УДК 517.983.6

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

Л. И. Сухочева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.12.2024 г.

Аннотация. Объектом исследования являются спектральные свойства, некоторой оператор–функции $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, где непрерывные самосопряженные операторы A, B, C действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. При выполнении ряда дополнительных условий доказывается, что множество точек сгущения спектра $L(\lambda)$ является объединением бесконечности с ограниченным подмножеством вещественной оси. Все остальные точки из $\mathbb{C}$ являются нормальными т. е. регулярными или нормальными собственными значениями. При этом предполагается существование у $L(\lambda)$ хотя бы одной, регулярной точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Приводятся достаточные условия, при выполнении которых $\rho(L) \neq \varnothing$. Точность этих условий иллюстрируется примером.

Ключевые слова: операторный пучок, спектр, собственное значение, регулярная точка.

ON THE SPECTRUM OF THE SQUADRATIC PENCIL

L. I. Suhocheva

Abstract. The object of the study is the spectral properties of some operator function $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, with continuous self-adjoint operators A, B, C in an infinite-dimensional Hilbert space H. Under an additional conditions, it is proved that the set of accumulation points of the spectrum $L(\lambda)$ is the union of infinity with a bounded subset of the real axis. All other points from $\mathbb{C}$ are normal, i.e. regular or normal eigenvalues. In this case, it is assumed that $L(\lambda)$ has at least one regular point $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Sufficient conditions are given under which $\rho(L) \neq \varnothing$. The accuracy of these conditions is illustrated by an example.

Keywords: operator pencil, spectrum, eigenvalue, regular point.

В работе С. Г. Крейна [1] рассматривается квадратичный пучок

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} C - I, \tag{1}$$

где A и C самосопряженные вполне непрерывные операторы конечного порядка в гильбертовом пространстве H, оператор A положителен, оператор C неотрицателен.

Было показано, что спектр пучка состоит из не более, чем счетного множества собственных значений конечной алгебраической кратности, а точками сгущения спектра являются только точки $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

Оператор-функцию вида (1), заданную на $\mathbb{C}$, принято называть пучком С. Крейна.

Точку $(\infty \neq)\lambda \in \mathbb{C}$ будем называть регулярной точкой пучка L ($\lambda \in \rho(L)$), если точка 0 является регулярной точкой оператора $L(\lambda)$. Аналогично $(\infty \neq)\lambda \in \mathbb{C}$ — точка спектра ($\lambda \in \sigma(L)$) (λ — собственное значение ($\lambda \in \sigma_p(L)$), λ — точка непрерывного спектра ($\lambda \in \sigma_c(L)$) пучка L, если 0 — точка спектра (0 — собственное значение, 0 — точка непрерывного спектра) оператора $L(\lambda)$.

Определим $L(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$, положив $L(\infty) = A$. Будем считать, что $\lambda = \infty$ является регулярной точкой пучка L (точкой спектра, собственным значением пучка L), если 0 — регулярная точка оператора A ($0 \in \sigma(A)$), $0 \in \sigma_p(A)$ соответственно).

Объектом нашего рассмотрения будет модельный квадратичный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C,$$

где операторы A, B, C действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве H и удовлетворяют следующим условиям:

1. $0 \neq A$, B и C — непрерывные самосопряженные операторы;

2. A — вполне непрерывный оператор;

3. $B = B_1 + B_2$, где B_1 — равномерно положительный оператор, B_2 — вполне непрерывный оператор.

Будем предполагать что существует хотя бы одна точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, являющаяся регулярной для пучка L.

Запишем пучок L в виде:

$$L(\lambda) = (\lambda^2 A + \lambda B_2) + (\lambda B_1 + C).$$

Пусть $\lambda = \overline{\lambda}$. Тогда при $|\lambda|$ достаточно большом оператор $\lambda B_1 + C \gg 0$, если $\lambda > 0$ и $\lambda B_1 + C \ll 0$, если $\lambda < 0$. Так как $\lambda^2 A + \lambda B_2$ вполне непрерывный оператор, то спектр оператора $L(\lambda)$ может иметь лишь положительные точки сгущения в первом случае $(\lambda B_1 + C \gg 0)$ и отрицательные во втором $(\lambda B_1 + C \ll 0)$ [2], Т. 1.5.2.

Символом Λ обозначим множество точек сгущения спектра оператора $-\, B_1^{-1}C$. Заметим, что коль скоро оператор C вполне непрерывный, то $\Lambda = \{0\}$. Из условия существования у пучка L хотя бы одной регулярной точки следует, что множество точек сгущения его спектра является объединением бесконечности с ограниченным подмножеством вещественной оси. Все остальные точки из $\mathbb{C}$ являются нормальными для пучка L, т. е. регулярными или нормальными собственными значениями. Более точно сформулируем это в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, где $0 \neq A$, B, C непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H удовлетворяют условиям 1.–3. и существует точка $\lambda_0 \in \rho(L)$. Тогда спектр пучка L представляет собой объединение следующих непересекающихся множеств:*

$$\sigma(L) = \Lambda \bigcup \Big(\sigma(L) \backslash \Big(\Lambda \bigcup \{\infty\}\Big)\Big) \bigcup \{\infty\},$$

где $\Lambda \bigcup \{\infty\}$ — точки сгущения спектра пучка L, а $\sigma(L) \backslash (\Lambda \bigcup \{\infty\})$ — множество нормальных собственных значений пучка L.

Доказательство. Заметим, что из Теоремы 1.5.2. [2] следует, что $\Lambda \subset \sigma(L)$ и точки из множества Λ являются точками сгущения спектра пучка L. Так как A вполне непрерывный самосопряженный оператор в бесконечномерном пространстве, то $\lambda = 0$ — точка сгущения его спектра. Отсюда следует, что $\lambda = \infty$ — точка сгущения спектра пучка L. Остается проверить, что $\sigma(L) \backslash (\Lambda \bigcup \{\infty\})$ — нормальные собственные значения этого пучка.

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$. В самом деле, если $\lambda_0 \in \rho(L)$ и $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$, то в силу открытости множества регулярных точек пучка L в достаточно малой окрестности точки λ_0 существует невещественная точка $\lambda_0^* \in \rho(L)$. Поэтому далее, сохраняя прежние обозначения, считаем $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$.

Рассмотрим новое гильбертово пространство $\{H, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где скалярное произведение задается следующим образом: $\langle x, y \rangle = (B_1 x, y)$, $x, y \in H$. В этом пространстве оператор $B_1^{-1}C$ является самосопряженным, а оператор B_1 — равномерно положительным. Следовательно, оператор B_1 и при $\lambda \neq \overline{\lambda}$ оператор $\lambda I + B_1^{-1}C$ непрерывно обратимы в пространстве $\{H, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$.

Запишем пучок L в виде удобном для дальнейших исследований:

$$L(\lambda) = (\lambda B_1 + C) + (\lambda^2 A + \lambda B_2) = B_1 \lambda I + B_1^{-1}C)(I + (\lambda I + B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2)).$$

Поскольку при $\lambda \neq \overline{\lambda}$ оператор $B_1(\lambda I + B_1^{-1}C)$ непрерывно обратим, то оператор $L(\lambda)$ при $\lambda \neq \overline{\lambda}$ непрерывно обратим в том и только том случае, когда при таких λ непрерывно обратима оператор-функция

$$I + (\lambda I + B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2).$$

По условию существует точка $\lambda_0 \in \rho(L)$, $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$, т. е. при $\lambda = \lambda_0$ оператор $L(\lambda_0)$ непрерывно обратим, а значит, в этой точке непрерывно обратима и оператор-функция $I + (\lambda I + B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2)$.

Отметим, что на связном множестве $\mathbb{C}\setminus(\Lambda\bigcup\{\infty\})$ аналитическая оператор-функция $(\lambda I +$ $+ B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2)$ принимает значения из множества компактных операторов. В силу теоремы 1.5.1. из [2] при всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\Lambda\bigcup\{\infty\})$ за исключением не более счетного числа изолированных точек, являющихся нормальными собственными значениями оператор-функция $I + (\lambda I + B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2)$ является ограниченно обратимой. В силу сделанных ранее замечаний об обратимости операторов B_1 и $\lambda I + B_1^{-1}C$ и пучок L для всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\Lambda\bigcup\{\infty\})$ за исключением не более счетного числа изолированных точек имеет ограниченный обратный. Таким образом, спектр пучка L вне множества $\Lambda\bigcup\{\infty\}$ состоит из не более счетного числа нормальных собственных значений.

Далее приведем некоторые достаточные условия существования у пучка L хотя бы одной регулярной точки.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, где A, B и C непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, $B = B_1 + B_2$, где B_1 — равномерно положительный оператор, B_2 — вполне непрерывный оператор. Если выполнено одно из следующих условий:*

1. $\mathbb{R} \not\subset \sigma_p(L)$;
2. $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A)$,

то множество $\rho(L)$ — регулярных точек пучка не пусто.

Доказательство. Пусть имеет место условие 1, т. е. $\mathbb{R} \not\subset \sigma_p(L)$. Тогда существует вещественная точка λ_0, такая что $\lambda_0 \in (\sigma_c(L)\bigcup\rho(L))$. Если $\lambda_0 \in \rho(L)$, то все доказано.

Пусть $\lambda_0 \in \sigma_c(L)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что в сделанных предположениях $\rho(L) \neq \varnothing$.

Предварительно сделаем, если это необходимо, замену параметра $\lambda = \mu + \lambda_0$ и запишем пучок L в виде:

$$L(\lambda) = L(\mu + \lambda_0) = (\mu + \lambda_0)^2 A + (\mu + \lambda_0)B + C = \mu^2 A + \mu(2\lambda_0 A + B) + (\lambda_0^2 A + \lambda_0 B + C).$$

Обозначим $2\lambda_0 A + B = \widehat{B}$, $2\lambda_0 A + B_2 = \widehat{B}_2$, $\lambda_0^2 A + \lambda_0 B + C = \widehat{C}$.

Тогда $\widehat{L(\mu)} = \mu^2 A + \mu\widehat{B} + \widehat{C}$, где A, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — непрерывные самосопряженные операторы, $\widehat{B} = B_1 + \widehat{B}_2$, $B_1 \gg 0$, $\widehat{B}_2$ — вполне непрерывный, $0 \in \sigma_c(\widehat{C})$.

Отметим, что $\mu \in \rho(\widehat{L})$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \rho(L)$. Это позволяет, сохраняя далее первоначальные обозначения, считать, что в пучке

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$$

оператор C (неограниченно) обратим ($0 \in \sigma_c(C)$).

Так же как и при доказательстве Теоремы 1, в пространстве $\{H, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ для $\lambda \neq \lambda_0$ запишем пучок в виде

$$L(\lambda) = B_1(\lambda I + B_1^{-1}C)(I + (\lambda I + B_1^{-1}C)^{-1})(\lambda^2 B_1^{-1}A + \lambda B_1^{-1}B_2) =$$
$$= \lambda B_1(\lambda I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C)(I + (I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C)^{-1}(\lambda B_1^{-1}A + B_1^{-1}B_2)).$$

Так как по условию $0 \notin \sigma_p(C)$, то при $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ с достаточно малым $|\lambda|$ оператор-функция $\left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1}$ равномерно ограничена (см. [2], формула V.7.1).

Следовательно
$$\left\|\left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1} \lambda B_1^{-1}A\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to 0. \tag{2}$$

Из полной непрерывности оператора $B_1^{-1}B_2$ в силу [2] (Лемма V.7.1) следует, что
$$\left\|\left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1} B_1^{-1}B_2\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получим:
$$\left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1}\left(\lambda B_1^{-1}A + B_1^{-1}B_2\right) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to 0.$$

Таким образом, для $\lambda \neq \overline{\lambda}$ из достаточно малой окрестности нуля
$$\left\|\left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1}\left(\lambda B_1^{-1}A + B_1^{-1}B_2\right)\right\| < 1,$$
а поэтому оператор
$$I + \left(I + \lambda^{-1}B_1^{-1}C\right)^{-1}\left(\lambda B_1^{-1}A + B_1^{-1}B_2\right)$$
непрерывно обратим [3] (Теорема IV.5.5). Следовательно, $\rho(L) \neq \varnothing$ и случай 1. полностью рассмотрен.

Пусть имеет место 2.: $0 \notin \sigma_p(A)$.

Поскольку, $L(\lambda) = \lambda^2\left(A + \lambda^{-1}B + \lambda^{-2}C\right)$, то $\lambda \in \rho(L)$ в том и только в том случае, когда $\mu = \lambda^{-1}$ является регулярной точкой пучка $\widehat{L(\mu)} = A + \mu A + \mu^2 C$.

Для пучка $\widehat{L}$ мы оказались в условиях 1: $\mathbb{R} \not\subset \sigma_p(\widehat{L})$, поскольку $0 \notin \sigma_p(A)$. Следовательно, $\rho(\widehat{L}) \neq \varnothing$, а потому $\rho(L) \neq \varnothing$. Теорема доказана.

Для иллюстрации точности условий Теоремы 2 приведем пример пучка, собственные значения которого заполняют всю комплексную плоскость.

Пример. Пусть $H = \mathbb{C}^2$. Матричные коэффициенты заданы следующим образом:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что все точки плоскости являются собственными значениями пучка, т. е. уравнение $L(\lambda)x = 0$ при каждом λ имеет нетривиальное решение. Как известно, $\lambda \in \mathbb{C}$ будет собственным значением пучка L в том и только том случае, когда $\det L(\lambda) = 0$.

Вычислим определитель:
$$\det L(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - (\lambda^2 - 1)^2 = 0.$$

Следовательно, для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $L(\lambda)x = 0$ имеет ненулевое решение x, т. е. множество собственных значений пучка L заполняет всю комплексную плоскость, другими словами, множество регулярных точек пучка — $\rho(L)$ — пусто.

Заметим, что для указанного пучка $\mathbb{R} \subset \sigma_p(L)$ и $0 \in \sigma_p(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн, С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде / С. Г. Крейн // Доклады Академии наук СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.

2. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров,' С. В. Фомин. — М. : Наука, 1981. — 543 с.

REFERENCES

1. Krein S.G. On the oscillations of a viscous liquid in a vessel. [Krejn S.G. O kolebaniyah vyazkoj zhidkosti v sosude]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1964, vol. 159, no. 2, pp. 262–265.

2. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators. [Gohberg I.C., Krejn M.G. Vvedenie v teoriyu linejnyh nesamosopryazhennyh operatorov]. Moscow: Nauka, 1965, 448 p.

3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza]. Moscow: Nauka, 1981, 543 p.

Сухочева Людмила Ивановна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры математического моделирования Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: l.suhocheva@yandex.ru

Suhocheva Ludmila Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Associate Professor of Mathematical and Modeling Department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: l.suhocheva@yandex.ru