УДК 517.9

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова

Воронежский государственный университет;
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 10.02.2025 г.

Аннотация. В работе рассматривается дифференциальный оператор на положительной полуоси, определенный с помощью периодического эволюционного семейства. Для него строится эквивалентный разностный оператор и исследуются свойства исходного и разностного оператора с точки зрения состояний обратимости.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, разностный оператор, состояния обратимости, метод эквивалентных операторов.

METHOD OF EQUIVALENT OPERATORS IN THE STUDY OF A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR ON A HALF-LINE WITH A PERIODIC OPERATOR COEFFICIENT

A. G. Baskakov, G. V. Garkavenko, L. N. Kostina, N. B. Uskova

Abstract. The paper considers a differential operator on the positive semi-axis. Using a periodic evolution family, we define this operator. An equivalent difference operator is constructed for it. The properties of the differential and difference operators are studied from the point of view of invertibility states.

Keywords: differential operator, difference operator, reversibility states, the method of equivalent operators.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов в $\mathcal{X}$ со стандартной нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{X}$, $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}$.

Определим линейный дифференциальный оператор, используя подход из [1] – [11] с помощью семейства эволюционных операторов.

Определение 1. [4, Определение 1] Отображение $\mathcal{U} : \Delta \to \operatorname{End}\mathcal{X}$, где $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2_+ : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ называется сильно непрерывным экспоненциально ограниченным семейством эволюционных операторов (пролонгатором), если выполнены условия:

1) $\mathcal{U}(t,t) = I$;
2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$, t, s, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \tau \leqslant s \leqslant t$;
3) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно;
4) существуют постоянные $M \geqslant 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $\|\mathcal{U}(t,s)\| \leqslant Me^{\alpha(t-s)}$, $(t,s) \in \Delta$.

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ обозначено одно из однородных пространств функций (см. § 2). Например, в качестве $\mathcal{F}$ могут выступать пространства $L_p(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}_+$ (классов эквивалентности) функций со значениями в $\mathcal{X}$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \qquad (t, s) \in \Delta, \tag{2}$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $t \geqslant 0$, — семейство замкнутых линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ решает абстрактную задачу Коши (1) и (2), если для любого $s \in \mathbb{R}_+$ существует плотное в $\mathcal{X}$ пространство $X_s \in D(A(s))$ такое, что для всякого $x_0 \in X_s$ функция $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, дифференцируема при $t \geqslant s$, $x(t) \in D(A(t))$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и верны равенства (1) и (2). В этом случае семейство $\mathcal{U}$ называется соответствующим задаче (1) и (2). Как правило, эволюционные семейства возникают в связи с представлением решений абстрактной задачи Коши (1) и (2).

Пусть $\mathcal{U} : \Delta \to \operatorname{End} \mathcal{X}$. Поставим этому семейству в соответствие дифференциальный оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом. Область определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ состоит из таких функций $x \in \mathcal{F}$, что при $t \geqslant 0$ они представимы в виде

$$x(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)\, ds, \qquad x(0) = 0, \tag{3}$$

для некоторой $f \in \mathcal{F}$. Полагается $\mathcal{L}x = f$.

Из равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, \tau)x(\tau) - \int_\tau^t \mathcal{U}(t, s)f(s)\, ds, \qquad (t, s) \in \Delta, \tag{4}$$

следует корректность определения оператора $\mathcal{L}$, т. е. единственность функции $f \in \mathcal{F}$ в (3).

Определение 2 ([5], [8])**.** Семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется периодическим периода $\omega > 0$, если $\mathcal{U}(t + \omega, s + \omega) = \mathcal{U}(t, s)$, $(t, s) \in \Delta$. Оператор $\mathcal{L}$ в этом случае называется оператором с периодическим операторным коэффициентом.

В работе изучается оператор $\mathcal{L}$ в случае периодического семейства $\mathcal{U}$ на полуоси. Отметим, что дифференциальные операторы с неограниченным операторным коэффициентом на прямой изучались в работах [1] – [5], на полуоси — в работах [2], [9], [11] с периодическим операторным коэффициентом на оси — в [5], [10]. И там же ставилась задача изучения таких операторов на полуоси. Методом изучения в работах [1] – [8], как и в настоящей работе, является метод эквивалентных операторов, окончательно оформившийся в [4]. Метод эквивалентных операторов позволяет сводить изучение состояний обратимости (см. Определение 3) исследуемого дифференциального оператора к состояниям обратимости некоторого ограниченного разностного оператора D в ассоциированном с $\mathcal{F}$ пространством последовательностей.

Приводятся результаты о совпадении состояний обратимости этих операторов, условия обратимости разностного оператора D в терминах спектрального радиуса оператора монодромии $\mathcal{U}(1, 0)$ (период ω предполагается равным единице), оценки нормы оператора D, его спектральных характеристик, а также формула для левого обратного.

Заметим, что использование разностных операторов в исследовании дифференциальных используется довольно часто, см., например, [12], [13], [14].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Наряду с введенным пространством $L_p = L_p(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ будем использовать также и другие, вводимые ниже, функциональные пространства. Через $C_b = C_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, $C_b \subset L_\infty$, обозначается пространство (банахово) непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \|x(t)\|$. Через $C_0 = C_0(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, где $C_0 \subset C_b$ обозначено замкнутое подпространство функций, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Все описанные выше пространства являются однородными пространствами функций (см., например, [2, Определение 2.1]).

Кроме функциональных пространств $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ рассматриваются ассоциированные с ними пространства последовательностей (см. [2]) $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$. Для $L_p(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, ассоциированным является пространство последовательностей $l_p(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|x(n)\|^p \Big)^{1/p}.$$

Для L_∞, C_b, ассоциированным является пространство ограниченных последовательностей $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$. Для пространства C_0 ассоциированным является подпространство $c_0(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X}) \subset l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathcal{X})$ стремящихся к нулю на бесконечности последовательностей.

Также далее символом $\mathbb{T}$ будет обозначаться единичная окружность. Введем также изометрическую группу сдвигов функций из $\mathcal{F}$, т. е. $(S(t)x)(s) = x(s + t)$, s, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathcal{F}$. Аналогично, если $x \in \mathcal{F}_d$, то $(S(m)x)(n) = x(n + m)$.

2. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введем понятие состояний обратимости абстрактного линейного замкнутого оператора $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, действующего в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Определение 3. ([2, Определение 1.1]) Рассмотрим условия:

1) ядро $\operatorname{Ker} B = \{x \in D(B) : Bx = 0\}$ оператора B нулевое;

2) $1 \leqslant n = \dim \operatorname{Ker} B < \infty$;

3) $\dim \operatorname{Ker} B = \infty$;

4) $\operatorname{Ker} B$ — дополняемое подпространство либо в $\mathcal{X}$, либо в $D(B)$ с нормой графика оператора B;

5) $\operatorname{Im} B = \overline{\operatorname{Im} B}$, что эквивалентно условию

$$\gamma(B) = \inf_{x\in D(B)\setminus \operatorname{Ker} B} \frac{\|Bx\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B)} > 0,$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} B) = \inf_{x_0\in \operatorname{Ker} B} \|x - x_0\|$;

6) $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\gamma(B) > 0$;

7) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство;

8) $\operatorname{Im} B$ — замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство конечной коразмерности $1 \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Im} B = m < \infty$, где $\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim \mathcal{X}\setminus \operatorname{Im} B$;

9) $\operatorname{Im} B = \mathcal{X}$;

10) $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\operatorname{Im} B = \mathcal{X}$.

Будем говорить, что оператор B находится в состоянии S, если для него выполнены все условия из совокупности условий $S = \{k_1, \dots, k_l\}$, $1 \leqslant k_l \leqslant 10$.

Через $St_{inv}(B)$ обозначается множество состояний обратимости оператора B. Множество состояний обратимости по ядру обозначим через $St_{Ker}\, B$, а по образу через $St_{Im}\, B$.

Определение 4. Линейные операторы $C : D(C) \subset \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_1$ и $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2$ называются эквивалентными, если
$$St_{inv}(C) = St_{inv}(\mathcal{E}). \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что каждое из десяти свойств Определения 3 выполняется (или не выполняется) одновременно для C и $\mathcal{E}$.

Применительно к дифференциальным операторам, в частности к $\mathcal{L}$, метод эквивалентных операторов заключается в построении по этим операторам ограниченных разностных линейных операторов, называемых сопровождающими операторами (см. [4]), в ассоциированном с $\mathcal{F}$ пространством $\mathcal{F}_d$ и дальнейшему исследованию этих операторов.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала покажем, что операторы с периодическим операторным коэффициентом из [15] будут таковыми и в смысле определения 2.

Пусть $A \in C_b(\mathbb{R}_+, \operatorname{End}\mathcal{X})$ и
$$A(t+\omega) = A(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad \omega > 0. \tag{6}$$

В [15] рассматривается дифференциальное уравнение
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{7}$$

Операторная функция Коши $U : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ (см. [15]) для (7) удовлетворяет равенствам:
$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = A(t)U(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \\ U(0) = I. \end{cases}$$

В [15] показано, что при выполнении (6) имеет место равенство $U(t+\omega) = U(t)U(\omega)$. Постоянный оператор $U(\omega)$ называется оператором монодромии.

Лемма 1. *Если выполнено* (6) *и есть корректная разрешимость задачи Коши, то* $\mathcal{U}(t+\omega, s+\omega) = \mathcal{U}(t,s)$.

Доказательство вытекает из представления эволюционного семейства $\mathcal{U}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$, в виде $\mathcal{U}(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$.

Так как для $\mathcal{U}(\omega,0)$ имеет место формула $\mathcal{U}(\omega,0) = U(\omega)U^{-1}(0) = U(\omega)$, то оператор $\mathcal{U}(\omega,0)$ также назовем оператором монодромии.

Приведем еще один (тривиальный) пример оператора, определяемого периодическим эволюционным семейством. Пусть $A(t) = A$, $t \in \mathbb{R}_+$, где оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{X}$. Тогда соответствующее оператору $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $\mathcal{L} = -d/dt + A$, семейство эволюционных операторов имеет вид $\mathcal{U}(t,s) = T(t-s)$, $(t,s) \in \Delta$. Поэтому семейство $\mathcal{U}$ является периодическим семейством с любым периодом $\omega > 0$.

Отметим два очевидных свойства (см. [10, Леммы 1, 2]). В следующей лемме не предполагается периодичности семейства $\mathcal{U}$.

Лемма 2. *Для любого* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *оператор* $S(\tau)\mathcal{L}S(-\tau)$ *совпадает с оператором* $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathcal{U}}}$, *где семейство эволюционных операторов* $\widetilde{\mathcal{U}} : \Delta \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ *определяется формулой* $\widetilde{\mathcal{U}}(t,s) = \mathcal{U}(t+\tau, s+\tau)$, $(t,s) \in \Delta$. *Для того, чтобы оператор* $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *обладал свойством* $\mathcal{L}S(\omega)x = S(\omega)\mathcal{L}x$, $x \in D(\mathcal{L})$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\mathcal{U}$ *было периодическим.*

Вернемся к оператору $\mathcal{L}$, определенному во введении. Введем в рассмотрение используемые далее операторы. Пусть $\mathcal{F} = \{L_p, C, C_0\}$. Введем полугруппу Хоуленда $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ линейных операторов из банаховой алгебры $\operatorname{End}\mathcal{F}$ формулой

$$(T_{\mathcal{U}}(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geqslant t, \\ 0, & 0 \leqslant s < t, \end{cases} \tag{8}$$

а также разностные операторы K, $D \in \operatorname{End}\mathcal{F}_d$ формулами

$$(Ky)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)y(n-1), & n \geqslant 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

и $D = I - K$.

Далее везде предполагается, что семейство $\mathcal{U}$ является периодическим периода 1. Следовательно,

$$(Ky)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(1, 0)y(n-1), & n \geqslant 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

для $y \in \mathcal{F}_d$.

Применим к операторам $\mathcal{L}$ и D результаты из [8], [9]. Основным результатом является следующая теорема о совпадении состояний обратимости операторов $\mathcal{L}$ и D.

Теорема 1. *[9, Теоремы 2, 3]* $St_{inv}(\mathcal{L}) = St_{inv}(D)$.

Заметим, что из формулы (3) вытекает (см. [9, Замечание 2]), что если в пункте 4 Определения 1 оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_p \to L_p$ обратим, то

$$(\mathcal{L}_0^{-1}f)(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)\,ds, \qquad f \in L_p.$$

Теорема 2. *[9, Теорема 1] Оператор $\mathcal{L}$ является производящим оператором полугруппы операторов $\{T(t), t \geqslant 0\}$, задаваемой формулой* (8)*, и эта полугруппа сильно непрерывна в L_p, $1 \leqslant p < \infty$.*

Из результатов работ [8], [9] вытекает

Теорема 3. *Спектр оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_p \to L_p$ не зависит от $p \in [1, \infty]$. Спектр оператора $D \in \operatorname{End} l_p$ не зависит от $p \in [1, \infty]$.*

Введем в рассмотрение еще два оператора. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} - \lambda I : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, который определяется семейством эволюционных операторов $\mathcal{U}(\lambda)(t, s) = e^{\lambda(s-t)}\mathcal{U}(t, s)$, $(t, s) \in \Delta$ (см. [9]). Также отметим, что так как семейство $\mathcal{U}(t, s)$ периодическое, то семейство $\mathcal{U}(\lambda)(t, s)$ тоже будет периодическим с тем же периодом. Соответствующий этому семейству разностный оператор D_λ имеет вид (напомним, что период ω считается равным 1):

$$(D_\lambda y)(n) = \begin{cases} y(n) - e^{-\lambda}\mathcal{U}(1, 0)y(n-1), & n \geqslant 1, \\ y(0), & n = 0. \end{cases}$$

Лемма 3. $St_{inv}(\mathcal{L}_\lambda) = St_{inv}(D_\lambda)$.

Из [9, Теоремы 5, 6] вытекает

Теорема 4. *Спектры* $\sigma(T(1))$, *где*

$$T(1) = \begin{cases} \mathcal{U}(1,0)x(s-1), & s \geqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant s < 1, \end{cases}$$

и $\sigma(K)$ *совпадают, не зависят от* $p \in [1,\infty]$ *и*

$$\sigma(T(1))\backslash\{0\} = \sigma(K)\backslash\{0\} = \exp(\sigma(\mathcal{L})) = \{e^{\lambda}, \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathcal{F} = \{L_p, p \in [1,\infty], C\}$ *и* $\{V(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ — *изометрическая группа из* $\operatorname{End}\mathcal{F}$, $V(\lambda)x(s) = e^{i\lambda s}x(s)$, $s \geqslant 0$, $x \in \mathcal{F}$. *Тогда имеют место равенства*

$$V(-\lambda)\mathcal{L}V(\lambda) = \mathcal{L} - i\lambda I, \qquad V(-\lambda)T(t)V(\lambda) = e^{-i\lambda t}T(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,$$

т. е. операторы $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{L} - i\lambda I$, *а также* $T(t)$ *и* $e^{-i\lambda t}T(t)$ *подобны.*

Теорема 5. *[7, Следствие 5] Оператор* $\mathcal{L}$ *обратим тогда и только тогда, когда* $r(\mathcal{U}(1,0)) < 1$ *и* $\sigma(\mathcal{L})$ *представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda} \leqslant r(\mathcal{U}(1,0))\},$$

где $r(\mathcal{U}(1,0))$ — *спектральный радиус оператора монодромии* $\mathcal{U}(1,0)$.

Отметим также очевидное свойство

$$\sigma(K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant r(\mathcal{U}(1,0))\}.$$

Важно подчеркнуть, что если рассматривать оператор $\mathcal{L}$, порожденный периодическим семейством на оси, а не на полуоси, то условием обратимости соответствующего оператора D (и $\mathcal{L}$) будет условие $\sigma(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, вместо условий теоремы 5.

Приведем еще результаты из [8], касающиеся оценок норм оператора D^{-1}.

Теорема 6. *[8, Лемма 1] Если оператор* D *обратим в одном из пространств* l_p, $p \in [1,\infty)$, *то он обратим во всех пространствах* l_q, $q \in [1,\infty)$, *и имеет место оценка*

$$\|D^{-1}\|_q \leqslant 2\big(2\|D^{-1}\|_p - 1\big)\|D^{-1}\|_p.$$

Теорема 7. *[8, Теорема 2] Пусть оператор* $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_p \to L_p$ *обратим в некотором пространстве* L_p, $p \in [1,\infty)$, *и* $M = \sup\limits_{0 \leqslant t-s \leqslant 1} \|\mathcal{U}(t,s)\|$. *Тогда оператор* D *обратим в соответствующем пространстве* l_p *и имеет место оценка*

$$\|D^{-1}\| \leqslant \frac{9M^2}{2}\|\mathcal{L}\|^{-1} + 3M + 1.$$

Если же условие теоремы 5 не выполняется, но выполнено другое, более слабое, условие, то оператор обратим слева. Из результатов работы [7] можно получить следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* $\sigma(\mathcal{U}(1,0)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. *Тогда оператор* D *обратим слева и для некоторого левого обратного* $(D)_l^{-1}$ *имеет место представление*

$$(D)_l^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} G(n,m)y(m), \qquad y \in \mathcal{F},$$

где

$$G(n,m) = \begin{cases} (\mathcal{U}(1,0))^{n-m}P, & n \geqslant m \geqslant 0, \\ -B^{m-n}Q, & m > n \geqslant 0, \end{cases}$$

и $\sigma_{int} = \{z \in \sigma(\mathcal{U}(1,0)) : |z| < 1\}$, $P = P(\sigma_{int}, \mathcal{U}(1,0))$, $Q = I - P$, *оператор* $B \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ *совпадает на* $\operatorname{Im} Q$ *с обратным к сужению* $\mathcal{U}(1,0)$ *на* $\operatorname{Im} Q$.

Следствие 1. *Оператор D равномерно инъективен и его образ* $\operatorname{Im} D$ *замкнут, т. е.* $\{5,6\} \subset St_{inv}(D)$ *и* $\{5,6\} \subset St_{inv}(\mathcal{L})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 3. — С. 1–11.

2. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.

3. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 3–68.

4. Баскаков, А. Г. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков, В. Б. Диденко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 3–16.

5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / А. Г. Баскаков, В. Б. Диденко // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 3. — С. 323–338.

6. Бичегкуев, М. С. Преобразование Ляпунова дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами / М. С. Бичегкуев // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 1. — С. 11–25.

7. Baskakov, A. G. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal // Mediterr. J. Math. — 2016. — Т. 13, № 5. — P. 2443–2462.

8. Баскаков, А. Г. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами / А. Г. Баскаков // Изв. вузов. Матем. — 2001. — № 5. — С. 3–11.

9. Баскаков, А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, № 6. — С. 811–820.

10. Диденко, В. Б. О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / В. Б. Диденко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 136–144.

11. Баскаков, А. Г. О корректности линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Матем. сб. — 1999. — Т. 190, № 3. — С. 3–28.

12. Курбатов, В. Г. Об обратном к c-непрерывному оператору / В. Г. Курбатов // Матем. заметки. — 1990. — Т. 48, № 5. — С. 68–71.

13. Курбатов, В. Г. О функции Грина дифференциально-разностного уравнения / В. Г. Курбатов // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 3. — С. 525–527.

14. Бичегкуев, М. С. Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах / М. С. Бичегкуев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 4. — С. 3–20.

15. Далецкий, Ю. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 534 с.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. [Baskakov A.G. Polugruppy raznostnyh operatorov v spektral'nom analize linejnyh differencial'nyh operatorov]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1996, vol. 30, no. 3, pp. 1–11.

2. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyh differencial'nyh uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyh operatorov i linejnyh otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

3. Baskakov A.G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz differencial'nyh operatorov s neogranichennymi operatornymi koefficientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnyh otnoshenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 3–68.

4. Baskakov A.G. On invertibility states of differential and difference operators. [Baskakov A.G. O sostoyaniyah obratimosti raznostnyh i differencial'nyh operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 3–16.

5. Baskakov A.G., Didenko V.B. Spectral analysis of differential operators with unbounded periodic coefficients. [Baskakov A.G., Didenko V.B. Spektral'nyj analiz differencial'nyh operatorov s neogranichennymi periodicheskimi koefficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 323–338.

6. Bichegkuev M.S. Lyapunov transformation of differential operators with unbounded operator coefficients. [Bichegkuev M.S. Preobrazovanie Lyapunova differencial'nyh operatorov s neogranichennymi operatornymi koefficientami]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 1, pp. 11–25.

7. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. Mediterr. J. Math., 2016, vol. 13, no. 5, pp. 2443–2462.

8. Baskakov A.G. On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. [Baskakov A.G. Ob obratimosti linejnyh raznostnyh operatorov s postoyannymi koefficientami]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2001, vol. 45, no. 5, pp. 3–11.

9. Baskakov A.G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. [Baskakov A.G. Linejnye differencial'nye operatory s neogranichennymi operatornymi koefficientami i polugruppy raznostnyh operatorov]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 811–820.

10. Didenko V.B. About reversibility states of linear differential operators with periodic unbounded operator coefficients. [Didenko V.B. O sostoyaniyah obratimosti linejnyh differencial'nyh operatorov s neogranichennymi periodicheskimi koefficientami]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 136–144.

11. Baskakov A.G. On correct linear differential operators. [Baskakov A.G. O korrektnosti linejnyh differencial'nyh operatorov]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1999, vol. 190, no. 3, pp. 3–28.

12. Kurbatov V.G. The inverse to a c-continuous operator. [Kurbatov V.G. Ob obratnom k c-nepreryvnomu operatoru]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1990, vol. 48, no. 5, pp. 68–71.

13. Kurbatov V.G. On the Green function for a difference differential equation. [Kurbatov V.G. O funkcii Grina differencial'no-raznostnogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 3, pp. 525–527.

14. Bichegkuev M.S. On conditions for invertibility of difference and differential operators in weight spaces. [Bichegkuev M.S. Ob usloviyah obratimosti raznostnyh i differencial'nyh operatorov v vesovyh prostranstvah]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 3–20.

15. Daletskij Yu.A., Krein M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. [Daleckij YU.A., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve]. Moscow: Mauka, 1970, 534 p.

Баскаков Анатолий Григорьевич, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Baskakov Anatoly G., Professor of the Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валерьевна, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: gala_69@mail.ru

Garkavenko Galina V., Assistant Professor of the Department of Computer Mathematical Support, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: gala_69@mail.ru

Костина Любовь Николаевна, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Kostina Lubov N., Assistant Professor of the Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Ускова Наталья Борисовна, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
E-mail: nat-uskova@mail.ru@mail.ru

Uskova Natalia B., Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Physical-Mathematical Modeling, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: nat-uskova@mail.ru@mail.ru