

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ K-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА

Е. А. Грязнева

*Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семёнова-Тян-Шанского*

Поступила в редакцию 10.02.2025 г.

Аннотация. В работе доказана теорема о фундаментальном решении оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с отрицательными индексами оператора Бесселя $-1 < -\gamma_i < 0$, при условии нечетной размерности трансцендентного псевдоевклидова пространства.

Ключевые слова: фундаментальное решение, оператор Бесселя, оператор Киприянова, весовая линейная форма, пространства Шварца основных функций, радиальная функция.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE K-POLYHARMONIC OPERATOR OF KIPRIYANOV

E. A. Gryazneva

Abstract. The paper proves a theorem on the fundamental solution of the Kipriyanov operator $\Delta_{B_{-\gamma}}$ with negative indices of the Bessel operator $-1 < -\gamma_i < 0$, under the condition of odd dimension of the transcendental pseudo-Euclidean space.

Keywords: fundamental solution, Bessel operator, Kipriyanov operator, weighted linear form, Schwartz spaces of basic functions, radial function.

ВВЕДЕНИЕ

Оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 0 < \gamma_i < 1, \quad (1)$$

называется сингулярным дифференциальным оператором И. А. Киприянова (введен в [1]).

Уравнение

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m u = f(x), \quad x \in R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i = \overline{1, n}\}$$

будем называть сингулярным дифференциальным уравнением Киприянова. Число $-|\gamma| = -\gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n$, следуя [2], будем называть коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число $n - |\gamma| > 0$ — трансцендентной (дробноразмерной) размерностью псевдоевклидова пространства $R_{n-|\gamma|}$.

Введем весовые линейные формы двух видов

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\Omega \subseteq R_n^+} u(x)v(x) \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx, \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega \subseteq R_n^+} u(x)v(x) \prod_{i=1}^n x_i dx. \quad (2)$$

В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Л. Шварца $S_{ev} = S_{ev}(R_n^+)$, состоящее из функций четных по каждой координате своего аргумента. Пространство распределений Шварца-Киприянова $S'_{ev,-\gamma}$ или $S'_{ev,1}$ представляют собой пространство двойственное к S_{ev} , порожденные весовыми линейными формами (2) соответственно.

δ — Функцией Дирака-Киприянова будем называть сингулярное весовое распределение (введенное в [3])

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Обычными средствами легко показать, что оператор Киприянова (1) является эрмитовым (самосопряженным по Лагранжу) в рамках весовой линейной формы $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$. Следовательно, по определению действия оператора (1) на распределение $f \in S'_{ev,-\gamma}$, полагаем

$$(\Delta_{B-\gamma} u, \varphi)_{-\gamma} = (u, \Delta_{B-\gamma} \varphi)_{-\gamma} \quad (3)$$

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ K-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Согласно определению (3), нам нужно найти функционал ε , для которого

$$(\Delta_{B-\gamma} \varepsilon, \varphi)_{-\gamma} = \int_{R_n^+}^{\varepsilon(x)} (\Delta_{B-\gamma} \varphi(x)) \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx = (\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Вначале заметим, что из условия на мультииндекс γ вытекают неравенство $n - |\gamma| > 0$ и, следовательно $n - |\gamma| - 1 > -1$. Воспользуемся формулой Киприянова — Бельтрами действия оператора (1) на радиальную функцию (см. [1]):

$$\Delta_{B-\gamma} f(|x|) = B_{n-|\gamma|-1} f(r).$$

В частности при $f = r^k$, получим следующее равенство:

$$\Delta_{B-\gamma} |x|^k = B_{n-|\gamma|-1} r^k = B_\mu r^k, \quad \mu = n - |\gamma| - 1.$$

В этой работе мы найдем фундаментальное решение в виде $\varepsilon = cr^{2-n+|\gamma|}$ полагая при этом, что $n - |\gamma| - 2 > 0$.

Лемма 1. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_i < 1$. Имеет место равенство

$$\Delta_{B-\gamma} r^k = B_\mu r^k = k(k + n - |\gamma| - 2) r^{k-2}, \quad (4)$$

где $B_\mu = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ — оператор Бесселя с параметром $\mu = n - |\gamma| - 1 > -1$.

Доказательство. Учитывая приведенную выше формулу Киприянова-Бельтрами, и то, что $f = |x|^k = r^k$ — радиальная функция, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{B-\gamma} |x|^k &= B_{n-|\gamma|-1} r^k = \frac{\partial^2 r^k}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial r^k}{\partial r} = k(k-1) r^{k-2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} k r^{k-1} = \\ &= (k^2 - k + (n-|\gamma|-1)k) r^{k-2} = k(k+n-|\gamma|-2) r^{k-2}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Нахождение фундаментального решения оператора $\Delta_{B-\gamma}^m$, $m > 1$ может быть сведенным к определению фундаментального решения первой степени оператора $\Delta_{B-\gamma}$, поскольку из (4) сразу следует

$$\Delta_{B-\gamma}^m r^{2m-n+|\gamma|} = \Xi \Delta_{B-\gamma} r^{2-n+|\gamma|}, \quad (5)$$

Остается вычислить коэффициент Ξ . Докажем, что он определен равенством

$$\Xi = \prod_{k=0}^{m-2} (2m - 2k - n + |\gamma|) \prod_{l=1}^{m-1} 2(m - l). \quad (6)$$

Действительно, положим в равенстве (4) $k = 2m - n + |\gamma|$. Тогда

$$\Delta_{B-\gamma}^m r^{2m-n+|\gamma|} = \Delta_{B-\gamma} \left(\Delta_{B-\gamma}^{m-1} \right) r^{2m-n+|\gamma|} = \Delta_{B-\gamma} \Xi r^{2m-n+|\gamma|}.$$

Для определения коэффициента Ξ воспользуемся формулой (4), в которой полагаем $k = 2m - n + |\gamma|$. В результате получим

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{B-\gamma}^{m-1} \right) r^{2m-n+|\gamma|} &= (2m - n + |\gamma|) (2m - n + |\gamma| + n - |\gamma| - 2) \left(\Delta_B^{m-2} \right) r^{2m-2-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) \left(\Delta_B^{m-2} \right) r^{2m-2-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) (2m - 2 - n + |\gamma|) \times \\ &\quad \times (2m - 2 - n + |\gamma| + n - |\gamma| - 2) \left(\Delta_B^{m-3} \right) r^{2m-4-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) (2m - 2 - n + |\gamma|) (2m - 4) \left(\Delta_B^{m-3} \right) r^{2m-4-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) (2m - 2 - n + |\gamma|) \times \\ &\quad \times (2m - 4) (2m - 4 - n + |\gamma|) (2m - 6) \left(\Delta_B^{m-4} \right) r^{2m-6-n+|\gamma|} = \\ &= (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) (2m - 2 - n + |\gamma|) (2m - 4) (2m - 4 - n + |\gamma|) (2m - 6) \times \dots \times \\ &\quad \times \dots \times (4 - n + |\gamma|) \cdot 2 \left(\Delta_B^0 \right) r^{2m-2-n+|\gamma|}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство (5) с константой имеет следующий вид:

$$\Xi = (2m - n + |\gamma|) (2m - 2) (2m - 2 - n + |\gamma|) (2m - 4) \times \\ \times (2m - 4 - n + |\gamma|) (2m - 6) (4 - n + |\gamma|) \cdot 2,$$

которую удобно представить в виде (6).

Доказательство закончено.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Введем следующий сингулярный дифференциальный оператор

$$D_{B_\mu}^\alpha = \begin{cases} B_\mu^{\alpha/2}, & \alpha = 2k \\ \frac{d}{dx} B_\mu^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k + 1, \end{cases}, \quad B_\mu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{d}{dx}, \quad (7)$$

где $\mu, \quad k \in \mathbb{Z}^+$.

Ограничимся лишь уравнением второго порядка. Общий вариант доказываемой ниже теоремы приведен в [4].

Теорема 1. Пусть $Z(t)$ - четная функция, имеющая особенность в точке $t = 0$ такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu Z(t) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu \frac{d}{dt} Z(t) = 1, \quad (9)$$

и пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu B_\mu Z(t) < \infty$.

Если в области $\{t > 0\}$ функция $Z = Z(x)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка

$$B_\mu Z(x) = 0, \quad (10)$$

то в смысле весовых обобщенных функций S'_{ev} функция Z — фундаментальное решение оператора B_μ .

Доказательство. Пусть функция $Z(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть $\varphi \in S_{ev}([0, \infty))$. Докажем равенство

$$(Z, B_\mu \varphi)_\mu = \varphi(0). \quad (11)$$

Оператор Бесселя $B_\mu = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\mu}{t} \frac{d}{dt}$ удобно записать в виде

$$B_\mu = \frac{1}{t^\mu} \frac{d}{dt} t^\mu \frac{d}{dt}$$

(дивергентная форма оператора Бесселя). Интегрированием по частям получим

$$(Z, B_\mu \varphi)_\mu = \lim_{t \rightarrow +0} t^\mu \varphi'(t) Z(t) - \int_0^\infty Z'(t) t^\mu \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = - \int_0^\infty Z'(t) t^\mu \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

Здесь мы воспользовались условием (8). Снова интегрируя по частям и принимая во внимание условие ограниченности функции $t^\mu Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и (9), получим

$$(Z, B_\mu \varphi)_\mu = - \left(- \lim_{t \rightarrow +0} t^\mu \varphi(t) Z'(t) \right) + \int_0^\infty (B_\mu Z)(t) \varphi(t) t^\mu dt = \varphi(0) + \int_0^\infty (B_\mu Z)(t) \varphi(t) t^\mu dt.$$

Остается воспользоваться тем, что $Z(t)$ является решением однородного уравнения (10), и мы получим (11). Доказательство закончено.

Дальнейшее наше исследование опирается на полученную в теореме формулу фундаментального решения сингулярного дифференциального оператора Бесселя B_μ с положительным параметром.

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА Δ_{B_γ}

Фундаментальные решения эллиптических операторов обычно выражаются через соответствующие степени $|x|$. Поэтому и в данном случае фундаментальное решение представлено радиальной функцией $\varepsilon = c|x|^\alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} \varepsilon, \varphi)_{-\gamma} &= (\varepsilon, \Delta_{B_{-\gamma}} \varphi)_{-\gamma} = \int_{R_n^+}^{\varepsilon(|x|)} \Delta_{B_{-\gamma}} \varphi(|x|) x^{-\gamma} dx = \\ &= |S_1^+(n)|_{-\gamma} \int_0^\infty \varepsilon(r) \Delta_{B_{-\gamma}} \varphi(r) r^{-\gamma} dr, \end{aligned}$$

где $|S_1^+(n)|_{-\gamma}$ — весовая площадь части единичной сферы $\{x : |x| = 1\} \cup R_n^+$.

Теорема 2. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_i < 1$ и число $n - |\gamma| - 1 > 0$ не является четным. Фундаментальное решение K — полигармонического оператора Киприянова $\Delta_{B-\gamma}$ с особенностью в начале координат представлено следующим регулярным распределением S'_{ev}

$$\varepsilon_{-\gamma}(x) = \Xi^{-1} \frac{|x|^{2-n+|\gamma|}}{(2-n+|\gamma|) |S_1(n)|_{-\gamma}},$$

где коэффициент Ξ определен равенством (6), а площадь поверхности нагруженной сферы $|S_1(n)|_{-\gamma}$ определена при всех $\gamma_i \in (0,1)$ и вычисляется по формуле (см. [1])

$$|S_1^+(n)|_{-\gamma} = 2^n \int_{S_1^+(n)=\{x:|x|=1, x_i>0\}} \prod_{k=1}^n x_i^{-\gamma_k} dS \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{1-\gamma_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

Доказательство. Согласно формуле (5) нам надо найти лишь фундаментальное решение первой степени оператора $\Delta_{B-\gamma}$.

Исходим из того, что функция $Z = \frac{1}{1-\mu}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому, полагая $\mu = n - |\gamma| - 1$ получим фундаментальное решение оператора $\Delta_{B-\gamma}$:

$$\varepsilon_{n,\gamma}(|x|) = \frac{|x|^{2-n+|\gamma|}}{(n-|\gamma|-2) |S_1(n)|_{-\gamma}},$$

где $|S_1(n)|_{-\gamma}$ — площадь нагруженной весами $\prod_{i=1}^n |x_i|^{-\gamma_i}$ единичной сферы.

Доказательство закончено.

Еще отметим, что формально полученная формула фундаментального решения совпадает с формулой фундаментального решения Δ_{B_γ} со всеми положительными параметрами $\gamma_i > 0$ операторов Бесселя (см. работу [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов, Л. Н. Оператор Киприянова – Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В – гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
2. Ляхов, Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, вып. 4. — С. 517–528.
3. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52–65.
4. Ляхов, Л. Н. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя / Л. Н. Ляхов // Труды математического института им. В. А. Стеклова. — 2012. — Т. 278. — С. 148–160.

REFERENCES

1. Lyakhov L.N., Sanina E.L. The Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation. [Lyahov L.N., Sanina E.L. Operator Kipriyanova–Bel'trami s otricatel'noj razmernost'yu operatorov Besselya i singulyarnaya zadacha Dirihle dlya B–garmonicheskogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya* — *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1610–1620.

2. Lyakhov L.N., Sanina E.L. Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve. [Lyahov L.N., Sanina E.L. Differencial'nye i integral'nye operacii v skrytoj sfericheskoy simmetrii i razmernost' krivoj Koka]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2023, vol. 113, iss. 4, pp. 517–528.

3. Lyakhov L.N., Sanina E.L., Roshchupkin S.A., Bulatov Yu.N. Fundamental solution of the singular differential Bessel operator with negative Koch parameter. [Lyahov L.N., Sanina E.L., Roshchupkin S.A., Bulatov YU.N. Fundamental'noe reshenie singulyarnogo differencial'nogo operatora Besselya s otricatel'nyim parametrom Koka]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2023, no. 7, pp. 52–65.

4. Lyakhov L.N. Fundamental solutions of differential equations with D_B -Bessel operator. [Lyahov L.N. Fundamental'nye resheniya differencial'nykh uravnenij s D_B -operatorom Besselya]. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova — Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 2012, vol. 278, pp. 148–160.

<i>Грязнева Е. А., Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия</i>	<i>Gryazneva E. A., Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia</i>
--	--