УДК 517.935

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ И ЕГО КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

А. Н. Кузнецов, Е. В. Панасенко, И. Н. Прядко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.12.2024 г.

Аннотация. В статье доказывается управляемость обобщенного реле. Обобщенное реле, как и другие гистерезисные элементы, используется для моделирование разрывных процессов. Обобщенное реле представляет собой некоторую модификацию неидеального реле. Управляемость является важной характеристикой систем гистерезисного типа, так как гарантирует возможность перехода из одного допустимого состояния в другое. Что по сути указывает на возможность его использования.

Ключевые слова: гистерезис, реле, локально явное уравнение, управляемость.

CONTROLLABILITY OF A GENERALIZED RELAY AND ITS COMPUTER IMPLEMENTATION

A. N. Kuznetsov, E. V. Panasenko, I. N. Pryadko

Abstract. The controllability of the generalized relay is proved in the paper. Like other hysteresis elements, the generalized relay is used for modeling discontinuous processes. It is a certain modification of a non-ideal relay. Controllability is an important characteristic of hysteresis systems because it guarantees the possibility of transitioning from one permissible state to another. This essentially confirms its applicability.

Keywords: hysteresis, relay, locally explicit equation, controllability.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛОКАЛЬНО ЯВНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Уравнение вида:

$$u(t+dt)-u(t)=D(t,u,dt)+o(dt) \tag{1}$$

называется уравнением с нелинейным дифференциалом [1].

Считается, что $D(t,u,dt)$ определена по (t,u) на некотором множестве $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, а по dt - на промежутке $[0,\Delta(t,u))$ и принимает значения в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, предполагается, что $D(t,u,0)=0$. Пусть I - некоторый промежуток числовой оси. Введем обозначение $\widetilde{I}=I\backslash\{\sup I\}$.

Определение 1. *Непрерывная слева функция $u=\varphi(t)$, определенная на некотором промежутке I числовой оси, называется* решением *уравнения* (1)*, если для любого $t\in\widetilde{I}$ справедливо соотношение:*

$$\lim_{dt\to+0}\frac{1}{dt}[\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)]=0$$

Среди решений уравнения (1) выделяют класс сильных решений.

Определение 2. *Решение φ уравнения* (1) *называется* сильным *если для каждого $t\in\widetilde{I}$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех $dt\in[0,\delta)$ справедливо равенство:*

$$\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)=0 \tag{2}$$

Определение 3. *Уравнение* (1) *называется* локально явным [2], *если для всякой точки* $(t_0, u_0) \in U$ *существует сильное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(t_0) = u_0 \tag{3}$$

2. ОБОЩЕННОЕ РЕЛЕ

В [2] построена локально явная модель обобщенного реле с пороговыми значениями α, β $(\beta < \alpha)$.

Пусть существуют непрерывные функции $f(x) : (-\infty; \alpha] \to \mathbb{R}$ и $g(x) : [\beta, +\infty) \to \mathbb{R}$, причем $f(x) \neq g(x)$ при $x \in (\beta, \alpha)$.

Обобщенное реле — это преобразователь с произвольным непрерывным входом $\sigma(t)$ и выходом, имеющим два возможных значения: $f[\sigma(t)]$ и $g\,[\sigma\,(t)]$, причем при $\sigma(t) \in [\beta, \alpha]$, возможны оба выходных значения, при $\sigma(t) < \beta$ – только $f[\sigma(t)]$, при $\sigma(t) > \alpha$ – только $g[\sigma(t)]$.

Выход $f[\sigma(t)]$ скачком меняется на $g[\sigma(t)]$ при достижении входным сигналом значения α, а выход $g[\sigma(t)]$ на $f[\sigma(t)]$ - при достижении β.

Обобщенное реле может быть описано уравнением (1), где нелинейный дифференциал $D(t,u,dt)$ при $dt > 0$ имеет вид:

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} f[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)] & \text{если } \sigma(t) < \alpha, u = f[\sigma(t)], \\ g[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)] & \text{если } \sigma(t) = \alpha, u = f[\sigma(t)], \\ g[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)] & \text{если } \sigma(t) > \beta, u = g[\sigma(t)], \\ f[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)] & \text{если } \sigma(t) = \beta, u = g[\sigma(t)]. \end{cases} \tag{4}$$

Предполагается, что множество U допустимых пар (t,u) определяется как объединение графиков функций $u = f[\sigma(t)]$ и $u = g[\sigma(t)]$.

В [2] показано, что уравнение обощенного реле является локально явным, что гарантирует существование сильного решения задачи (1), (4), (3) с любым допустимым начальным условием. Кроме того в [2] показано, что любое сильное решение может быть продолжено на $[t_0,T)$, где $[t_0,T)$ - область определения входной функции σ и установлены условия отсутсвия решений, которые не являются сильными.

В [3] установлены монотонность обощенного реле по входам и пороговым значениям. В [4] дано более детальное определение монотонности.

3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ

Определение 4. *Пусть область возможных состояний преобразователя W не зависит от t, причем из допустимого входа $\sigma(t)$ $(t \geqslant t_0)$ при состоянии $\{\sigma_0.u_0\}$ вытекает допустимость при том же состоянии входа $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma(t + t_0 - t_1)$ $(t \geqslant t_1)$ и справедливость равенства*

$$W[t_1,\sigma_0,u_0]\widetilde{\sigma}(t) = W[t_0,\sigma_0,u_0]\sigma(t + t_0 - t_1)$$

Тогда преобразователь W называется автономным *(см. [5]).*

Предложение 1. *Преобразователь обобщенного реле автономен.*

Доказательство. Обозначим $c = t_0 - t_1$, тогда $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma(t + c)$. Для формулы (4) будем через D обозначать функцию, соответствующую σ, через $\widetilde{D}-$ функцию, соответствующую $\widetilde{\sigma}$.

Докажем, что $\widetilde{u}(t) = u(t + c)$.

Предположим противное. Пусть $t_1 = inf\{t \geqslant t_0 : \widetilde{u}(t) \neq u(t+c)\}$. Из непрерывности слева $u(t)$,$\widetilde{u}(t)$ следует, что $\widetilde{u}(t_1) = u(t_1 + c)$.

Так как $\widetilde{u}(t)$– сильное решение уравнения обобщенного реле, то

$$\exists(\delta_1 > 0)\forall(dt \in (0,\delta_1))[\widetilde{u}(t_1 + dt) - \widetilde{u}(t_1) - \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),dt) = 0].$$

Откуда $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),t - t_1)$ при $t \in [t_1,t_1 + \delta)$.

По определению обобщенного реле $\widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)]$ или $\widetilde{u}(t_1) = g[\widetilde{\sigma}(t_1)]$. Пусть для определенности $\widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)]$, тогда $\widetilde{\sigma}(t_1) \leqslant \alpha$.

Пусть $\tau = t + c$ (в часности, $\tau_1 = t_1 + c$). Так как $u(\tau)$ - сильное решение уравнения обобщенного реле, то

$$\exists(\delta_2 > 0)\forall(dt \in (0,\delta_2))\forall(\tau = \tau_1 + dt)[u(\tau) = u(\tau_1) + D(\tau_1, u(\tau_1),\tau - \tau_1)].$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, тогда для $\forall(t \in (t_1,t_1 + \delta])$ верно $u(t + c) = u(t_1 + c) + D(t_1 + c, u(t_1 + c),t - t_1)$ и $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1), t - t_1)$.

Кроме того, $u(t_1 + c) = \widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = f[\sigma(t_1 + c)]$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\sigma(t_1 + c) = \widetilde{\sigma}(t_1) = \alpha$, тогда из формулы (4)

$$D(t_1 + c,u(t_1 + c),t - t_1) = g[\sigma(t_1 + c + t - t_1)] - f[\sigma(t_1 + c)] = g[\sigma(t + c)]- \\ - f[\sigma(t_1 + c)] = g[\widetilde{\sigma}(t)] - f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),t - t_1).$$

Следовательно, $\widetilde{u}(t) = u(t + c)$ при $t \in [t_1,t_1 + \delta)$, что противоречит определению t_1 .

2) Пусть $\sigma(t_1 + c) < \alpha$, следовательно, $\widetilde{\sigma}(t_1) < \alpha$, тогда из формулы (4)

$$D(t_1 + c,u(t_1 + c),t - t_1) = f[\sigma(t_1 + c + t - t_1)] - f[\sigma(t_1 + c)] = g[\sigma(t + c)]- \\ - f[\sigma(t_1 + c)] = f[\widetilde{\sigma}(t)] - f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),t - t_1).$$

Следовательно, $\widetilde{u}(t) = u(t + c)$ при $t \in [t_1,t_1 + \delta)$. Получили противоречие.
Если $\widetilde{u}(t_1) = g[\widetilde{\sigma}(t_1)]$, то доказательнство аналогично.

Определение 5. *Преобразователь называетс* статическим, *если он автономен и при переходе от входного сигнала* $\sigma(t)$ $(t \geqslant t_0)$ *к входному сигналу* $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma[\theta t + (1-\theta)t_0]$ $(t \geqslant t_0)$, *где* $\theta > 0$, *выходной сигнал* $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ *переходит в выходной сигнал* $\widetilde{u}(t) = u[\theta t + (1-\theta)t_0]$ $(t \geqslant t_0)$ *(см. [5]).*

Предложение 2. *Преобразователь обобщенного реле статичен.*

Доказательство. Пусть водной сигнал $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma[\theta t + (1 - \theta)t_0]$. Докажем, что в таком случае выходной сигнал $\widetilde{u}(t) = u[\theta t + (1 - \theta)t_0]$.

Предположим противное: пусть $t_1 = inf\{t \geqslant t_0 : \widetilde{u}(t) \neq u[\theta t + (1-\theta)t_0]\}$. Из непрерывности слева функций $u(t), \widetilde{u}(t)$, следует, $\widetilde{u}(t_1) = u[\theta t_1 + (1 - \theta)t_0]$.

Так как $\widetilde{u}(t)$ — сильное решение уравнения обобщенного реле, то

$$\exists(\delta_1 > 0)\forall(dt \in (0,\delta_1))[\widetilde{u}(t_1 + dt) - \widetilde{u}(t_1) - \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),dt) = 0]$$

Откуда $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),t - t_1)$ при $t \in [t_1, t_1 + \delta)$.

По определению обобщенного реле $\widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)]$ или $\widetilde{u}(t_1) = g[\widetilde{\sigma}(t_1)]$. Пусть для определённости $\widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)]$, тогда $\widetilde{\sigma}(t_1) \leqslant \alpha$.

Обозначим $\tau = \theta t + (1 - \theta)t_0$ (в частности, $\tau_1 = \theta t_1 + (1 - \theta)t_0$). Так как $u(\tau)$ - сильное решение уравнения обобщенного реле, то

$$\exists(\delta_2 > 0)\forall(dt \in (0,\delta_2))\forall(\tau = \tau_1 + dt)[u(\tau) = u(\tau_1) + D(\tau_1,u(\tau_1),\tau - \tau_1)]$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2/\theta\}$, тогда для $\forall(t \in (t_1,t_1+\delta])$ верно $u[\theta t + (1-\theta)t_0] = u[\theta t_1 + (1-\theta)t_0] + D(\theta t_1 + (1-\theta)t_0, u[\theta t_1 + (1-\theta)t_0],\theta(t-t_1))$ и $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t_1) + \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1), t-t_1)$.

Кроме того, $u[\theta t_1 + (1-\theta)t_0] = \widetilde{u}(t_1) = f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0]]$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0] = \widetilde{\sigma}(t_1) = \alpha$, тогда из формулы (4)

$$\begin{aligned}D(\theta t_1 + (1-\theta)t_0, u[\theta t_1 + (1-\theta)t_0], \theta(t-t_1)) = g[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0 + \theta(t-t_1)]]-\\ - f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0]] = g[\sigma[\theta t + (1-\theta)t_0]] - f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0]] = g[\widetilde{\sigma}(t)]-\\ - f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = \widetilde{D}(t_1,\widetilde{u}(t_1),t-t_1)\end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{u}(t) = u[\theta t + (1-\theta)t_0]$ при $t \in [t_1,t_1+\delta)$. Получили противоречие.

2) Пусть $\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_1] = \widetilde{\sigma}(t_1) < \alpha$, тогда из формулы (4)

$$\begin{aligned}D(\theta t_1 + (1-\theta)t_0, u[\theta t_1 + (1-\theta)t_0],\theta(t-t_1)) = f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0 + \theta(t-t_1)]]-\\ - f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0]] = f[\sigma[\theta t + (1-\theta)t_0]] - f[\sigma[\theta t_1 + (1-\theta)t_0]] = f[\widetilde{\sigma}(t)]-\\ - f[\widetilde{\sigma}(t_1)] = \widetilde{D}(t_1, \widetilde{u}(t_1), t-t_1)\end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{u}(t) = u[\theta t + (1-\theta)t_0]$ при $t \in [t_1,t_1+\delta)$. Получили противоречие.

Если $\widetilde{u}(t_1) = g[\widetilde{\sigma}(t_1)]$, то доказательство аналогично.

Определение 6. *Статичный преобразователь* управляем *(см. [5]), если для любых двух возможных состояний* $\{\sigma_0,u_0\}$, $\{\sigma_1,u_1\}$ *можно указать такой допустимый при состоянии* $\{\sigma_0,u_0\}$ *вход* $\sigma(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, *что* $\sigma(t_0) = \sigma_0$, $\sigma(t_1) = \sigma_1$ *и*

$$W[t_0,\sigma_0,u_0]\sigma(t_1) = u_1.$$

Предложение 3. *Преобразователь обобщенного реле управляем.*

Доказательство. Будем доказывать это свойство в двух случаях. Первый случай, когда $u_1 = g(\sigma(t_1))$, следовательно, $\sigma_1 \geqslant \beta$. Тогда в качестве $\sigma(t)$ возьмём функцию, график которой является выпуклой вверх параболой; он проходит через (t_0,σ_0), (t_1,σ_1) и имеет вершину в точке $(\tau \in [t_0,t_1], \max\{\sigma_0,\sigma_1\}+\alpha-\beta)$. Нетрудно проверить, что построенная входная функция будет удовлетворять всем условиям в определении 6, так как в момент τ значения входа не меньше верхнего значения α значит, после этого момента $u = g(\sigma(t))$ до момента, в который вход достигает нижнего порогвоого значения β, следовательно, $u_1 = u(t_1) = g(\sigma(t_1))$.

По аналогии с этим, в случае $u_1 = f(\sigma(t_1))$ также можно построить входную функцию, удовлетворяющую всем условиям в определении 6. Возьмём функцию, график которой является выпуклой вниз параболой; он проходит через (t_0,σ_0), (t_1,σ_1) и имеет вершину в точке $(\tau \in [t_0,t_1], \min\{\sigma_0,\sigma_1\} + \beta - \alpha)$.

4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Данная модель построена на основе гладкой модели неидеального реле Нгуен – Садовского.

4.1. Гладкая модель неидельного реле Нгуен – Садовского

Гладкая модель неидеального реле Нгуен–Садовского [6] имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{w} = K[(\sigma-\alpha)_+(1-w) - (\beta-\sigma)_+ w],\\ \widetilde{x} = int(w+\frac{1}{2}),\end{cases} \tag{5}$$

где
$w = w(t)$ - промежуточная (гладкая) выходная функция,
K - большой параметр,
$\sigma = \sigma(t)$ - входная непрерывная функция,
σ_+ - положительная часть числа σ, т.е. $\max\{0,\sigma\}$,
$int(\sigma)$ - непрерывная слева целая часть числа, т.е. наибольшее целое число, меньшее $[\sigma]$ (в целочисленных точках значения $int(\sigma)$ на единицу меньше соответствующих значений традиционной функции $[\sigma]$).

Если $\sigma(t) < \beta$, изменение гладкого выхода описывается уравнением $\dot{w} = -K(\beta - \sigma(t))w$, которое имеет единственное положение равновесия $w = 0$. На интервалах, где $\sigma(t) > \alpha$, гладкий выход меняется согласно уравнению $\dot{w} = K(\sigma(t) - \alpha)(1 - w)$ с положением равновесия $w = 1$. Большой параметр K обеспечивает быстрое приближение гладкого выхода к соответствующему положению равновесия. Если $\beta \leqslant \sigma(t) \leqslant \alpha$ гладкий выход сохраняет постоянное значение, так как $\dot{w} = 0$.

Для выхода гладкого описания реле (5), соответствующего входу σ и начальному условию $\widetilde{x}(t_0) = w(t_0) = x_0$, будем использовать обозначение $\widetilde{R}^t_{t_0}(\beta,\alpha,\sigma)(x_0)$.

В [4] доказана следующая теорема о степени несовпадения выходов «гладкого» и локально явного описания.

Теорема 4. *Пусть непрерывная функция σ в точках локального минимума и максимума не принимает значение, соответственно, β и α. Тогда на любом конечном отрезке $[t_0,T]$ степень несовпадения выходов локально явного и нового гладкого реле, характеризующаяся мерой множества,*

$$\mu = \mu\{t \in [t_0,T] : R^t_{t_0}(\beta,\alpha,\sigma)(x_0) \neq \widetilde{R}^t_{t_0}(\beta,\alpha,\sigma)(x_0)\},$$

стремится к 0 *при* $K \to +\infty$.

(Здесь $R^t_{t_0}(\beta,\alpha,\sigma)(x_0)$ выход локально явной модели реле).

4.2. Компьютерная реализация модели обобщенного реле

На основании модели (5) компьютерная реализация обобщенного реле имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(\sigma - \alpha)_+(1 - w) - (\beta - \sigma)_+ w], \\ \widetilde{u} = (1 - \mathrm{round}(w(t))f[\sigma(t)] + \mathrm{round}(w(t))g[\sigma(t)], \end{cases} \tag{6}$$

$round$ – округление по банковским правилам.

Пример реализация в Python. Дано: вход $\sigma(t) = |t - 4|$, пороговые значения $\beta = 1,\alpha = 5$, непрерывные функции $f[x] = |x - 4| + 6$ и $g[x] = -|x - 4|$. Строится выход: $\widetilde{u}$.

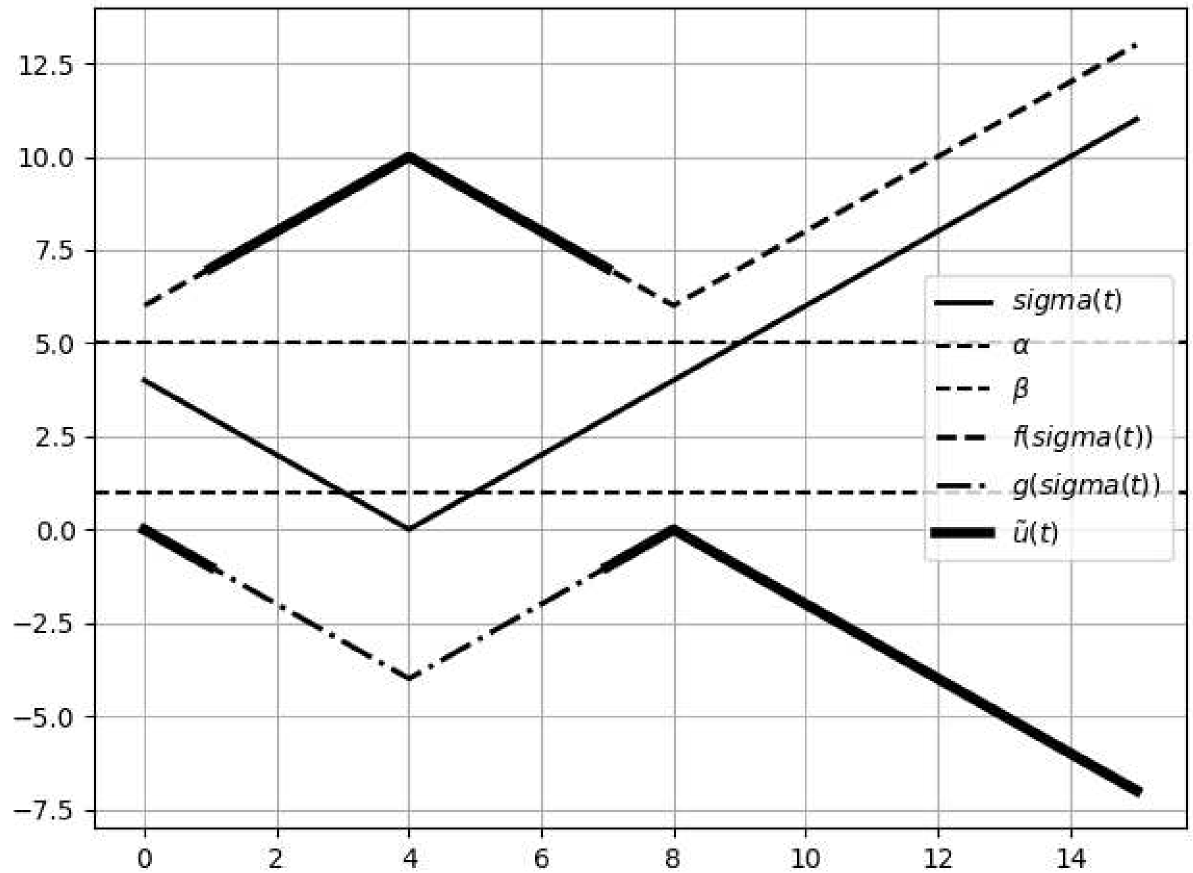
Код:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

beta = 5
alpha = 1
y0 = 0

def fsigma(t):
    return np.abs(t-4)
```

```
def f(sigma):
    return np.abs(sigma-4) + 6

def g(sigma):
    return -np.abs(sigma-4)

def model(y, t):
    k = 1000000000
    dydt = k * np.maximum(fsigma(t) - alpha, 0) * (1 - y) - k*y *\\
    np.maximum(beta - fsigma(t), 0)
    return dydt

def u(y, t):
    um = []
    check = True if y0 == 1 else False
    for q in range(0, len(t)):
        if round(y[q][0]) == 0:
            if check:
               um.append((1 - np.around(y[q][0])) * f(fsigma(t[q])) +\\
               np.around(y[q][0]) * g(fsigma(t[q])))
            else:
               um.append(None)
               check = True
        else:
            if not check:
               um.append((1 - np.around(y[q][0])) * f(fsigma(t[q])) +\\
               np.around(y[q][0]) * g(fsigma(t[q])))
            else:
               um.append(None)
               check = False
    return um

t_h = 15
t = np.linspace(0, 15, t_h*1000)
y = odeint(model, y0, t)
fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(t, fsigma(t), color='black', linewidth=2, linestyle='-',
        label=r"""$sigma(t)$""")
ax.axhline(alpha, color='black', linewidth=1.5, linestyle='--',
           label=r"""$\alpha$""")
ax.axhline(beta, color='black', linewidth=1.5, linestyle='--',
           label=r"""$\beta$""")
ax.plot(t, f(fsigma(t)), color='black', linewidth=2,linestyle='dashed',
        label=r"""$f(sigma(t))$""")
ax.plot(t, g(fsigma(t)), color='black', linewidth=2, linestyle='-.',
        label=r"""$g(sigma(t))$""")
ax.plot(t, u(y, t), color='black', linewidth=4,
        label=r"""$\tilde{u}(t)$""")
```

```
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.grid()
plt.show()
```

Результат работы:



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kloeden, P. E. Quasti-flows and equations with nonlinear differentials / P. E. Kloeden, B. N. Sadovsky, I. E. Vasilyeva // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. — 2002. — V. 51. — P. 1143–1158.

2. Прядко, И. Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем / И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 40–50.

3. Абрамова, Ю. В. Свойства монотонности локально явной модели обобщенного реле / Ю. В. Абрамова, И. Н. Прядко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 2. — С. 122–125.

4. Systems with Non-Smooth Inputs: Mathematical Models of Hysteresis Phenomena, Biological Systems, and Electric Circuits / J. Appell, Т. Х. Нгуен, Л. П. Петрова, И. Н. Прядко. — Берлин : Walter de Gruyter GmbH, 2021. — 269 p.

5. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

6. Нгуен Тхи Хиен. Гладкая модель реле с гистерезисом / Нгуен Тхи Хиен, Б. Н. Садовский // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 11. — С. 100–111.

REFERENCES

1. Kloeden P.E., Sadovsky B.N., Vasilyeva I.E. Quasti-flows and equations with nonlinear differentials. Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl., 2002, vol. 51, pp. P. 1143–1158.

2. Pryadko I.N., Sadovsky B.N. On locally explicit models of some nonsmooth systems. [Pryadko I.N., Sadovskij B.N. O lokal'no yavnyh modelyah nekotoryh negladkih sistem]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and telemechanics*, 2004, no. 10, pp. 40–50.

3. Abramova Yu.V., Pryadko I.N. Monotonicity properties of a locally explicit model of a generalized relay. [Abramova YU.V., Pryadko I.N. Svojstva monotonnosti lokal'no yavnoj modeli obobshchennogo rele]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 2, pp. 122–125.

4. Appell J., Nguyen T. H., Petrova L. P., Pryadko I. N. Systems with Non-Smooth Inputs: Mathematical Models of Hysteresis Phenomena, Biological Systems, and Electric Circuits. Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2021, 269 p.

5. Krasnoselsky M.A., Pokrovsky A.V. Systems with hysteresis. [Krasnosel'skij M.A., Pokrovskij A.V. Sistemy s gisterezisom]. Moscow: Nauka, 1983, 272 p.

6. Nguyen Thi Hien, Sadovsky B.N. Smooth model of relay with hysteresis. [Nguen Thi Hien, SadovskijB.N. Gladkaya model' rele s gisterezisom]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and telemechanics*, 2010, no. 11, pp. 100–111.

Кузнецов Алексей Николаевич, студент, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, Воронеж, Россия
E-mail: kuzne.kuznetsov123@yandex.ru

Kuznetsov Alexey Nikolaevich, Student, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh, Russia
E-mail: kuzne.kuznetsov123@yandex.ru

Панасенко Екатерина Владимировна, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, Воронеж, Россия
E-mail: kavunovakatya@gmail.com

Panasenko Ekaterina Vladimirovna, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh, Russia
E-mail: kavunovakatya@gmail.com

Прядко Ирина Николаевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, Воронеж, Россия
E-mail: irap@list.ru
Тел.: +7(473)2208771

Pryadko Irina Nirolaevna, candidate of physics and mathematics sciences, Associate Professor, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh, Russia
E-mail: irap@list.ru
Tel.: +7(473)2208771