УДК 517.988.8

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ*

А. С. Бондарев

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 10.02.2025 г.

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается абстрактная нелинейная параболическая задача с периодическим по времени условием на решение, которая решается приближенно полудискретным методом Галёркина. В работе в условиях слабой разрешимости задачи получены энергетические оценки погрешности приближенных решений, которые при достаточной гладкости решения обеспечивают первый порядок сходимости погрешностей к нулю.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, слабая разрешимость, метод Галеркина, нелинейное уравнение.

ERRORS' ESTIMATES OF THE GALYORKIN METHOD OF SOLUTION OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH A PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev

Abstract. An abstract parabolic nonlinear equation with a periodic condition on the solution is treated in a separable Hilbert space. This equation is solved approximately by the the Galerkin method. Energy estimates of approximate solutions' errors are obtained in this article in case of weak solvability of the equation. Sufficient smoothness of exact solution provides the first order of errors' vanishing.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, periodic condition, weak solvability, Galerkin method, nonlinear equation.

Пусть дана тройка вещественных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными.

Пусть для почти всех $t \in [0,T]$, где $T < \infty$, определены операторы $A(t) : V \to V'$ такие, что на $u,v \in V$ выполнено:

$$(A(t)u - A(t)v, u - v) \geqslant m\|u - v\|_V^2; \tag{1}$$

$$\|A(t)u - A(t)v\|_{V'} \leqslant M\|u - v\|_V, \tag{2}$$

где константы $m > 0$, $M \geqslant 0$. Условие (1) означает, что операторы $A(t)$ сильно монотонные, а (2) – липшиц-непрерывные.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22–71–10008

Введем обозначения $X = L_2(0,T;V)$, $X' = L_2(0,T;V')$. Пусть для функций $u(t) \in X$ функция $A(t)u(t) \in X'$. Получим оператор $A : X \to X'$, действующий по правилу $(Au)(t) = A(t)u(t)$, где $u \in X$. Из определения оператора A и (1)-(2) следует, что оператор $A : X \to X'$ сильно монотонный и липшиц-непрерывный. Коэрцитивность оператора $A : X \to X'$ показана в работе [1].

В пространстве X' рассмотрим задачу:

$$u' + Au = f, \qquad u(0) = u(T). \tag{3}$$

В (3) производная определяется в обобщенном смысле, функция $f \in X'$, а равенство (3) понимается в смысле пространства X', то есть для всех $v \in X$

$$\int_0^T \Big(u'(t) + A(t)u(t),v(t)\Big)\,dt = \int_0^T \Big(f(t), v(t)\Big)\,dt, \tag{4}$$

где под выражением (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если при этом $z \in H$, то выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H [2].

Из (4) следует, что для решения $u(t)$ задачи (3) почти всюду на $[0,T]$ выполняется равенство в смысле пространства V':

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t). \tag{5}$$

В работе [1] получены результаты о сходимости метода Галёркина для задачи Коши для нелинейного параболического уравнения.

Теорема 1. [3, с. 254] *В сделанных выше предположениях задача (3) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in X$ и $u' \in X'$.*

Лемма 1. *Для решения $u(t)$ задачи (3) справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C\Big\{\int_0^T \|A(t)\Theta\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \tag{6}$$

Доказательство. Из (5) для решения $u(t)$ получим

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\Big(A(t)u(t),u(t)\Big) = 2\Big(f(t),u(t)\Big).$$

Учитывая (1), оценим последнее равенство:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2m\|u(t)\|_V^2 - 2\|A(s)\Theta\|_{V'}\|u(t)\|_V \leqslant 2\|f(t)\|_{V'}\|u(t)\|_V.$$

Проинтегрировав данное неравенство по t от 0 до T, для произвольного $\varepsilon > 0$ получим

$$2m\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant 2\varepsilon\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|A(t)\Theta\|_{V'}^2\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt.$$

Полагая здесь $\varepsilon = m/2$, придем к неравенству

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant \frac{2}{m^2}\int_0^T \Big(\|A(t)\Theta\|_{V'}^2 + \|f(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt.$$

Таким образом, установлена оценка второго слагаемого в левой части (6).

Из равенства (5) теперь получим

$$\int_0^T \|u'(t)\|^2_{V'}\,dt \leqslant 2\int_0^T \|A(t)u(t)\|^2_{V'}\,dt + 2\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt.$$

Из (2) следует неравенство

$$\|A(t)u(t)\|_{V'} \leqslant M\|u(t)\|^2_V + \|A(t)\Theta\|_{V'},$$

откуда получим оценку третьего слагаемого в левой части (6).

Заметим [3], что из условия $u \in X$ и $u' \in X'$ для функции $u(t)$ следует $u \in C([0,T],H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|^2_H \leqslant K\int_0^T \left(\|u(t)\|^2_V + \|u'(t)\|^2_{V'}\right)dt. \tag{7}$$

Теперь из оценки (7) оценка (6) следует окончательно. □

ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

Решим задачу (3) приближенно методом Галёркина. Установим оценки погрешности и скорость сходимости приближённых решений к точному.

Пусть V_h, где $h > 0$, – конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V'_h, задав на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h{}'} = \sup|(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [4] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P_h} : V' \to V'_h$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P_h}u\|_{V'_h} \leqslant \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{8}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ важное соотношение [5]

$$(\overline{P_h}u,v) = (u,P_hv). \tag{9}$$

Задаче (3) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу на $[0,T]$.

$$u'_h(t) + \overline{P_h}A(t)u_h(t) = \overline{P_h}f(t), \quad u_h(0) = u_h(T). \tag{10}$$

Решением $u_h(t)$ задачи (10) называется функция со значениями в V_h такая, что равенство (10) выполняется в смысле пространства $X'_h = L_2(0,T;V'_h)$.

Заметим, что в силу (9) уравнение (10) может быть записано в вариационной форме:

$$(u'_h(t),v_h) + (A(t)u_h(t),v_h) = (f(t),v_h). \tag{11}$$

Таким образом, задача (10) сводится к задаче Коши для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существование решения следует теперь из известной теоремы Каратеодори [6].

Покажем, как разрешимость задачи (10) на $[0,T]$ и соответствующая гладкость решения следуют из теоремы 1.

В (10) функция $f \in L_2(0,T;V')$, поэтому $\overline{P_h}f \in L_2(0,T;V'_h)$. Оператор $\overline{P_h}A(t) : V_h \to V'_h$. В [1] показано, что для этого оператора выполняются условия, аналогичные (1) и (2).

Таким образом, задача (10) в силу теоремы 1 имеет единственное решение $u_h(t)$ такое, что $u_h \in C([0,T],H_h) \cap L_2(0,T;V_h)$ и $u'_h \in L_2(0,T;V'_h)$. Здесь через H_h и V_h обозначены множества

V_h с нормами пространств H и V соответственно. Учитывая, что линейное пространство V_h конечномерно и в нем любые нормы эквивалентны, можно считать, что решение $u_h \in C([0,T],V_h)$ и $u'_h \in L_2(0,T;V_h)$.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ И СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(t)$ – решение задачи (3), а $u_h(t)$ – решение задачи (10). Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^T \Big(\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 + \|\overline{P_h}u'(t)-u'_h(t)\|_{V'_h}^2\Big)dt \leqslant C\int_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_V^2\,dt. \tag{12}$$

Доказательство. К равенству (5) применим оператор $\overline{P_h}$ и вычтем из полученного равенства соотношение (10). Далее придем к равенству

$$[P_h u(t)-u_h(t)]' + \overline{P_h}A(t)P_h u(t) - \overline{P_h}A(t)u_h(t) = \overline{P_h}A(t)P_h u(t) - \overline{P_h}A(t)u(t). \tag{13}$$

Умножим (13) на $2[P_h u(t)-u_h(t)]$ скалярно в H с учетом (9).

$$\frac{d}{dt}\|P_h u(t)-u_h(t)\|_H^2 + 2\Big(A(t)P_h u(t) - A(t)u_h(t), P_h u(t)-u_h(t)\Big) =$$

$$= 2\Big(A(t)P_h u(t) - A(t)u(t), P_h u(t)-u_h(t)\Big).$$

Воспользовавшись оценками (1), (2) и неравенством Юнга, из последнего соотношения получим

$$\frac{d}{dt}\|P_h u(t)-u_h(t)\|_H^2 + m\|P_h u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leqslant \frac{M^2}{m}\|(I-P_h)u(t)\|_V^2.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по t от 0 до T, тогда

$$\int_0^T \|P_h u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt \leqslant \frac{M^2}{m^2}\int_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_V^2\,dt,$$

откуда следует оценка для первого слагаемого в левой части (12).

Из равенства (13), а также из оценок (8) и (2) получим оценку

$$\|\overline{P_h}u'(t)-u'_h(t)\|_{V'_h}^2 \leqslant 2M^2\big(\|(I-P_h)u(t)\|_V^2 + \|P_h u(t)-u_h(t)\|_V^2\big),$$

которая позволяет получить оценку (12) в полном объеме. □

Приведем условия, позволяющие из оценки (12) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешности к нулю . Пусть задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим [7], что такая последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в пространстве H, и в пространстве V'.

Следствие. *Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств такая, что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда при $h \to 0$*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt + \int_0^T \|u'(t)-u'_h(t)\|_{V'}^2\,dt \to 0. \tag{14}$$

Доказательство. Для любого $v \in V$

$$\|(I-P_h)v\|_V \leqslant \|(I-P_h)(v-Q_h v)\|_V \leqslant (1+\|P_h\|_{V\to V})\|(I-Q_h)v\|_V \to 0 \tag{15}$$

при $h \to 0$. Отсюда и из (12) следует стремление к нулю второго слагаемого в (14).

Далее для произвольного $v_h \in V_h$ получим оценку

$$\|u_h\|_{V'} = \sup |(u_h,v)| = \sup |(u_h,P_h v)| \leqslant \|u_h\|_{V_h'} \sup \|P_h v\|_V = \|u_h\|_{V_h'} \|P_h\|_{V \to V},$$

где все точные верхние границы берутся по $v \in V$ с $\|v\|_V = 1$.

Рассмотрим третье слагаемое в левой части (14). Учитывая последнюю оценку, получим:

$$\int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2 \, dt \leqslant 2 \int_0^T \|(I - \overline{P_h})u'(t)\|_{V'}^2 \, dt + 2 \int_0^T \|\overline{P_h}u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2 \, dt \leqslant$$

$$2 \int_0^T \|(I - \overline{P_h})u'(t)\|_{V'}^2 \, dt + 2\|P_h\|_{V \to V}^2 \int_0^T \|\overline{P_h}u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2 \, dt. \tag{16}$$

В [1] показано, что $\|\overline{P_h}\|_{V' \to V'} \leqslant \|P_h\|_{V \to V}$. Поэтому для всех $v \in V'$ при $h \to 0$

$$\|(I - \overline{P_h})v\|_{V'} = \|(I - \overline{P_h})(v - S_h v)\|_{V'} \leqslant (1 + \|P_h\|_{V \to V})\|(I - S_h)v\|_{V'} \to 0,$$

где S_h – ортопроектор в пространстве V' на V_h. Из последнего соотношения, (16) и (12) следует сходимость к нулю третьего слагаемого в (14).

Сходимость к нулю первого слагаемого теперь следует из оценки (7), которая приводит к оценке

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \leqslant K \int_0^T \left(\|u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2 \right) dt. \square$$

Укажем класс подпространств V_h, для которых $\|P_h\|_{V \to V}$ равномерно по h ограничены. Пусть:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|v\|_V \quad (v \in V), \tag{17}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H \quad (v_h \in V_h), \tag{18}$$

где r_1 и r_2 не зависят от v, v_h и h. Из (17) и (18) следует [8] оценка $\|P_h\|_{V \to V} \leqslant r_1 r_2 + 1$.

Далее нам понадобится также свойство

$$\|(I - P_h)u\|_{V'} \leqslant r_1 h \|(I - P_h)u\|_H \quad (u \in H), \tag{19}$$

которое следует [9] из (17).

Из оценки (12) можно получить и порядок скорости сходимости. Для этого предположим существование гильбертова пространства E такого, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [12]). Например, если параболическое уравнение в области Ω определено дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то считаем $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, и $E = W_2^2(\Omega)$.

Относительно подпространств V_h далее вместо (17) предположим, что

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leqslant r_3 h \|v\|_E \quad (v \in E). \tag{20}$$

Из (20) для $v \in V$ получается [11] оценка (аналог леммы Обена-Нитше)

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r h \|(I - Q_h)v\|_V. \tag{21}$$

Очевидно, что из (21) следует (17).

Предположения (17), (18), (21) являются типичными для подпространств типа конечных элементов [12]. Например, для параболического уравнения второго порядка, одномерного по пространственным переменным, в качестве V_h можно взять подпространство кусочно-линейных функций. При этом (18) в приложениях в методе конечных элементов означает [13] равномерное разбиение области пространственных переменных.

Пусть решение задачи (3) $u \in L_2(0,T;E)$. Тогда из (12), (15), (20) и (18) получим

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2 \, dt \leqslant Ch^2 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt.$$

Если же решение $u \in L_2(0,T;E)$ и $u' \in L_2(0,T;H)$, то из (12), (15), (20), (18) и (19) следует оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2 \, dt \leqslant Ch^2 \int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2 \Big) \, dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смагин, В. В. О скорости сходимости метода Галёркина для нелинейного параболического уравнения / В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 121–125.

2. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М. : Мир, 1977. — 384 с.

3. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М. : Мир, 1978. — 336 с.

4. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

5. Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

6. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 224 с.

7. Смагин, В. В. Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений / В. В. Смагин, Д. С. Сотников // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 193–198.

8. Смагин, В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79–94.

9. Смагин, В. В. Коэрцитивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 96–100.

10. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

11. Смагин, В. В. Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115–123.

12. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

13. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. — Ереван, 1979. — 236 с.

REFERENCES

1. Smagin V.V. On the speed of the convergence for Galerkin's method for nonlinear parabolic equation. [Smagin V.V. O skorosti sxodimosti metoda Galerkina dlya nelineynogo parabolicheskogo uravneniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 121–125.

2. Aubin J.-P. Approximate solution of the elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskikh kraevikh zadach]. Moscow: Mir, 1977, 384 p.

3. Gajewki H., Groger K., Zacharias K. Nonlinear operator equations and operator differential equations. [Gaevskiy H., Greger K., Zaharias K. Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differencial'nye uravneniya]. Moscow: Mir, 1978, 336 p.

4. Vaynikko G.M., Oya P.E. About the convergence and the velocity of convergence of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations. [Vajnikko G.M., Oya P.E'. O shodimosti i bystrote shodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh e'volucionnykh uravneniy]. *Differentsial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

5. Smagin V.V. Estimates of the velocity of convergence of projection and projection-difference methods for the weakly solvable parabolic equations. [Smagin V.V. Ocenki skorosti sxodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimyx parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

6. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand side. [Filippov A.F. Differencial'nye uravneniya s razryvnoj pravoj chast'yu]. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1988, 304 p.

7. Smagin V.V., Sotnikov D.S. The convergence of projection-differential method for quasilinear parabolic equations. [Smagin V.V., Sotnikov D.S. Sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda dlya kvazilineynyx parabolicheskix uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 1, pp. 193–198.

8. Smagin V.V. Coercive error estimates in the projection and projection-difference methods for parabolic equations. [Smagin V.V. Coe'rcitivnye ocenki pogreshnostej proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metoda dlya parabolicheskix uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, 1995, vol. 83, no. 2, pp. 369–382.

9. Smagin V.V. Coercive energy convergence of the projection-difference method for parabolic equations. [Smagin V.V. Coe'rcitivnaya e'nergeticheskaya sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda dlya parabolicheskix uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 2, pp. 96–100.

10. Lions J.-L., Magenes E'. Inhomogeneous boundary problems and its applications. [Lions Zh.-L., Magenes E'. Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

11. Smagin V.V. Projection-difference methods of approximate solution of the parabolic equations with asymmetrical operators. [Smagin V.V. Proekcionno-raznostnye metody priblizhennogo resheniya parabolicheskix urabnenij s nesimmetrichnymi operatorami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 115–123.

12. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to projection-difference methods. [Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

13. Oganesyan L.A., Ruhovech L.A. Variational-difference methods for solving elliptic equations. [Oganesyan L.A., Ruxovec L.A. Variacionno-raznostnye metody resheniya e'llipticheskix uravnenij]. Yerevan, 1979, 236 p.

Бондарев Андрей Сергеевич, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории нелинейного анализа и теории краевых задач Воронежского государственного педагогического университета; доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Bondarev Andrei Sergeevich, senior researcher, scientific research laboratory of Nonlinear analysis and Theory of Boundary value problems, Voronezh State Pedagogical University; associate professor, Voronezh State University, Maths faculty, department of Functional analysis and operation equations, candidate of physical and mathematical sciences, Voronezh, Russian Federation
E-mail: bondarev@math.vsu.ru