УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СТРУНЫ С ВНУТРЕННИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

С. А. Шабров, Ж. И. Бахтина, Т. В. Гридяева, О. К. Плетнева, Н. Г. Папченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.12.2024 г.

Аннотация. В работе представлено исследование построенной в соответствии с наследственной теорией ползучести математической модели свободных колебаний вязкоупругой стилтьесовской струны, причем допускается наличие внутренних особенностей объекта, приводящих к потере гладкости у решения. Используется интегральное уравнение Вольтерра, традиционно связывающее ползучесть и релаксацию в теории вязкоупругости. Считаем, что материал струны подчиняется линейному закону ползучести. Возникающее уравнение трактуется поточечно. Получено решение поставленной задачи с применением метода Фурье.

Ключевые слова: реология, теория наследственной ползучести, ползучесть, релаксация, вязкоупругая струна, модель свободных колебаний струны, ряд Фурье, начально-краевая задача.

ON A MATHEMATICAL MODEL OF FREE OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC STRING WITH INTERNAL PECULIARITIES

S. A. Shabrov, Zh. I. Bakhtina, T. V. Gridyaeva, O. K. Pletneva, N. G. Papchenko

Abstract. The paper presents a study of a mathematical model of free oscillations of a viscoelastic Stieltjes string constructed in accordance with the hereditary theory of creep, and the presence of internal features of the object leading to a loss of smoothness in the solution is allowed. The Volterra integral equation is used, traditionally linking creep and relaxation in the theory of viscoelasticity. We assume that the string material obeys the linear law of creep. The resulting equation is interpreted pointwise. The solution to the problem is obtained using the Fourier method.

Keywords: rheology, theory of hereditary creep, creep, relaxation, viscoelastic string, model of free vibrations of a string, Fourier series, initial-boundary value problem.

Активное применение линейной и нелинейной теории вязкоупругости, как части реологии, мы можем наблюдать сейчас, как и в последние несколько лет, в связи с активным применением полимерных материалов в различных областях жизнедеятельности. Это связано с тем, что многие материалы обладают свойствами, которые нельзя описать с помощью упругой или вязкой модели, а это значит, что теория упругости и теория ньютоновской жидкости здесь бессильны, так как теория упругости может применяться к материалам, которые обладают способностью накапливать механическую энергию, не рассеивая ее, а ньютоновская вязкая жидкость при гидростатическом напряженном состоянии проявляет способность рассеивать энергию, но не способна ее накапливать, а также существуют материалы, у которых внезапно приложенное и поддерживаемое неизменным напряженное состояние вызывает мгновенную деформацию, вслед за чем следует процесс течения, которое с ростом времени может быть ограниченным или неограниченным. Известно, что такое поведение не описывается ни упругой, ни вязкой моделью, а сочетает в себе черты обеих.

Теорию вязкоупругости называют еще и наследственной теорией, так как чаще всего рассматривается материал, обладающий эффектом памяти. При этом поведение материала определяется не только текущим напряженным состоянием, но и всеми прошлыми напряженными состояниями, так что, вообще говоря, материал «запоминает» эти прошлые состояния, поэтому в некоторых работах (см., например, [1]–[5] и библиографию там) традиционно строятся математические модели вязкоупругих тел, основанные на модели упругого тела Гука и модели вязкой жидкости Ньютона.

Следует отметить, что система соотношений в теории вязкоупругости описывает только некую абстрактную модель, которая может быть использована для качественной и количественной оценки реальных физических систем с той или иной степенью точности. Вопрос о выборе математической модели для проведения прочностного расчета реального материала решается только из сравнения результатов теоретического исследования с экспериментом.

Напомним, что инженерная реология, как любая другая наука, опирается на ряд аксиом и допущений [1]–[5].

В работе изучается математическая модель колебаний вязкоупругой стилтьесовской струны, при этом мы допускаем по пространственной переменной потерю гладкости вследствие внутренних особенностей объекта. Возникающее при этом уравнение мы трактуем поточечно, т. е. как связь между значениями самой функции и ее производными в точке, следуя концепции трактовки дифференциального уравнения с негладкими решениями, предложенной Ю. В. Покорным [6]. Отметим, что предложенный подход позволил построить им и его учениками [7]–[9] точную параллель классической теории ОДУ вплоть до осцилляционных теорем.

Пусть $\sigma(x)$ — строго возрастающая и ограниченная на $[0;\ell]$ функция, порождающая на этом множестве аддитивную меру. При этом наиболее интересный для нас случай, когда множество точек разрыва, обозначаемое нами через $S(\sigma)$, непусто.

Рассмотрим следующую модель

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{x\sigma} - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial x}(x,\tau)d\tau; \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ — начальное отклонение и скорость соответственно, $K(t-\tau)$ — функция релаксации.

Уравнение в (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ мы понимаем как равенство

$$u''_{tt}(\xi,t) = a^2\,\frac{\Delta u'_x(\xi,t)}{\Delta\sigma(\xi)} - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau)\,\frac{\Delta u'_x(\xi,t)}{\Delta\sigma(\xi)}d\tau,$$

где $\Delta f(x) = f(x+0) - f(x-0)$ — полный скачок функции $f(x)$ в точке x.

Решение модели (1) мы ищем в классе E непрерывных на прямоугольнике $[0;\ell]\times[0;T]$, где $T > 0$ — фиксированное число, при каждом фиксированном x, $u(x,t)$ по переменной t дважды непрерывно дифференцируемо; по переменной x (при фиксированном t) $u(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Пусть $\varphi_n(x)$ — собственная функция спектральной задачи

$$\begin{cases} -X''_{x\sigma} = \lambda X; \\ X(0) = X(l), \end{cases} \tag{2}$$

отвечающая собственному значению λ_n.

Задача (2) (даже в более общем случае) изучалась работах [7]–[9]. В частности, доказано, что спектр (2) является осцилляционным, т. е. спектр состоит только из собственных значений, каждое из которых является вещественным и положительным, алгебраическая и геометрическая кратности равны 1; нули собственных функций перемежаются.

Решение (1) мы будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\varphi_k(x), \tag{3}$$

где $T_k(t)$ — неизвестная функция.

Нетрудно видеть, что функция $u(x,t)$, определенная равенством (3), удовлетворяет краевым условиям $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

Предположим вначале, что ряд (3) допускает двойное дифференцирование по пространственной переменной x и σ и по временной переменной. Подставляя (3) в уравнение из (1) мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T''_k(t)\varphi_k(x) = a^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\varphi''_{kx\sigma}(x) - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau)\varphi''_{kx\sigma}(x)d\tau,$$

или, так как $\varphi_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} T''_k(t)\varphi_k(x) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\lambda_k\varphi_k(x) - a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau)\lambda_k\varphi_k(x)d\tau. \tag{4}$$

Так как функции $\varphi_k(x)$ ортогональны, т. е. выполнении $k \neq m$,

$$\int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_m(x)d\sigma(x) = 0,$$

то из (4) мы находим

$$T''_m(t) = \lambda_m a^2 T_m(t) - \lambda_m a^2 \int\limits_0^t K(t-\tau)T_m(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Из уравнения (5), которому должна удовлетворять искомая функция $T_m(t)$, мы последовательно находим

$$T'_m(t) = C_2 + \int\limits_0^t \left(a^2\lambda_m T_m(s) - a^2\lambda_m \int\limits_0^s K(s-\tau)T_m(s)d\tau \right) ds,$$

$$T_m(t) = C_1 + C_2 t + \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^\chi \left(a^2\lambda_m T(s) - a^2\lambda_m \int\limits_0^s K(s-\tau)T_m(s)d\tau \right) ds \right\} d\chi.$$

На пространстве непрерывных функций определим оператор.

$$(AT)(t) = C_1 + C_2 t + a^2\lambda_m \int_0^t \int_0^\chi T(s)ds d\chi - a^2\lambda_m \int_0^t \int_0^\chi \int_0^s K(s-\tau)d\tau ds d\chi. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что вполне непрерывный оператор A, определенный (6), действует из $C[0;t_1]$ в $C[0;t_1]$ при некотором положительном t_1; более того, мы можем сделать t_1 малым, чтобы спектральный радиус оператора A был меньше 1. Тогда, на этом уменьшенном временном интервале решение уравнения (5) существует и единственно при любых начальных условиях

$$T_m(0) = \alpha_m \text{ и } T'_m(0) = \beta_m.$$

Начальные данные α_m и β_m мы получим из начальных условий смешанной задачи (1), а именно, в предположении, что функции $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ допускают разложение в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $\varphi_m(x)$, будем иметь

$$\alpha_m = \int_0^\ell \psi_0(x)\varphi_m(x)d\sigma(x), \tag{7}$$

$$\beta_m = \int_0^\ell \psi_1(x)\varphi_m(x)d\sigma(x). \tag{8}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $K(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой; $\{\varphi_n(x)\}$ — система нормированных собственных функций задачи (2); $\psi_i(x)$ $(i = 0{,}1)$ — абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, производные $\psi'_{ix}(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение; функция $\psi''_{0x\sigma}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\psi_0(0) = \psi_0(\ell) = \psi''_{0x\sigma}(0) = \psi''_{0x\sigma}(\ell) = \psi_1(0) = \psi_1(\ell) = 0$; числа α_n и β_n определяются равенствами (7) и (8) при всех натуральных n. Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\varphi_n(x), \tag{9}$$

где $T_n(x)$ — решения (5), удовлетворяющие начальным условиям $T_n(0) = \alpha_n$ и $T'_n(0) = \beta_n$, является решением математической модели (1); причем ряд (9) допускает двойное дифференцирование по временной переменной t; и дважды по пространственной переменной вначале по x, а второй по — σ; полученные таким образом ряды сходятся равномерно и абсолютно.

Доказательство. Оценим коэффициенты рядам Фурье функции $\psi_0(x)$. Последовательно имеем

$$\alpha_n = \int_0^\ell \psi_0(x)\varphi_n(x)d\sigma(x) = -\int_0^\ell \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_n}\varphi''_{nx\sigma}(x)d\sigma(x); \tag{10}$$

так как $\varphi_n(x)$ — это собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n.

Проинтегрируем дважды по частям интеграл в правой части (10), получим

$$\alpha_n = -\left.\frac{\psi_0(x)}{\lambda_n}\varphi'_{nx}(x)\right|_0^\ell + \left.\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\psi'_0(x)\right|_0^\ell - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\ell \varphi_n(x)\psi''_{0x\sigma}(x)d\sigma = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\ell \varphi_n(x)\psi''_{0x\sigma}(x)d\sigma,$$

так как по условию $\psi_0(0) = \psi_0(\ell) = \psi_0'(0) = \psi_0'(\ell) = 0$.

Таким образом, числа $\lambda_n \alpha_n$ являются коэффициентами ряда Фурье функции $\big(-\psi''_{0x\sigma}\big)(x)$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n^3 \alpha_n^2\right|$ сходится.

Аналогично оценим β_n:

$$\beta_n = \int\limits_0^\ell \varphi_n(x)\psi_1(x)d\sigma(x) = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^\ell \varphi''_{nx\sigma}(x)\psi_1(x)d\sigma(x) =$$

$$= -\frac{\varphi'_{nx}(x)}{\lambda_n}\psi_1(x)\Big|_0^\ell + \frac{\psi_1'(x)}{\lambda_n}\varphi_n(x)\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\psi''_{1x\sigma}(x) = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^\ell \varphi_n(x)\psi''_{1x\sigma}(x)d\sigma(x),$$

следовательно, как и ранее, $\lambda_n\beta_n$ — коэффициенты ряда Фурье функции $\big(-\psi''_{1x\sigma}\big)(x)$.

Получаем неравенство, вытекающее из аналога неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2 \leqslant \int_0^\ell \big(\psi''_{1x\sigma}(x)\big)^2\, d\sigma,$$

из которого следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{nx}(x)T_n(t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi''_{nx\sigma}(x)T_n(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)T_n'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{nx}(x)T_n'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)T_n''(t).$$

Все ряды, написанные выше, оцениваются рядом

$$K\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|A_n\lambda_n| + |B_n\sqrt{\lambda_n}|\Big),$$

где K — некоторое положительное число, который сходится. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость всех рядов, полученных из (9) почленным дифференцированием. А так как функция $u(x,t)$, определенная равенством (9), как нетрудно видеть, удовлетворяет граничным и начальным условиям, то $u(x,t)$ действительно является решение задачи (1). Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. — М., 1966. — 752 с.

2. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. — М. : Стройиздат, 1968. — 419 с.

3. Ward, I. M. Mechanical properties of solid polymers / I. M. Ward, J. Sweeney. — WILEY, 2012. — 474 p.

4. Кристенсен, Р. М. Введение в теорию вязкоупругости / Р. М. Кристенсен. — Москва: Мир, 1974. — 340 с.

5. Малкин, А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. — Санкт–Петербург, 2007. — 560 с.

6. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

7. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

8. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

9. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

10. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

11. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

12. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

REFERENCES

1. Rabotnov Yu.N. Creep of structural elements. [Rabotnov YU.N. Polzuchest' elementov konstrukcij]. Moscow, 1966, 752 p.

2. Rzhanitsyn A.R. Creep theory. [Rzhanicyn A.R. Teoriya polzuchesti]. Moscow, 1968, 419 p.

3. Ward I.M., Sweeney J. Mechanical properties of solid polymers. WILEY, 2012, 474p.

4. Christensen R.M. Introduction to the Theory of Viscoelasticity. [Kristensen R.M. Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti]. Moscow: Mir, 1974, 340 p.

5. Malkin A.Ya., Isaev A.I. Rheology: concepts, methods, applications. [Malkin A.YA., Isaev A.I. Reologiya: koncepcii, metody, prilozheniya]. Saint–Petersburg, 2007, 560 p.

6. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

7. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi*

matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

8. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

9. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

10. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

11. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

12. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

Шабров Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexsandrovich, Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bakhtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Гридяева Татьяна Витальевна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: tatianavit99@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Gridyaeva Tatyana Vitalievna, postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: tatianavit99@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Плетнева Ольга Константиновна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7(473)220–86–90

Pletneva Ol'ga K., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7(473)220–86–90

Папченко Наталья Геннадиевна, Донской государственный аграрный университет, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, пос. Персиановский, Октябрьский район, Ростовская область, Россия
E-mail: natalyapapchenko@yandex.ru

Papchenko Natalia Gennadievna, Don State Agrarian University, Associate Professor of the Department of Natural Sciences, Persianovsky settlement, Oktyabrsky district, Rostov region, Russia
E-mail: natalyapapchenko@yandex.ru