имеют места:

(O O O P P), (O O P P P), (N N P P P), (N N N P P), (O N N N P), (O N N P P),

$(O N P P P), (O O N N P), (O O N P P), (O O O N P), (O O O N N), (O O N N N).$

Покажем, что для семейства функций (1) при $c = 0$ имеет место наличие одной неподвижной притягивающей точки и четырех отталкивающих неподвижных точек.

Действительно: $f_0(z) = z^5$. Неподвижными точками для данной функции будут точки $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1, z_4 = i$ и $z_5 = -i$. Очевидно, что точка z_1 притягивающая, а точки z_2, z_3, z_4, z_5 — отталкивающие, то есть имеет место случай $(O O O O P)$.

Покажем, что не имеет место случай $(N P P P P)$. В данном случае точка z_1 — нейтральная. Таким образом, $|f'_c(z_1)| = |c| = 1, |f'_c(z_2)| = |f'_c(z_3)| = |f'_c(z_4)| = |f'_c(z_5)| = |5 - 4c| < 1$. Однако, $|5 - 4c| \geq 5 - 4|c| = 1$. Мы пришли к противоречию.

Рассуждая аналогично, можно показать, что случай $(P N N N N)$ так же не имеет места.

Пусть $c = 2$. Тогда $|f'_c(z_1)| = |c| = 2, |f'_c(z_2)| = |f'_c(z_3)| = |f'_c(z_4)| = |f'_c(z_5)| = |5 - 4c| = 3$. Таким образом, при $c = 2$ имеет место случай $(O O O O O)$.

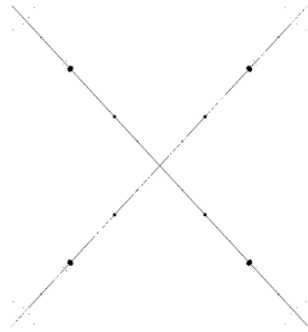
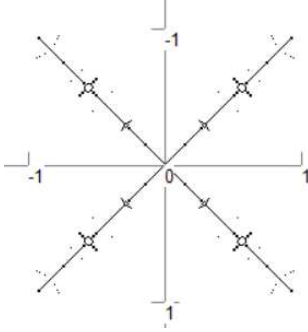
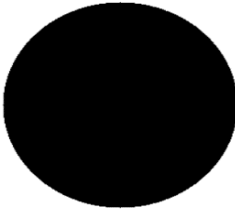
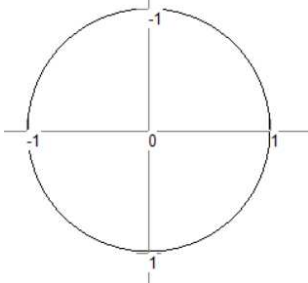
Пусть $c = \frac{4}{3}$. В данном случае $f'_c(z_1) = \frac{4}{3}, |f'_c(z_2)| = |f'_c(z_3)| = |f'_c(z_4)| = |f'_c(z_5)| = \frac{1}{3}$. Таким образом, имеет место случай $(O P P P P)$.

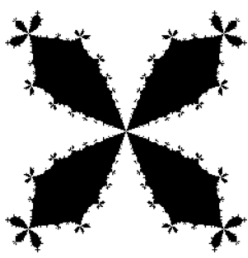
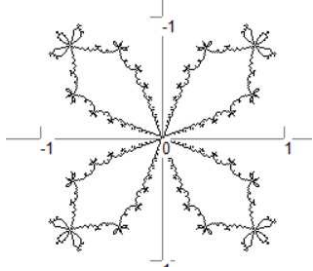
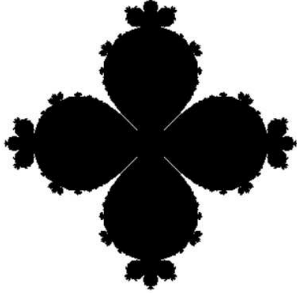
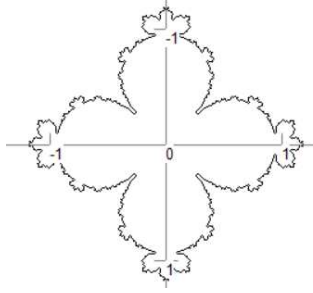
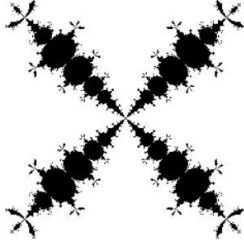
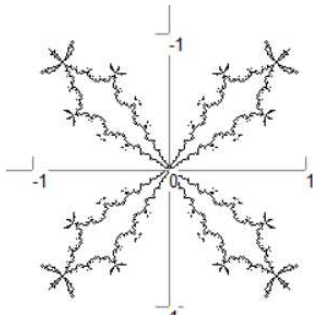
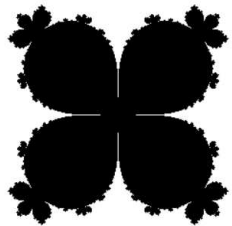
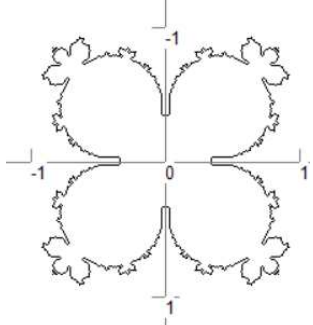
Положим $c = \frac{3}{2}$. Нетрудно проверить, что при данном значении c будет выполняться условие $(O N N N N)$.

Если положить $c = -1$, то получим случай $(N O O O O)$. Если же $c = 1$, то имеет место случай $(N N N N N)$.

Таким образом, из представленных в таблице 1 вариантов структуры неподвижных точек, имеют место пентады 1, 2, 5, 7, 10 и 11. Соответствующие им изображения заполняющих множеств Жюлиа и множеств Жюлиа, в соответствии с указанными выше значениями параметра c , представлены в таблице 2.

Таблица 2. Функция $f_c(z)$ и изображения заполняющих множеств Жюлиа и множеств Жюлиа.

Пентада	Функция $f_c(z) = z^5 + cz$	Заполняющее множество Жюлиа	Множество Жюлиа
1	$f_c(z) = z^5 + 2z$		
2	$f_c(z) = z^5$		

5	$f_c(z) = z^5 + \frac{4}{3}z$		
7	$f_c(z) = z^5 - z$		
10	$f_c(z) = z^5 + \frac{3}{2}z$		
11	$f_c(z) = z^5 + z$		

Приведем ниже программу построения заполняющего множества Жюлиа:

```

uses crt,GraphABC;
var height,width:integer;
var i,j,k,n,m:integer;
var dx,dy,x_max,x_min,y_max,y_min, kef,scall: real;
function fx(z: complex): complex; begin fx := z*z*z*z*z+2*z end;
var c: complex;
var iter : integer;
begin
width := 500;

```

```

height := 500;
setwindowsize(width, height);
iter := 50 ; scall := 2;
if(width >=height ) then
begin
kef := width / height;x_min := scall * -kef;x_max := scall *kef;
y_min := scall * -1; y_max := scall;
end else if (height >width) then
begin
kef := height / width;x_min := scall * -1;x_max := scall;
y_min := scall *-kef;y_max := scall * kef;
end;
dx := (x_max - x_min) / width;dy := (y_max - y_min) / height;
for i:=1 to width do
for j:=1 to height do begin
c := (x_min +i * dx ,y_min + j * dy);
try
for k:=1 to iter do c := fx(c);
kef := power(c.real, 2) + power(c.imaginary, 2);
if((kef)<4) then
setpixel(i,j, clblack );
except
end;end;end.

```

Как известно, множество Жюлиа является границей заполняющего множества Жюлиа. Фрагмент программы построения множества Жюлиа:

```

uses GraphABC;
const
iter = 50;
var
count, k: word; ii, jj: integer; scall, step, min_x, min_y: real;
function f(z, c: Complex): Complex :=z*z*z*z*z+(4/3)*z;
procedure drawXY(del: integer);
begin
Line(0, count div 2, count, count div 2, clGray);
Line(count div 2, 0, count div 2, count, clGray);
for var i := - Trunc(scall) to Trunc(scall) do
begin
Line(Round((i - min_x) / step), count div 2 - 10,
Round((i - min_x) / step), count div 2 + 10, clGray);
TextOut(Round((i - min_x) / step), count div 2, i / del);
Line(count div 2 - 10, Round((i - min_y) / step),
count div 2 + 10, Round((i - min_y) / step), clGray);
TextOut(count div 2, Round((i - min_y) / step), i / del);
end;end;

```

Выделим особо случай пентады 7 (табл. 1). В этом случае неподвижная нулевая точка является нейтрально-рациональной (параболической). Укажем орбиты нескольких точек, стремящихся к ней. Изображение множества Жюлиа в увеличенном масштабе представлено на рисунке 1. Отметим, что сходимость в данном случае будет медленная, поскольку “коэффициент притяжения”, модуль производной в данной точке, равен единице.

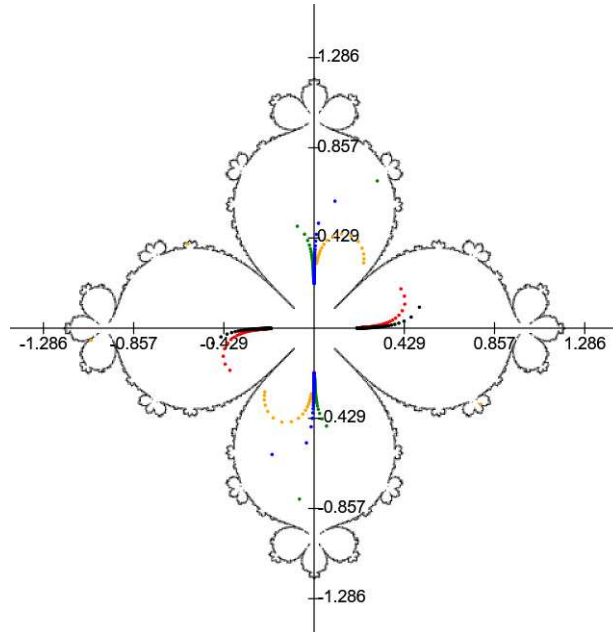


Рис. 1. Множество Жюлиа и нейтрально-рациональная неподвижная точка $z = 0$ при $c = -1$.

На рисунке 2 показана нейтрально-иррациональная неподвижная точка при $c = -\cos\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right) - i\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$ и орбиты точек, вращающихся вокруг нее по замкнутым линиям, образуя диск Зигеля.

Вернемся вновь к семейству полиномов $f_c = z^5 + cz$. Каждый полином пятой степени $f_c(z)$ имеет четыре критические точки $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4$, поскольку его производной является полином четвертой степени. Будем считать, что данные точки не являются неподвижными. Пусть $D_{\hat{z}_k}$, состоящее из точек с комплексной плоскости, для которых орбита точки $\hat{z}_k$ ограничена, где $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда под множеством Мандельброта данного семейства полиномов мы будем понимать множество $M_c = D_{\hat{z}_1} \cup D_{\hat{z}_2} \cup D_{\hat{z}_3} \cup D_{\hat{z}_4}$.

В нашем случае критическими точками $\hat{z}_k$ будут $\hat{z}_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-\frac{c}{5}}$. Нетрудно заметить, что орбиты критических точек одновременно ограничены или одновременно не ограничены. Например, если орбита точки $\hat{z}_2$ ограничена, то ограничены орбиты и остальных критических точек. Действительно, возьмем критическую точку $\hat{z}_2$ и исследуем ее орбиту. Имеем

$$f_c(\hat{z}_2) = \hat{z}_2^5 + c\hat{z}_2 = \sqrt[4]{-\frac{c}{5}} \left(-\frac{c}{5} + c\right) = \frac{4c}{5} \sqrt[4]{-\frac{c}{5}}. \quad (10)$$

Для критических точек $\hat{z}_1, \hat{z}_3$ и $\hat{z}_4$ модули значений $f_c(\hat{z}_1), f_c(\hat{z}_3), f_c(\hat{z}_4)$ совпадают с модулем значения $f_c(\hat{z}_2)$. Таким образом, для построения множества Мандельброта достаточно использовать одну из них, например, точку $\hat{z}_1$.

Приведем изображение множества Мандельброта (рис.3) и фрагмент программы построения этого множества:

```
uses graphabc;
var
{i, j, k, }iterlim, height, width: integer;
dx, dy, x_max, x_min, y_max, y_min, kef, scall: real;
z, c, temp: complex; col: integer;
function f(z, c: complex): complex;
```

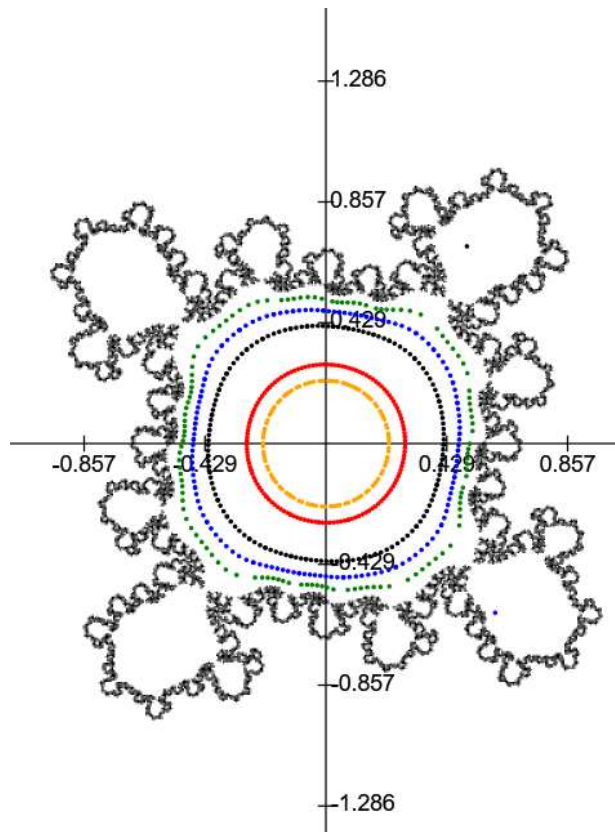


Рис. 2. Множество Жюлиа и нейтрально-иррациональная неподвижная точка Зигеля.

```

begin
result := z*z*z*z*z+c*z;
end;
function distance(arg1: complex; arg2: complex): real;
begin
result := sqrt(sqr(arg1.real - arg2.real) + sqr(arg1.imaginary - arg2.imaginary));
end;
begin
width := 800;height := 800;setwindowsize(width, height);
iterlim := 50;
scall := 5;
if (width >= height) then
begin
kef := width / height;x_min := scall * -kef;x_max := scall * kef;
y_min := scall * -1;y_max := scall;
end

```

Выявим важную компоненту множества Мандельброта — его обрамление. Под обрамлением множества Мандельброта M_c семейства полиномов $f_c(z) = z^5 + cz$ будем понимать его подмножество, для каждой точки c которого полином $f_c(z)$ будет иметь притягивающую неподвижную точку.

Напомним, что неподвижными точками функции $f_c(z) = z^5 + cz$, являются точки $z_1 = 0$, $z_i = \sqrt[4]{1-c}$, $i = 2, 3, 4, 5$, для которых $|(f_c(z_1))'| = |c|$ и $|(f_c(z_i))'| = |5 - 4c|$, $i = 2, 3, 4, 5$.

Заметим, что если точка c принадлежит единичному кругу с центром в начале координат,

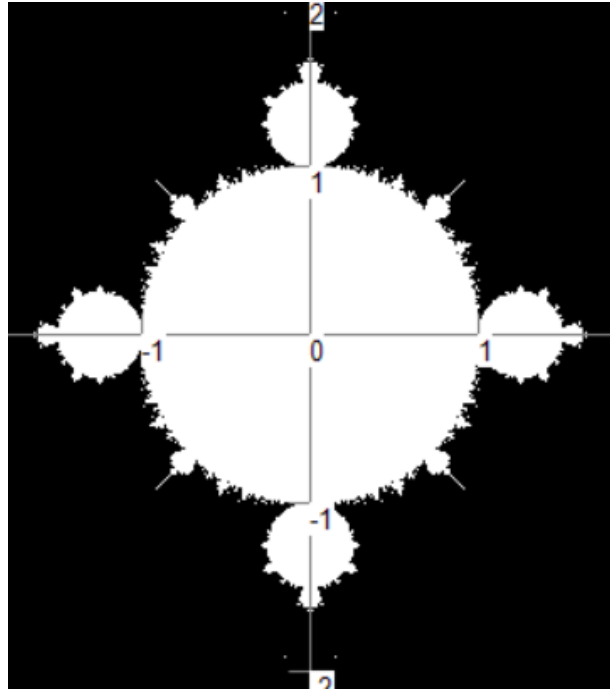


Рис. 3. Множество Мандельброта для семейства полиномов $f_c(z) = z^5 + cz$.

то точка $z_1 = 0$ будет притягивающей. Нетрудно проверить, что комплексные числа c будут удовлетворять неравенству $|5 - 4c| < 1$ тогда и только тогда, когда точки c комплексной плоскости $\mathbb{C}$ будут принадлежать множеству $\frac{5}{4} + \frac{\mathbb{D}}{4}$, где $\mathbb{D}$ — открытый круг радиуса единица с центром в начале координат.

Таким образом, решением неравенства $|5 - 4c| < 1$ будут только те точки c , которые принадлежат кругу с центром в точке $(\frac{5}{4}, 0)$ с радиусом, равным $\frac{1}{4}$. Обозначим данный круг $\mathbb{D}_1$.

Тогда обрамлением множества Мандельброта семейства функций $f_c(z) = z^5 + cz$ будет множество $M_c = \mathbb{D} \cup \mathbb{D}_1$ (рис. 4).

Следует отметить, что похожие по форме подмножества множества Мандельброта обладают различными свойствами. Поясним сказанное на следующем примере. Как отмечалось выше, отображение $f(z)$, будет иметь неподвижную притягивающую точку, когда c принадлежит одному из кругов: кругу радиуса 1 с центром в начале координат или кругу радиуса $\frac{1}{4}$ с центром в точке $(\frac{5}{4}, 0)$. Если c принадлежит кругу радиуса $\frac{1}{4}$ с центром в точке $(-\frac{5}{4}, 0)$, то отображение $f(z)$ не обязано иметь притягивающую неподвижную точку, так как для функции $f_{-\frac{5}{4}}(z) = z^5 - \frac{5}{4}z$ ($c = -\frac{5}{4}$) производная $(f_{-\frac{5}{4}}(z))' = 5z^4 - \frac{5}{4}$. Заметим также, что все пять неподвижных точек $z_0 = 0, z_{2,3,4,5} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}}$ отталкивающие.

Однако $f_{-\frac{5}{4}}(z) = z^5 - \frac{5}{4}z$ имеет точку периода 2. Такой точкой является, например, критическая точка $z_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ функции $f(z) = z^5 - \frac{5}{4}z$. Действительно, непосредственная проверка показывает, что $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}) = 0$. Далее имеем: $f_{-\frac{5}{4}}(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}) = -\frac{1}{\sqrt[4]{4}}, f_{-\frac{5}{4}}^{(2)}(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}) = \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$.

Заметим, что точка $c = -\frac{5}{4}$ принадлежит множеству Мандельброта семейства функций $f_c = z^5 + cz$, поскольку орбита критической точки ограничена. Нетрудно проверить, что функция $f(z) = z^5 + \frac{5}{4}z$ имеет четыре притягивающие неподвижные точки $z_{2,3} = \pm(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i), z_{4,5} = \pm(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$.

Таким образом, круги радиуса $\frac{1}{4}$ с центрами в точках $(\frac{5}{4}, 0), (-\frac{5}{4}, 0)$ принадлежат множе-

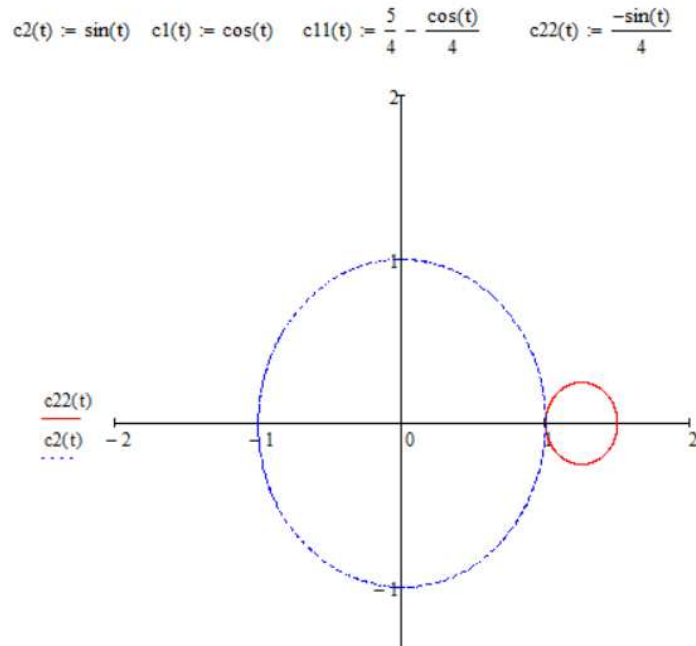


Рис. 4. Обрамление множества Мандельброта для семейства полиномов $f_c = z^5 + cz$.

ству Мандельброта, но обладают различными свойствами, связанными с принадлежностью их обрамлению множества Мандельброта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты исследования динамических свойств семейства полиномов пятой степени $f_c(z) = z^5 + cz$, $c \in \mathbb{C}$, при их итерировании. Данные исследования можно перенести на другие семейства полиномов пятой степени. Например, исследовать динамику итерирования полиномов $h_c(z) = z^5 + cz^2$, $c \in \mathbb{C}$. Внешне семейство полиномов $f_c(z)$ незначительно отличается от семейства полиномов $h_c(z)$. Однако, выявление структуры неподвижных точек семейства $h_c(z) = z^5 + cz^2$, $c \in \mathbb{C}$ и построение обрамления множества Мандельброта, имеют существенные отличия от аналогичных исследований, проведенных в данной статье относительно семейства полиномов $f_c(z) = z^5 + cz$, $c \in \mathbb{C}$.

Рассмотренный нами подход к исследованию динамики итерирования полиномов и дробно-рациональных функций вида изложенный в работах [1–3], дают возможность продолжить исследования применительно к другим семействам рациональных функций комплексной переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секованов, В. С. Голоморфная динамика. Учебное пособие / В. С. Секованов. — СПб. : Издательство “Лань”. Издание второе исправленное и дополненное, 2024. — 264 с.
2. Выполнение математико-информационного задания “Неограниченные множества Жюлиа”. Часть I / В. С. Секованов, А. Е. Березкина, А. О. Петров, А. М. Татанов // В сборнике: Образовательная деятельность вуза в современных условиях. Сборник материалов Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. — Караваево, 2024. — С. 122–127.
3. Секованов, В. С. Исследование динамики некоторого семейства рациональных функций комплексной переменной / В. С. Секованов, Л. А. Секованова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та.

REFERENCES

1. Sekovanov V.S. Holomorphic dynamics. [Sekovanov V.S. Golomorfnyaya dinamika]. Petersburg: Lan Publishing House. Second edition, revised and expanded 2024. 264 p.
2. Sekovanov V.S., Berezkina A.E., Petrov A.O., Tatanov A.M. Implementation of the mathematical information task "Unlimited Julia sets". Part I. [Sekovanov V.S., Berezkina A.E., Petrov A.O., Tatanov A.M. Vypolnenie matematiko-informacionnogo zadaniya «Neogranichennye mnozhestva ZHyulia». CHast' I]. In the collection: educational activities of the university in modern conditions. Collection of materials of the All-Russian Scientific and Methodological conference with international participation. Karavaevo, 2024. pp. 122–127.
3. Sekovanov V.S., Sekovanova L.A. Investigation of the dynamics of a certain family of rational functions of a complex variable. [Sekovanov V. S., Sekovanova L. A. Issledovanie dinamiki nekotorigo semejstva racional'nyh funkciy kompleksnoj peremennoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2024, no. 3, pp. 59–70.

Секованов Валерий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий Костромского государственного университета, Кострома, Россия
E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Sekovanov Valery Sergeevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies of Kostroma State University, Kostroma, Russia
E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Секованова Любовь Афанасьевна, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Костромской государственной сельскохозяйственной академии, Кострома, Россия
E-mail: sekovla@yandex.ru

Sekovanova Lyubov Afanasyevna, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics of the Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia
E-mail: sekovla@yandex.ru