

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 05.06.2025 г.

Аннотация. В многомерном единичном шаре рассматривается задача Дирихле для нелинейного уравнения. Получены достаточные условия существования единственного положительного радиально-симметричного решения и предложен численный метод его нахождения. Приведен соответствующий пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: задача Дирихле, положительное решение, радиально-симметричное решение, дифференциальное уравнение.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE NONLINEAR EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract. In a multidimensional unit ball, the Dirichlet problem for a nonlinear equation is considered. Sufficient conditions for the existence of a unique positive radially symmetric solution are obtained and a numerical method for finding it is proposed. An appropriate example is given to illustrate the results obtained.

Keywords: Dirichlet problem, positive solution, radially symmetric solution, differential equation.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в шаре $S = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ краевую задачу

$$\Delta u + \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} |x|^{m_{ik}} u^{m_{jk}} \right)^{p_k} = 0, \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где Γ — граница S , $l_s \in N$ ($s = \overline{1,3}$), $a_{ijk} \geq 0$ и $\sum_{i,j} a_{ijk}^2 \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, l_1\}$. Далее, предполагается что все числа m_{ij} неотрицательны, причем хотя бы один показателей степени u положителен и $m_{ik} + m_{jk} = m_k$. Наконец, будем считать, что $\sum_{k=1}^{l_1} p_k = 1$ и $\sum_{k=1}^{l_1} m_k p_k = -1$.

В настоящее время положительным решениям краевых задач для уравнения вида (1) посвящено большое количество работ [1–5]. Вопросы существования радиально-симметричных

решений задачи Неймана для широкого класса уравнений вида (1) были достаточно хорошо изучены А. С. Терсеновым, среди его последних публикаций можно выделить [6, 7]. В данном ракурсе задача Дирихле подробно рассматривалась Э. И. Абдурагимовым [8–10], где основным инструментом исследования послужило преобразование Ц. На [11], с помощью которого было доказано не только существование единственного положительного радиально-симметричного решения, но и предложен эффективный численный алгоритм построения такого решения. В настоящей статье предпринята попытка дополнить и в какой-то мере обобщить полученные ранее результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Под положительным решением задачи (1)–(2) будем подразумевать функцию $u \in C^2(\bar{S})$ положительную в S и удовлетворяющую граничному условию (2).

Нас интересует существование положительных радиально-симметричных решений задачи (1)–(2). Хорошо известно, что радиально-симметричное решение задачи (1)–(2) удовлетворяет краевой задаче

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} r^{m_{ik}} u^{m_{jk}} \right)^{p_k} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (3)$$

$$u'(0) = 0, \quad (4)$$

$$u(1) = 0, \quad (5)$$

где $r = |x|$.

Для доказательства существования положительного радиально-симметричного решения исходной краевой задачи воспользуемся группой линейных преобразований Ц. На [11]

$$\begin{cases} r = A^\alpha \tilde{r}, \\ u = A^\alpha \tilde{u}, \end{cases} \quad (6)$$

где α – произвольная постоянная, A – положительный параметр. Применив это преобразование к уравнению (3), получим

$$A^{-\alpha} \tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}} A^{-\alpha} \tilde{u}' + A^{\alpha(m_1 p_1 + \dots + m_{l_1} p_{l_1})} \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} \tilde{r}^{m_{ik}} \tilde{u}^{m_{jk}} \right)^{p_k} = 0,$$

откуда следует

$$\tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}} \tilde{u}' + \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} \tilde{r}^{m_{ik}} \tilde{u}^{m_{jk}} \right)^{p_k} = 0.$$

Параметр преобразования A возьмем равным значению решения задачи (1)–(2) в начальной точке отрезка $[0,1]$

$$u(0) = A.$$

В новых координатах это условие запишется так

$$A^\alpha \tilde{u}(0) = A$$

и исключим зависимость от A , выбрав

$$\alpha = 1.$$

Итак, заменой (6) краевая задача (1)–(2) сведена к задаче Коши

$$\tilde{u}'' + \frac{n-1}{\tilde{r}}\tilde{u}' + \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} \tilde{r}^{m_{ik}} \tilde{u}^{m_{jk}} \right)^{p_k} = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{u}(0) = 1, \quad (8)$$

$$\tilde{u}'(0) = 0. \quad (9)$$

Лемма 1. *Существует число $\tilde{r}_* > 0$ такое что задача Коши (7)–(9) имеет единственное решение $\tilde{u}(\tilde{r}) \in C_{[0, \tilde{r}_*]}^2$, причем $\tilde{u}(\tilde{r}) > 0$ при $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*)$ и $\tilde{u}(\tilde{r}_*) = 0$.*

Доказательство. Перепишем уравнение (7) в виде

$$(\tilde{r}^{n-1}\tilde{u}')' = - \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} \tilde{r}^{m_{ik}+n-1} \tilde{u}^{m_{jk}} \right)^{p_k}.$$

Проинтегрировав это уравнение от 0 до $\tilde{r}$, получим

$$\tilde{u}'(\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}^{n-1}} \int_0^{\tilde{r}} \prod_{k=1}^{l_1} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \sum_{j=1}^{l_3} a_{ijk} s^{m_{ik}+n-1} \tilde{u}^{m_{jk}} \right)^{p_k} ds < 0.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(\tilde{r})$ убывающая. Следовательно с учетом (8) существует единственная точка $\tilde{r}_*$ в которой $\tilde{u}(\tilde{r}_*) = 0$, причем $\tilde{u}(\tilde{r}) > 0$ при $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*)$ и $\tilde{u}(\tilde{r}) < 0$ при $\tilde{r} \in (\tilde{r}_*, \infty)$. Лемма доказана.

На основании леммы 1 заключаем, что задача Коши для уравнения (3) с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0$$

имеет единственное решение $u \in C_{[0, r_*]}^2$, где $r_* = A\tilde{r}_*$ — единственная точка, в которой это решение обращается в нуль. В силу условия (5) очевидно

$$A\tilde{r}_* = 1, \quad (10)$$

откуда параметр A определяется однозначно.

Итак, нами доказана теорема

Теорема 2. *Существует единственное положительное радиально-симметричное решение задачи Дирихле (1)–(2).*

В качестве примера рассмотрим следующую задачу при $n = 3$

$$\Delta u + \frac{(ru)^3}{(\sqrt{r} + \sqrt{u})^2} = 0, \quad x \in S, \quad (11)$$

$$u|_{r=1} = 0. \quad (12)$$

Численными методами установлено, что $\tilde{r}_* \approx 3.95$. С учетом (10) методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности по формулам (5) найдено положительное решение задачи (11)–(12).

Таблица 1

Положительное решение											
r	0,00	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
u	1,0000	1,0000	0,9982	0,9826	0,9257	0,8085	0,6321	0,4419	0,2636	0,1195	0,0000

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью метода преобразований Ц. На доказано существование единственного положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле в многомерном единичном шаре для одного нелинейного дифференциального уравнения и предложен численный алгоритм нахождения такого решения. Полученные результаты позволяет охватить довольно широкий класс нелинейных конструкций таких как, например, $|x|^\alpha u^\beta$, $|x|^\alpha + u^\beta$ и их всевозможные сочетания. Приведенные в статье результаты дополняют и расширяют исследования автора по данной тематике и могут представлять определенный теоретический интерес для специалистов, занимающихся вопросами существования положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Obersnel, F. Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation / F. Obersnel, O. Pierpaolo // J. Differ. Equ. — 2010. — V. 249, iss. 7. — P. 1674–1725.
2. Li, T. Multiple positive solutions for a Dirichlet problem involving critical Sobolev exponent / T. Li, T. Wu // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — V. 369, iss. 1. — P. 245–247.
3. Kolonitskii, S. B. Multiplicity of 1D-concentrated positive solutions to the Dirichlet problem for an equation with $\mathbf{p}$ -Laplacian / S. B. Kolonitskii // Funct. Anal. Appl. — 2015. — V. 49, iss. 2. — P. 151–154.
4. Giovanni, A. Positive solutions to a Dirichlet problem with non-lipschitz nonlinearities / A. Giovanni // EJDE. — 2021. — V. 2021, iss. 30. — P. 1–9.
5. Papageorgiou, N. S. Positive Solutions for Anisotropic Singular Dirichlet Problems / N. S. Papageorgiou, A. Scapellato // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2022. — V. 45. — P. 1141–1168.
6. Терсенов, А. С. О существовании радиально симметричных решений для эллиптического уравнения с $\mathbf{p}$ -лапласианом и с сильными градиентными нелинейностями / А. С. Терсенов // Сиб. матем. журн. — 2023. — Т. 64, № 6. — С. 1332–1345.
7. Терсенов, А. С. Радиально-симметричные решения задачи Неймана для уравнения с $\mathbf{p}$ -лапласианом / А. С. Терсенов, Р. Ч. Сафаров // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2025. — Т. 167, № 1. — С. 150–168.
8. Абдурагимов, Э. И. Единственность положительного решения задачи Дирихле в шаре для квазилинейного уравнения с $\mathbf{p}$ -лапласианом / Э. И. Абдурагимов // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 10. — С. 3–11.
9. Абдурагимов, Э. И. Единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической систем второго порядка / Э. И. Абдурагимов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 3–12.
10. Абдурагимов, Э. И. Положительное радиально-симметричное решение задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической системы с $\mathbf{p}$ -лапласианом / Э. И. Абдурагимов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 5. — С. 643–655.
11. На, Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. — М. : Мир, 1982. — 296 с.

REFERENCES

1. Obersnel F., Pierpaolo O. Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation. J. Differ. Equ., 2010, vol. 249, iss. 7, pp. 1674–1725.
2. Li T., Wu T. Multiple positive solutions for a Dirichlet problem involving critical Sobolev exponent. J. Math. Anal. Appl., 2010, vol. 369, iss. 1, pp. 245–247.

3. Kolonitskii S.B. Multiplicity of 1D-concentrated positive solutions to the Dirichlet problem for an equation with $\mathbf{p}$ -Laplacian. *Funct. Anal. Appl.*, 2015, vol. 49, iss. 2, pp. 151–154.
4. Giovanni A. Positive solutions to a Dirichlet problem with non-lipschitz nonlinearities. *EJDE*, 2021, vol. 2021, iss. 30, pp. 1–9.
5. Papageorgiou N.S., Scapellato A. Positive Solutions for Anisotropic Singular Dirichlet Problems. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2022, vol. 45, pp. 1141–1168.
6. Tersenov A.S. On the existence of radially symmetric solutions for an elliptic equation with $\mathbf{p}$ -Laplacian and with strong gradient nonlinearities. [Tersenov A.S. O sushchestvovanii radial'no simmetrichnyh reshenij dlya ellipticheskogo uravneniya s $\mathbf{p}$ -laplasianom i s sil'nymi gradientnymi nelinejnostyami]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2023, vol. 64, no. 6, pp. 1332–1345.
7. Tersenov A.S., Safarov R.Ch. Radially symmetric solutions of the Neumann problem for an equation with $\mathbf{p}$ -Laplacian. [Tersenov A.S., Safarov R.CH. Radial'no-simmetrichnye resheniya zadachi Nejmana dlya uravneniya s $\mathbf{p}$ -laplasianom]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki — Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 150–168.
8. Abduragimov E.I. Uniqueness of a positive solution to the Dirichlet problem in a ball for a quasilinear equation with $\mathbf{p}$ -Laplacian. [Abduragimov E.I. Edinstvennost' polozhitel'nogo resheniya zadachi Dirihle v share dlya kvazilinejnogo uravneniya s $\mathbf{p}$ -laplasianom]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2011, no. 10, pp. 3–11.
9. Abduragimov E.I. Uniqueness of a positive radially symmetric solution of the Dirichlet problem for one nonlinear elliptic system of the second order. [Abduragimov E.I. Edinstvennost' polozhitel'nogo radial'no-simmetrichnogo resheniya zadachi Dirihle dlya odnoj nelinejnoj ellipticheskoy sistem vtorogo poryadka]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2013, vol. 93, no. 1, pp. 3–12.
10. Abduragimov E.I. Positive radially symmetric solution of the Dirichlet problem for one nonlinear elliptic system with $\mathbf{p}$ -Laplacian. [Abduragimov E.I. Polozhitel'noe radial'no-simmetrichnoe reshenie zadachi Dirihle dlya odnoj nelinejnoj ellipticheskoy sistemy s $\mathbf{p}$ -laplasianom]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 5, pp. 643–655.
11. Na T. Computational methods for solving applied boundary value problems. [Na C. Vychislitel'nye metody resheniya prikladnyh granichnykh zadach]. Moscow: Mir, Мир, 1982, 296 p.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderkhanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru