

НОСИТЕЛИ БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ*

Р. Е. Зволинский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 21.05.3025 г.

Аннотация. В работе вводятся понятия носителя банахова предела и ортогональных банаховых пределов. Доказано, что для любого банахова предела пересечение любого конечного числа его носителей также является носителем этого банахова предела. Рассматриваются свойства носителей крайних точек множества банаховых пределов. Доказана ортогональность двух крайних точек множества банаховых пределов с различными функциональными характеристиками.

Ключевые слова: носители банаховых пределов, ортогональные банаховые пределы, крайние точки, почти сходящиеся последовательности.

SUPPORTS OF BANACH LIMITS

R. E. Zvolinskii

Abstract. The paper introduces the concepts of a support of a Banach limit and that of orthogonal Banach limits. It is proved that for any Banach limit, the intersection of any finite number of its supports is also a support of this Banach limit. It considers the properties of supports of extreme points of the set of Banach limits and establishes the orthogonality of two extreme points with distinct functional characteristics.

Keywords: supports of Banach limits, orthogonal Banach limits, extreme points, almost convergent sequences.

1. ВВЕДЕНИЕ

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $x \geq 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$,
3. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1], а доказательство впервые приведено в книге С. Банаха [2].

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество банаховых пределов, а через $\text{ext } \mathfrak{B}$ – множество его крайних точек. Из определения вытекает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq Bx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

* Работа выполнена за счет гранта Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-7-2-27-3)

© Зволинский Р. Е., 2025

для всех $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$. Следовательно,

$$Bx = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

для любой сходящейся последовательности x . Это означает, что любой банахов предел есть продолжение функционала $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ с подпространства сходящихся последовательностей на все ℓ_∞ с сохранением нормы. Стоит отметить, что такое продолжение не единственно, поэтому полезно рассматривать такие последовательности, на которых все банаховы пределы принимают одинаковые значения.

Следуя Г. Лоренцу [3], будем называть последовательность $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$ почти сходящейся к $\lambda \in \mathbb{R}$, если $Bx = \lambda$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Например, последовательность $(1, -1, 1, -1, \dots)$ почти сходится к 0. Множество последовательностей, почти сходящихся к λ , обозначается через ac_λ , а множество всех почти сходящихся последовательностей – через ac . Лоренц доказал, что $x \in ac_\lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$ [3, Теорема 1], а также установил, что пространство ac несепарабельно [3, § 1].

В работе [4] Л. Сачестон уточнил теорему Лоренца, показав, что

$$q(x) \leq Bx \leq p(x)$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Непосредственно из определения следует, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое (в слабой* топологии) выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^* . Следовательно, по теореме Крейна–Мильмана

$$\mathfrak{B} = \overline{\text{conv}} \text{ext } \mathfrak{B},$$

где замыкание выпуклой оболочки берется в слабой* топологии. Отметим, что замыкание выпуклой оболочки множества крайних точек $\mathfrak{B}$ в нормированной топологии ℓ_∞^* не совпадает с $\mathfrak{B}$. Всякое счетное подмножество $\text{ext } \mathfrak{B}$ порождает в ℓ_∞^* подпространство, изометричное ℓ_1 [5]. Поэтому $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2$ для любых $B_1, B_2 \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $B_1 \neq B_2$.

Подробное описание свойств банаховых пределов и их приложений дано в обзоре [6].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ множество последовательностей из нулей и единиц. Последовательность $A \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ называется носителем банахова предела B , если $BA = 1$. Множество носителей $B \in \mathfrak{B}$ обозначим через $\text{Supp}(B)$. Очевидно, если $A \in \text{Supp}(B)$ и $A_1 \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$, $A \subseteq A_1$, то $A_1 \in \text{Supp}(B)$. Кроме того, если $A \in \text{Supp}(B)$, $B \in \mathfrak{B}$, то $A + Q \in \text{Supp}(B)$ для всех $Q \in ac_0$ таких, что $A + Q \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$. Обозначим

$$\begin{aligned} (A \cup B)_k &= \max\{A_k, B_k\}, \\ (A \cap B)_k &= \min\{A_k, B_k\}, \\ (A \setminus B)_k &= A_k - (A \cap B)_k = A_k - \min\{A_k, B_k\}, \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, если $A \in \text{Supp}(B)$, $B \in \mathfrak{B}$, то $A \cup Q \in \text{Supp}(B)$ и $A \setminus Q \in \text{Supp}(B)$ для всех $Q \in ac_0 \cap \{0, 1\}^\mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Если $A_1, A_2 \in \text{Supp}(B)$, то $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \in \text{Supp}(B)$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Поскольку $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$, то $A_1 \cup A_2 \in \text{Supp}(B)$. Предположим противное, $A_1, A_2 \in \text{Supp}(B)$, но $A_1 \cap A_2 \notin \text{Supp}(B)$ или, что тоже самое, $B(A_1 \cap A_2) < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} B(A_1 \cup A_2) &= B(A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2) = BA_1 + BA_2 - B(A_1 \cap A_2) = \\ &= 2 - B(A_1 \cap A_2) > 1, \end{aligned}$$

т. е. $A_1 \cup A_2 \notin \text{Supp}(B)$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема справедлива для пересечения любого конечного числа носителей и теряет силу для бесконечного числа.

Пример.

Рассмотрим семейство последовательностей вида

$$(A_i)_k = \begin{cases} 0, & k = i \\ 1, & k \neq i \end{cases}, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $A_i \in ac_1 \cap \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $A_i \in \text{Supp}(B)$ для любых $i \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathfrak{B}$. Однако $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \notin \text{Supp}(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$, т. к. $B(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = B(0, 0, \dots) = 0$.

Обозначим через Γ множество всех неубывающих на $[0, 1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Каждому $B \in \mathfrak{B}$ ставится в соответствие следующая функция, определенная на $[0, 1]$:

$$\gamma(B, t) = B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+t})\right),$$

где через $\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+t})$ обозначена последовательность чисел x_k , равных 1 для $2^n \leq k < 2^{n+t}$ и 0 для остальных $k \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $\gamma(B, t) \in \Gamma$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Эта функция была введена в статье [7].

Теорема 2. Пусть $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$, тогда существует такое $a \in [0, 1]$, что

$$B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Поскольку $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$, то в силу [7, Предложение 3] существует такое $a \in [0, 1]$, что

$$\gamma(B, t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma(B, t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим 2 случая:

1. $a - \varepsilon < 0$, тогда

$$\begin{aligned} 1 &\geq B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^n) + \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+a+\varepsilon})\right) \geq \\ &\geq B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = \gamma(B, a + \varepsilon) = 1. \end{aligned}$$

2. $a - \varepsilon \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned}\gamma(B, a + \varepsilon) &= B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+a-\varepsilon}) + \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{n+a-\varepsilon} + \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = \\ &= B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, $B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+a-\varepsilon}, 2^{n+a+\varepsilon})\right) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

Следствие 3. Пусть $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $\varepsilon > 0$. Существует такая счетная система интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{\infty}$, что $B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+\alpha_i}, 2^{n+\beta_i})\right) = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 2 существует такое $a \in [0, 1]$, что $B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+\alpha_i}, 2^{n+\beta_i})\right) = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, где $\alpha_i = a - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$ и $\beta_i = a + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Банаховы пределы $B_1, B_2, B_1 \neq B_2$, называются ортогональными, если существуют такие $A_1 \in \text{Supp}(B_1), A_2 \in \text{Supp}(B_2)$, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Отметим, что в таком случае $B_1 A_2 = B_2 A_1 = 0$. Это легко вытекает из определения носителя банахова предела и того, что

$$\begin{aligned}B_1(A_1 \cup A_2) &= B_1(A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2) = B_1 A_1 + B_1 A_2 - B_1(A_1 \cap A_2) = 1, \\ B_2(A_1 \cup A_2) &= B_2(A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2) = B_2 A_1 + B_2 A_2 - B_2(A_1 \cap A_2) = 1.\end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть $B_1, B_2 \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $\gamma(B_1, t) \neq \gamma(B_2, t)$ для некоторого $t \in (0, 1)$, тогда B_1 и B_2 ортогональны.

Доказательство. Поскольку $B_1, B_2 \in \text{ext } \mathfrak{B}$, то в силу [7, Предложение 3] существуют такие $a, b \in [0, 1]$, что

$$\begin{aligned}\gamma(B_1, t) &= \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases} \\ \gamma(B_2, t) &= \begin{cases} 0, & t \leq b, \\ 1, & t > b, \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t < b, \\ 1, & t \geq b. \end{cases}\end{aligned}$$

Т. к. $\gamma(B_1, t) \neq \gamma(B_2, t)$ для некоторого $t \in (0, 1)$, то для определенности будем полагать $\gamma(B_1, t) \geq \gamma(B_2, t)$ и, следовательно, $a \leq b$. Рассмотрим 3 случая:

1. $a = b$, тогда

$$\gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t < b, \\ 1, & t \geq b, \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t \leq b, \\ 1, & t > b. \end{cases}$$

Отметим, что $a = b \neq 0$, т. к. в противном случае $\gamma(B_1, 0) = 1$, чего не может быть. Аналогично $a = b \neq 1$. Положим

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b}) \quad \text{и} \quad A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b}, 2^{n+b+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ и $b + \varepsilon \in (0, 1]$. Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma(B_1, b) &= B_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n + \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b}) \right) = B_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b}) \right) = B_1 A_1 = 1, \\ \gamma(B_2, b + \varepsilon) &= B_2 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+b}) + \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{n+b} + \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b}, 2^{n+b+\varepsilon}) \right) = \\ &= B_2 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b}, 2^{n+b+\varepsilon}) \right) = B_2 A_2 = 1.\end{aligned}$$

Кроме того, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Следовательно, B_1 и B_2 ортогональны по определению.

2. $a < b$, а

$$\gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t \leq b, \\ 1, & t > b, \end{cases}$$

или

$$\gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t \leq b, \\ 1, & t > b. \end{cases}$$

Отметим, что $b \neq 1$, т. к. в противном случае $\gamma(B_2, 1) = 0$, чего не может быть. Положим

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b}) \quad \text{и} \quad A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b}, 2^{n+b+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ и $b + \varepsilon \in (0, 1]$. B_1 и B_2 ортогональны аналогично 1 случаю.

3. $a < b$, а

$$\gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t < b, \\ 1, & t \geq b, \end{cases}$$

или

$$\gamma(B_1, t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma(B_2, t) = \begin{cases} 0, & t < b, \\ 1, & t \geq b. \end{cases}$$

Положим

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b-\varepsilon}) \quad \text{и} \quad A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b-\varepsilon}, 2^{n+b}),$$

где $\varepsilon > 0$ и $b - \varepsilon > a$. Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma(B_1, b - \varepsilon) &= B_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n + \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b-\varepsilon}) \right) = B_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^n, 2^{n+b-\varepsilon}) \right) = B_1 A_1 = 1, \\ \gamma(B_2, b) &= B_2 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+b-\varepsilon}) + \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{n+b-\varepsilon} + \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b-\varepsilon}, 2^{n+b}) \right) = \\ &= B_2 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{n+b-\varepsilon}, 2^{n+b}) \right) = B_2 A_2 = 1.\end{aligned}$$

Кроме того, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Следовательно, B_1 и B_2 ортогональны по определению.

Таким образом, рассмотрев все возможные случаи, мы доказали, что B_1 и B_2 ортогональны. $\square$

Автор благодарит Н. Н. Авдеева, Е. М. Семенова и А. С. Усачева за объективную критику и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mazur, S. O metodach sumowalnosci / S. Mazur // Ann. Soc. Polon. Math. (Suppl.). — 1929. — P. 102–107.
2. Банах, С. Теория линейных операций / С. Банах. — М.–Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 272 с.
3. Lorentz, G. G. A contribution to the theory of divergent sequences / G. G. Lorentz // Acta mathematica. — 1948. — V. 80, № 1. — P. 167–190.
4. Sucheston, L. Banach limits / L. Sucheston // The American Mathematical Monthly. — 1967. — V. 74, № 3. — P. 308–311.
5. Semenov, E. M. Extreme points of the set of Banach limits / E. M. Semenov, F. A. Sukochev // Positivity. — 2013. — V. 17, № 1. — P. 163–170.
6. Семенов, Е. М. Геометрия банаховых пределов и их приложения / Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Успехи математических наук. — 2020. — Т. 75, № 4. — С. 153–194.
7. Семенов, Е. М. Основные классы инвариантных банаховых пределов / Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2019. — Т. 83, № 1. — С. 140–167.

REFERENCES

1. Mazur S. O metodach sumowalnosci. Ann. Soc. Polon. Math. (Suppl.), 1929, pp. 102–107.
2. Banach S. Theory of linear operations. [Banah S. Teoriya linejnyh operacij]. Moscow–Izhevsk, 2001, 272 p.
3. Lorentz G.G. A contribution to the theory of divergent sequences. Acta mathematica, 1948, vol. 80, № 1, pp. 167–190.
4. Sucheston L. Banach limits. The American Mathematical Monthly, 1967, vol. 74, no. 3, pp. 308–311.
5. Semenov E.M., Sukochev F.A. Extreme points of the set of Banach limits. Positivity, 2013, vol. 17, no. 1, pp. 163–170.
6. Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. Geometry of Banach limits and their applications. [Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. Geometriya banahovyh predelov i ih prilozheniya]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2020, vol. 75, no. 4, pp. 153–194.
7. Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. The main classes of invariant Banach limits. [Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. Osnovnye klassy invariantnyh banahovyh predelov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 140–167.

Зволинский Роман Евгеньевич, Воронежский государственный университет, кафедра теории функций и геометрии, аспирант, Воронеж, Россия
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com

Zvolinskii Roman Eugen'evich, Voronezh State University, Department of Function Theory and Geometry, postgraduate student, Voronezh, Russia
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com