

ТЕОРЕМА О НОРМЕ СИНГУЛЯРНЫХ J-ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА*

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Поступила в редакцию 10.02.2025 г.

Аннотация. В статье доказан вариант теоремы Сили о норме сингулярных J-псевдодифференциальных операторов Киприянова-Катрахова. Приведенные псевдодифференциальные операторы построены на базе полного J-преобразования Фурье-Бесселя Киприянова-Катрахова. Данное преобразование было получено на основе одного из линейно независимых решений сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, интегральное преобразование Бесселя, псевдодифференциальные операторы.

THEOREM ON THE NORM OF SINGULAR J-PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS OF KIPRIYANOV-KATRAKHOV

Yu. N. Bulatov

Abstract. In this paper, a variant of Seeley's theorem on the norm of singular J-pseudo-differential operators of Kipriyanov–Katrakhov is proved. The presented pseudo-differential operators are constructed on the basis of the complete J-Fourier-Bessel-Kipriyanov-Katrakhov transform. This transform was obtained on the basis of one of the linearly independent solutions of the singular differential equation of Bessel with a negative parameter.

Keywords: singular differential Bessel operator, Bessel integral transform, pseudo-differential operators.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}$, $i = \overline{1, n}$.

Исследования уравнений с сингулярными дифференциальными операторами Бесселя, содержащих отрицательный параметр, инициировано И.А. Киприяновым. Такие исследования начаты в статьях [1], [2] для линейных сингулярных дифференциальных операторов, содержащих операторы Бесселя вида

$$B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0).$$

Отметим, что ограниченность действия оператора Бесселя обеспечивается его применением к четным функциям. В связи с этим дадим следующее определение четности по Киприянову ([3, с.21]).

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24–21–00387).
© Булатов Ю. Н., 2025

Определение 5. Функцию, заданную на полуоси $Ox_i=[0,\infty)$ будем называть четной по Киприянову по аргументу x_i , если возможно её четное продолжение на всю ось x_i с сохранением класса своей принадлежности

Класс ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных в n -полупространстве $\mathbb{R}_n^+$, удовлетворяющих условию четности по Киприянову по каждой координате аргумента, будем обозначать $C_{ev}^\ell(\mathbb{R}_n^+)$.

УТВЕРЖДЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОПЕРАТОРОМ $B_{-\gamma}$

$\mathbb{J}$ -Функции Бесселя.

Эти функции введены в [4]. Пусть $-\gamma=(-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$, $-1 < -\gamma_i < 0$ и $\mu_i = (\gamma_i + 1)/2$. Линейно независимые решения сингулярных дифференциальных уравнений Бесселя $B_{-\gamma_i} u + u = 0$, имеют следующий вид [4]:

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1 + \mu_i)}{m! \Gamma(m + 1 + \mu_i)} \frac{x_i^{2(m+\mu_i)}}{2^{2m}} = \Gamma(1 + \mu_i) 2^{\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{\mu_i}(x_i),$$

$$\mathbb{J}_{-\mu_i}(x_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1 - \mu_i)}{m! \Gamma(m + 1 - \mu_i)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1 - \mu_i) 2^{-\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{-\mu_i}(x_i),$$

где $J_{\pm\mu_i}$ — функции Бесселя первого рода. Можно отметить, что $\mathbb{J}$ -функции Бесселя удовлетворяют условиям

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x) = O(x_i^{2\mu_i}), x_i \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2\mu} \mathbb{J}_{\mu}(x) = 1; \quad \mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Отметим, что решение $\mathbb{J}_{-\mu_i}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что показано в [5], [6]. Для цели этой работы более естественным оказалось использовать только $\mathbb{J}$ -функции Бесселя положительного параметра μ .

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i}\right)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{array} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Введем весовую билинейную форму в $\mathbb{R}_n^+$ следующего вида:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} dx = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx_i, \quad 0 < \gamma_i < 1. \quad (1)$$

Определение (1) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma} = L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+) = \left\{ u : \|u\|_{L_2^{-\gamma}} = \sqrt{(u, u)_{-\gamma}} < \infty \right\}, \quad -\gamma_i > -1.$$

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по Киприянову по каждой координате аргумента.

Обобщенный $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг.

Оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига определен формулой [4]:

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f\left(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y\right) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i,$$

где «сдвинутый» аргумент $(x \xrightarrow{\alpha} y)$ функции f имеет следующий вид:

$$(x \xrightarrow{\alpha} y) = (\dots, x_i \xrightarrow{\alpha} y_i, \dots) = (\dots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, \dots), \quad i = \overline{1, n}.$$

Основные свойства $\mathbb{T}$ -псевдосдвига определены следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^y (B_{-\gamma_i})_x u(x) &= (B_{-\gamma_i})_x \mathbb{T}^y u(x), \\ (\mathbb{T}_x^y u, v)_{-\gamma} &= (u, \mathbb{T}_x^y v)_{-\gamma}, \quad \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) = \mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi). \end{aligned}$$

Последнее равенство называется теоремой сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя.

Полное $\mathbb{J}$ - преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

Пусть $x, \xi \in \mathbb{R}_n^+$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Четным прямым и четным обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя называются следующие выражения [4]:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{ev} [f] (x) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx, \\ \mathbb{F}_{ev}^{-1} [\hat{f}] (\xi) &= C_\mu \int_{\mathbb{R}_n} \hat{f}(\xi) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i) \xi_i^{-\gamma_i} d\xi_i, \quad C_\mu = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^{\mu_i} \Gamma(\mu_i + 1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Для $f(x) \in L_2^{-\gamma}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_i < 1$ эти преобразования обратимы:

$$\mathbb{F}_{ev}^{-1} [\hat{f}] (x) = f(x).$$

В работе [7] было введено нечетное $\mathbb{J}$ - преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова, которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{od} [f] (\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i,$$

Было доказано, что преобразование $\mathbb{F}_{od}$ производной четной функции можно свести к преобразованию $\mathbb{F}_{ev}$.

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev} [f] (\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi),$$

Поэтому было введено преобразование со смешанным ядром

$$\mathbf{J}_\mu(x\xi) = \prod_{i=1}^n \left[\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) + 2\mu_i x_i \xi_i \mathbb{J}_{\mu-1}(x_i \xi_i) \right],$$

которое названо полным $\mathbb{J}$ -преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова:

$$\mathbf{F}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \mathbf{J}_\mu(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{ev} [f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{od} [f_{od}](\xi).$$

Пусть $\varphi \in S_{ev}$, $\psi \in S_{ev}$. Тогда справедливы равенства (доказательства см.[8]):

- 1) $\int_{\mathbb{R}_n^+} \hat{\varphi}(x) \psi(x) x^{-\gamma} dx = \int_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x) \hat{\psi}(x) x^{-\gamma} dx$. (Равенство Парсеваля);
- 2) $\int_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x) \overline{\psi(x)} x^{-\gamma} dx = C_\mu \int_{\mathbb{R}_n^+} \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} x^{-\gamma} dx$. (Равенство Планшереля).

Представление $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ оператора в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

Рассмотрим линейный сингулярный дифференциальный оператор

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D_{B-\gamma}^\alpha,$$

где $D_{B-\gamma}^\alpha = D_{B-\gamma_1}^{\alpha_1} \dots D_{B-\gamma_n}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Пусть функция $u \in C_{ev}^m$. Тогда $u(x) = \mathbb{F}_{ev}^{-1}[\hat{u}](x)$. Следовательно

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) = \mathbf{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \right] (x),$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Действие оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова имеет следующий вид:

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) = \mathbf{F}^{-1} [a(x, \xi) \mathbb{F}_{ev} [u]], \quad (2)$$

где функция

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha_i}(x_i) \xi_i^{\alpha_i}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{cases}, \quad (3)$$

символ сингулярного дифференциального оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$.

В [8] было получено представление $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ -сопряженного оператора:

$$\left(L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u, v \right)_{-\gamma} = \left(u, \tilde{L}\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) v \right)_{-\gamma},$$

где оператор $\tilde{L}\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right)$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x, \xi)}$ оказывается формально сопряженным оператору $L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right)$ и

$$\tilde{L}(D_{B-\gamma}^\alpha)v(y) = C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_1^+} \overline{\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi)} \overline{a(x, \xi)} v(x) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Подобно (2) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) = \mathbf{F}^{-1} \left[\mathbb{F}_{ev} \left[\overline{a(x, \xi)} u \right] \right], \quad (4)$$

где $\overline{a(x, \xi)}$ — символ, комплексно сопряженный символу (3).

Пространства Соболева-Киприянова, ассоциированные с $D_{B-\gamma}^\alpha$ оператором.

Вводится следующее пространство Соболева-Киприянова: для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим пополнение множества $S_{ev, -\gamma}$ по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathbf{F}[u](\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad \xi^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{-\gamma_i}. \quad (5)$$

В рамках наших исследований нечетным по переменной ξ_i символом линейного сингулярного дифференциального оператора является производная четной по ξ_i функции $a(x, \xi)$. В результате первая производная интегрированием по частям окажется примененной к функции $x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i}$. При этом $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова с ядром $\mathbf{J}_\mu$ превращается в $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя четной функции ($\mathbb{F}_{ev}$) с ядром $\mathbb{J}_{\mu_i}$, что приводит к равенству

$$x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i} \right) = B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x) = -\xi_i^2 \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x) .$$

После таких действий операторы с «нечетным» символом окажутся операторами с «четным» символом и мы имеем дело с $\mathbb{F}_{ev}$ преобразованием, для которого соответствующие результаты приведены в [9].

Пусть $u \in S'_{ev, -\gamma}$. В рамках весовой билинейной формы (1) для любой функции $\varphi \in S_{ev}$ действие полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова принимает следующий вид:

$$(\mathbf{F}u, \varphi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbf{F}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbb{F}_{ev}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi .$$

Если же регулярный функционал u представлен производной четной функции по координате x_i своего аргумента, то

$$(\mathbf{F}u, \varphi'_{x_i})_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \xi_i \mathbb{F}_{ev}[\varphi](x) \xi^{-\gamma} d\xi .$$

Сказанное означает, что введенное нами пространство $H^s_{-\gamma}$ чаще окажется пространством функций с конечной нормой

$$\|u\|_{H^s_{-\gamma}}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (6)$$

где $\hat{u}$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Утверждение 1. Пусть $u = u(x) \in S_{ev, -\gamma}$, $-1 < -\gamma_i < 0$. При целом неотрицательном $s = m$ норма (5) эквивалентна норме

$$\|u\|_{H^m_{-\gamma}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}_n^+} \left| D_{B_{-\gamma}}^\alpha u(x) \right|^2 x^{-\gamma} dx . \quad (7)$$

Доказательство. Из равенства Планшереля для полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова вытекает равенство

$$\left\| \sum_{|\alpha| \leq s} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)^s u \right\|_{L_2^{-\gamma}} = \|\mathbf{F}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}}, \quad (8)$$

где $\psi = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)^s u$. Но

$$\|\mathbf{F}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}} = \left\| \sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2 \hat{u} \right\|_{L_2^{-\gamma}} .$$

Теперь утверждение 1 для $m \in \mathbb{N}$ вытекает из практически очевидного неравенства

$$C^{-1}(1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^s$$

При $s = 0$ норма (8) совпадает с $L_2^{-\gamma}$ -нормой функции $\mathbf{F}[u]$, что вытекает из равенства (7). $\square$

Сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова
Формулы (4) и (5) приводят к общим конструкциям операторов, включающих линейные сингулярные операторы типа $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$.

Поскольку норма, записанная в образах полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m , то для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(x)| (1 + |\xi|)^\alpha.$$

Определение 6. Через $\Xi_{-\gamma}^m = \Xi_{-\gamma}^m(\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову по каждой координате аргумента функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \left(D_{B-\gamma_i}^{\alpha_i} \right)_x \left(D_{B-\gamma_i}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}},$$

константа $C_{\alpha, \beta}$ не зависит от x и ξ . Класс функций $\Xi_{-\gamma}^m$ будем называть пространством символов порядка m .

Из определения 6 следует

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x \rightarrow \eta} \left[\left(1 + D_{B-\gamma_i}^{\alpha_i} \right)_x^p \left(D_{B-\gamma_i}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right] &= \\ &= (1 + |\eta|^2)^p \left(D_{B-\gamma_i}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}, \end{aligned}$$

где ${}^1\hat{a}$ — обозначение полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова функции $a(x, \xi)$ по первой переменной. Следовательно, для любого положительного числа p найдется такая константа C , что

$$\left(D_{B-\gamma_i}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \leq C (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}.$$

Определение 7. Операторы, действующие на функцию $u \in S_{ev, -\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$, по формулам

$$\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (9)$$

$${}^t\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_\mu(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (10)$$

будем называть сингулярными $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальными операторами Киприянова—Катрахова (далее — $\mathbb{K}$ -ПДО).

Далее приведены основные теоремы о порядке сингулярных $\mathbb{K}$ -ПДО с символом из $\Xi_{-\gamma}^m$ (доказательства см. в [8]).

Теорема 1. Сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО (9) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка m , т.е.

$$\|Au\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

Теорема 2. Сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО $A - {}^tA$ с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка $m - 1$, т.е.

$$\|(A - {}^tA)u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Следствие 2. Пусть $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$, тогда согласно теореме 2 имеем

$$A = {}^tA + T,$$

где T — оператор порядка $m - 1$. Следовательно, оператор tA так же, как оператор A имеет порядок, равный m в $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$.

Произведения и коммутаторы сингулярных $\mathbb{K}$ -ПДО

Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{K}$ -ПДО. Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо для произведения $A_1 A_2$ и сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2 . Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 3. Оператор $A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n)$, т.е.

$$\|(A_1 A_2 - A_1 \circ A_2)u\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m_1+m_2-1}}.$$

Доказательство приведено в [8]. Из теоремы 3 вытекают следующие следствия.

Следствие 3. Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие сингулярные $\mathbb{K}$ -ПДО. Тогда их коммутатор

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$$

имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$.

Доказательство. Из теоремы 3 имеем

$$A_1 A_2 = A_1 \circ A_2 + T_1, \quad A_2 A_1 = A_1 \circ A_2 + T_2,$$

где T_1 и T_2 — операторы порядков $m_1 + m_2 - 1$. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения. $\square$

Следствие 4. Пусть $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ и A — сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО (9). Тогда его коммутатор с оператором $\left(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ имеет порядок $m + k - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$.

Справедливость последнего утверждения непосредственно следует из следствия 3, если заметить, что операторы $\left(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ и $\left(D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ отличаются на оператор порядка $k - 1$.

Аналог неравенства Гординга для сингулярных $\mathbb{K}$ -ПДО

Лемма 1. Пусть $\mathbf{A}$ — сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО (9) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$. Для любой функции $u \in H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$ имеет место неравенство

$$|(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma}| = |(u, {}^t\mathbf{A}u)_{-\gamma}| \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}.$$

с константой, независимой от функции u .

Доказательство. Упрощая доказательство, положим $a(\infty, \xi) = 0$. Применяя формулу Планшереля, запишем

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma}| &= |\operatorname{Re}(\widehat{\mathbf{A}u}, \widehat{u})_{-\gamma}| = \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{u}(\xi) \sqrt{\mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)}} \sqrt{\mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)}} \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma}| &\leq \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{|\widehat{u}(\xi)|^2 \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{|\widehat{u}(\xi)|^2 \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi}. \end{aligned}$$

По определению символа класс $\Xi_{-\gamma}^m$ по переменной x есть функция пространства Шварца. Тогда ее полное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова по первой группе переменных есть быстро убывающая функция. Т.е. можем записать

$$\mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \leq c (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p},$$

где p произвольное достаточно большое число. Следовательно

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma}| &\leq c \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{\left[(1 + |\xi|^2)^{m/2} |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi \right] \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p} \eta^{-\gamma} d\eta} \\ &\times \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{\left[(1 + |\eta|^2)^{m/2} |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta \right] \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{m/2} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p} \xi^{-\gamma} d\xi}. \end{aligned}$$

Теперь обозначим

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-p} \eta^{-\gamma} d\eta, \quad K_2 = \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{\frac{m}{4}} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-p} \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Факт, что K_1 и K_2 константы, доказывается так же как в теореме 1. Первое по аналогу неравенства Киприянова—Ключанцева для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига [10], второе так же, но с предварительным применением аналога неравенства Петре для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига. Следовательно применяя теорему 1 с показателем $s = 0$, получим

$$|(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma}| \leq c \sqrt{K_1 K_2} \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}^2 = C \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}^2.$$

□

Введем обозначение

$$K = \max_{x \in \mathbb{R}_1^+, \xi \in S_1} |a(x, \xi)|, \quad (11)$$

где S_1 — единичная сфера в $\mathbb{R}_1^+$ с центром в начале координат. Ясно, что для символа $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ эта величина ограничена.

Приведем следующую форму неравенства Гординга (см. [12]). Для сингулярных $\mathbb{K}$ -ПДО данное неравенство доказано в [11], для классических псевдодифференциальных операторов это неравенство получено в [13], см. также [14].

Теорема 4. Пусть $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$, $\mathbf{A}$ — соответствующий этому символу сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО, и пусть на единичной сфере $S_1 = \{\xi : |\xi| = 1\}$ символ $\text{Re } a(x, \xi)$ ограничен снизу некоторой константой c . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $c' = c'(\varepsilon)$ такая, что для всех функций $u \in S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$

$$\text{Re}(\mathbf{A}u, u)_{-\gamma} + c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}}^2 \geq (c - \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}.$$

ТЕОРЕМА О НОРМЕ СИНГУЛЯРНЫХ $\mathbb{K}$ -ПДО

Теорема 5. Пусть $\mathbf{A}$ — сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$. Тогда для любого действительного числа s и любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C = C(s, \varepsilon)$ такая, что

$$\|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} \leq (K + \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^s} + C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s-1/2}}, \quad (12)$$

где число K определено равенством (11).

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_0$ — однородный сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО порядка 0, отвечающий символу

$$a_0(x, \xi) = a(x, \xi/|\xi|).$$

Неравенство (12) докажем для оператора вида

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{m}{2}} \mathbf{A}_0. \quad (13)$$

Так как оператор

$$\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \left[\left(D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{m}{2}} - \left(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{m}{2}} \right] \mathbf{A}_0$$

имеет порядок $m - 1$, то утверждение леммы будет следовать из неравенства (12) для оператора (13). Теперь положим $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + T$, где T — оператор порядка $m - 1$, и пусть неравенство (12) справедливо для оператора (13), тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} &\leq \|\tilde{\mathbf{A}}u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} + \|Tu\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{A}}u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} + C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s-1}} \leq (K + \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^s} + C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s-1/2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\|(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta)^{\frac{m}{2}} \mathbf{A}_0 u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} = \|\mathbf{A}_0 u\|_{H_{-\gamma}^s},$$

то достаточно рассмотреть случай $m = 0$. Более того, в силу следствия 4

$$\|\mathbf{A}_0 u\|_{H_{-\gamma}^s} = \left\| \left(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta\right)^{\frac{s}{2}} \mathbf{A}_0 u \right\|_{H_{-\gamma}^0} = \|\mathbf{A}_0 (1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta)^{\frac{s}{2}} u\|_{H_{-\gamma}^0} + O(\|u\|_{H_{-\gamma}^{s-1}}).$$

А поскольку $\|u\|_{H_{-\gamma}^s} = \|(1 + D_{B_{-\gamma}}^\beta)^{s/2} u\|_{H_{-\gamma}^0}$, то достаточно рассмотреть случай $s = 0$. Итак, будем предполагать, что $m = s = 0$.

Для доказательства (12) рассмотрим символ

$$q(x, \xi) = \bar{a}(x, \xi) a(x, \xi).$$

Пусть Q — соответствующий этому символу сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО вида (9). Тогда сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО вида $[Q - {}^t\mathbf{A}\mathbf{A}]$ имеет порядок -1 . Действительно, из теоремы 3 имеем

$$Q - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} - \bar{{}^t\mathbf{A}}\mathbf{A} + T = (\bar{\mathbf{A}}_0 - \bar{{}^t\mathbf{A}}_0)\mathbf{A} + T, \quad (14)$$

где T — оператор порядка -1 . Оператор $\bar{\mathbf{A}} - \bar{{}^t\mathbf{A}}$ согласно теореме 2, также имеет порядок -1 . Далее применяя лемму 1 к оператору (14), получаем

$$\left| \left([Q - {}^t\mathbf{A}\mathbf{A}]u, u \right)_{-\gamma} \right| \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}}^2.$$

Поскольку оператор ${}^t\bar{\mathbf{A}}$ является формально сопряженным в пространстве $L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$ к оператору $\mathbf{A}$, то $([{}^t\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}]u, u)_{-\gamma} = \|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^0}^2$. Откуда

$$\left| \left([Q - {}^t\mathbf{A}\mathbf{A}]u, u \right)_{-\gamma} \right| = \left| (Qu, u)_{-\gamma} - \|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 \right| \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}},$$

или, что то же самое,

$$\|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 \leq (Qu, u)_{-\gamma} + C \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}}. \quad (15)$$

С другой стороны, из условия (11) вытекает $K^2 - \bar{a}a \geq 0$. Применяя к сингулярному $\mathbb{K}$ -ПДО с символом $[K^2 - \bar{a}(x, \xi) a(x, \xi)]$ лемму 4 с константой $C = 0$, находим, что

$$K^2 \|u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 - (Qu, u)_{-\gamma} + C' \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}} \geq -\varepsilon' \|u\|_{H_{-\gamma}^0}.$$

Откуда

$$(Qu, u)_{-\gamma} \leq (K^2 + \varepsilon') \|u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 + C' \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}}. \quad (16)$$

Объединяя (15) и (16), получаем

$$\|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 \leq (K^2 + \varepsilon') \|u\|_{H_{-\gamma}^0}^2 + C' \|u\|_{H_{-\gamma}^{-1/2}}.$$

Возвращаясь к оператору $\mathbf{A}$ и учитывая замечания, сделанные в начале доказательства, получим требуемое утверждение. $\square$

REFERENCES

1. Lyakhov, L. N. Kipriyanov–Beltrami Operator with Negative Dimension of the Bessel Operators and the Singular Dirichlet Problem for the B -Harmonic Equation / L. N. Lyakhov, E. L. Sanina // Differ. Equ. — 2020. — V. 56. — P. 1564–1574.
2. Lyakhov, L. N. Differential and Integral Operations in Hidden Spherical Symmetry and the Dimension of the Koch Curve / L. N. Lyakhov, E. L. Sanina // Math. Notes. — 2023. — V. 113. — P. 502–511.
3. Kipriyanov, I. A. Singular Elliptic Boundary Value Problems / I. A. Kipriyanov. — Moscow : Nauka, 1997.
4. Pseudoshift and the Fundamental Solution of the Kipriyanov Δ_B -Operator / L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roshchupkin, E. L. Sanina // Differ. Equ. — 2022. — V. 58. — P. 1639–1650.

5. Sabitov, K. B. Initial Value Problem for B -Hyperbolic Equation with Integral Condition of the Second Kind / K. B. Sabitov, N. V. Zaitseva // Differ. Equ. — 2018. — V. 54. — P. 123–135.
6. Sabitov, K. B. The Second Initial-Boundary Value Problem for a B -hyperbolic Equation / K. B. Sabitov, N. V. Zaitseva // Russ. Math. — 2019. — V. 63. — P.66–76.
7. Bulatov, Yu. N. The Hankel–Kiprianov–Katrakhov Transform and Singular K -Pseudodifferential Operators / Yu. N. Bulatov // Mathematical Notes of NEFU. — 2024. — V. 31, № 1. — P. 21–34.
8. Bulatov, Yu. N. Commutators of singular $\mathbb{K}$ -pseudodifferential operators in $\mathbb{R}_n$ / Yu. N. Bulatov // Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications. — 2024. — V. 15, iss. 4. — P. 87.
9. Lyakhov, L. N. Kipriyanov Singular Pseudodifferential Operators Generated by Bessel $\mathbb{J}$ -Transform / L. N. Lyakhov, S. A. Roshchupkin, Yu. N. Bulatov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 269. — P. 205–216.
10. Fundamental Solution of a Singular Bessel Differential Operator with a Negative Parameter / L. N. Lyakhov, E. L. Sanina, S. A. Roshchupkin, Yu. N. Bulatov // Russ. Math. — 2023. — V. 67. — P. 43–54.
11. Bulatov, Yu. N. Gording’s Inequality for Singular $\mathbf{J}$ -pseudodifferential Kipriyanov Operators / Yu. N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45, № 11. — P. 5346–5354.
12. Garding, L. Dirichlet’s problem for elliptic partial differential equations / L. Garding // Math. Scand. — 1953. — V. 1. — P. 55–72.
13. Seeley, R. T. Integro-Differential Operators on Vector Bundles / R. T. Seeley // Transactions of the American Mathematical Society. — 1965. — V. 117. — P. 167–204.
14. Kohn, J. J. An algebra of pseudo-differential operators / J. J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — V. 18. — P. 269–305.

Булатов Ю. Н., аспирант, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: y.bulatov@bk.ru

Bulatov Yu. N., postgraduate student, Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: y.bulatov@bk.ru