

ФРИКЦИОННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В СТЕРЖНЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ НА ТОРЦЕ*

В. Я. Белошапка, И. А. Плачков

Азовский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 01.10.2024 г.

Аннотация. Исследуются автоколебания в упругом стержне, контактирующем торцом с плоскостью при наличии неньютоновского сухого трения. Показано, что при различных начальных условиях и угловых скоростях вращения период фрикционных автоколебаний остается неизменным. Период автоколебания в 4 раза превосходит время прохождения упругой волны вдоль стержня. Установлено, что начальные условия могут существенно влиять на фазовый портрет автоколебания.

Ключевые слова: упругий стержень, сухое трение, автоколебания, начальные условия, упругая волна.

FRICTIONAL TORSIONAL SELF-OSCILLATIONS IN A ROD WITH DRY FRICTION AT THE END

V. Ya. Beloshapka, I. A. Plachkov

Abstract. Self-oscillations in an elastic rod contacting the end face with a plane in the presence of non-Newtonian dry friction are investigated. It is shown that under different initial conditions and angular velocities of rotation, the period of frictional self-oscillations remains unchanged. The period of self-oscillation is 4 times longer than the time of passage of an elastic wave along the rod. It is established that the initial conditions can significantly affect the phase portrait of self-oscillation.

Keywords: elastic rod, dry friction, self-oscillation, initial conditions, elastic wave.

ВВЕДЕНИЕ

Фрикционные автоколебания представляют собой самовозбуждающиеся колебания, возникающие в механических системах с сухим трением, подверженных внешним воздействиям неколебательного характера. В связи с частым проявлением этого явления в технических системах изучению фрикционных колебаний посвящено большое количество работ [1–5]. Подавляющая часть этих исследований выполнена либо для систем с сосредоточенными параметрами или в дискретных структурах с разделенными упругими и инерционными звеньями. Изучению же автоколебаний в распределенных системах посвящено ограниченное количество работ [6–9]. При этом, до настоящего времени сухое трение, как причина нелинейности, находится в фокусе исследований в теории динамических систем. В связи с отсутствием аналитических решений нелинейных краевых задач при их анализе чаще всего используются такие методы как: метод бегущих волн, приводящий к дифференциально-разностным уравнениям и построениям Ламерея и приближенный аналитический метод частичной гармонической линеаризации. Однако, этими методами не позволяют выполнить исчерпывающий анализ автоколебаний.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы ОТГЕ–2024–0002).

© Белошапка В. Я., Плачков И. А., 2025

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе изучается процесс возбуждения крутильных автоколебаний в стержне численными методами. Вертикальный однородный стержень с радиусом R (рис. 1) опирается на горизонтальную поверхность, со стороны которой на нижний торец стержня действует сила трения с известным законом зависимости коэффициента трения от скорости $k(v)$.

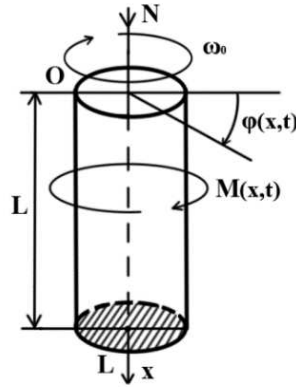


Рис. 1. Вертикальный однородный стержень

На верхний торец стержня вертикально вниз действует прижимающая сила N . При этом верхний торец стержня вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси симметрии. В качестве $k(v)$ использовалась экспериментально полученная в [1] зависимость: $k(v) = \frac{k_0}{1+av}$, где k_0 и a определялись из эксперимента. Момент сопротивления вращению со стороны кольца радиусом r с шириной Δr равен:

$$\Delta M_L = 2\pi r^2 \Delta r k \sigma,$$

где $\sigma = \frac{N}{\pi R^2}$ — нормальное давление на площадке контакта. Тогда интегрируя выражение

$$dM_L = \frac{2k_0 N}{R^2} \cdot \frac{r^2 dr}{1 + a\omega_L r}$$

в пределах от 0 до R получаем выражение для момента сопротивления вращению:

$$M_L(N, \omega_L) = \frac{k_0 N}{a\omega_L} \left(1 - \frac{2}{a\omega_L R} + \frac{2}{(a\omega_L R)^2} \ln(a\omega_L R + 1) \right)$$

Максимальное значение $M_L = \frac{2}{3}k_0 N R$ достигается при $\omega_L = 0$, как видно на рисунке 2.

Крутящий момент, действующий в поперечном сечении с координатой x имеет вид: $M(x) = Gl_p \frac{d\varphi}{dx}$, где G — модуль сдвига $l_p = \frac{\pi R^2}{2}$ — полярный момент инерции в сечении стержня. Тогда граничные условия будут:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \\ x = L : \quad & Gl_p \frac{d\varphi}{dx} = -M_L(N, \omega_L). \end{aligned}$$

Отличие в углах поворота верхнего и нижнего торца стержня будет обусловлено двумя вкладками. Первая составляющая — не зависящая от времени статическая закрутка (угол поворота верхнего торца, при котором начнет проскальзывать нижний торец): $\frac{M_L(N, \omega_0)}{Gl_p}$. Возникновение второй составляющей обусловлено зависимостью момента сопротивления вращению

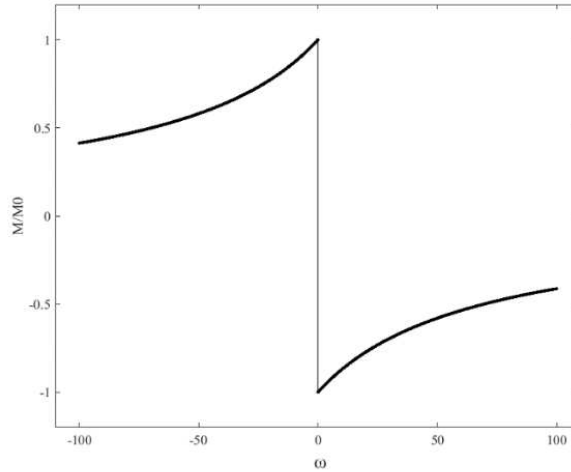


Рис. 2. Нормированная зависимость момента сопротивления вращению стержня от угловой скорости его нижнего торца. M_0 — максимальное значение момента

от скорости проскальзывания ω_L . Для записи краевой задачи удобно ввести нормированные координату, время и частоту: $y = \frac{x}{L}, \tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cdot \frac{t}{L}$ и $\Omega = \frac{\omega L}{C}$ соответственно где C — скорость упругих волн в стержне, ρ — плотность материала стержня. Исходная нелинейная краевая задача после нормировки имеет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = \frac{d^2 \varphi}{dy^2}; 0 \leq y \leq 1, \tau > 0 \quad (1)$$

граничные условия:

$$\text{при } y = 0 : \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega_0;$$

$$\text{при } y = 1 : \quad \frac{d\varphi}{dy} = -(M_L(N, \Omega_L) - M_L(N, \Omega_0))/Gl_p$$

начальные условия:

$$\text{при } \tau = 0 : \quad \varphi = M_L(N, \Omega_0)/Gl_p;$$

$$\text{при } \tau = 0 : \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega_0.$$

Для расчета использовалась неявная трехслойная конечно-разностная схема с равномерной сеткой по y и τ . Волновое уравнение аппроксимировалось следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_3(i) - 2\varphi_2(i) + \varphi_1(i)}{d^2} = \mu \frac{\varphi_3(i-1) - 2\varphi_2(i) + \varphi_3(i+1)}{h^2} + \\ + \mu \frac{\varphi_1(i-1) - 2\varphi_1(i) + \varphi_1(i+1)}{h^2} + (1 - 2\mu) \frac{\varphi_2(i-1) - 2\varphi_2(i) + \varphi_2(i+1)}{h^2}, \end{aligned}$$

где d и h величина шага по τ и y соответственно; $\varphi_1(i), \varphi_2(i), \varphi_3(i)$ — значения искомой функции в i — том узле на трех временных слоях соответственно; где i изменялось от 1 до NN , где NN — количество узлов по оси y . Значения $\mu \in [0.25, 0.5]$. В этом интервале значений μ схема была безусловно устойчива. Для решения системы уравнений на новом временном слое найдем выражение для $\varphi_3(NN)$ исходя из граничного условия при $y = 1$. Для 3-го и 2-го слоя можно записать:

$$\varphi_3(NN) - \varphi_3(NN-1) = -(M_L(N, \Omega_L) - M_L(N, \Omega_0))h/Gl_p,$$

$$\varphi_2(NN) - \varphi_2(NN - 1) = -(M_L(N, \Omega_{2L}) - M_L(N, \Omega_0))h/Gl_p.$$

Вычитая уравнения имеем:

$$\varphi_3(NN) - \varphi_3(NN - 1) - \varphi_2(NN) + \varphi_2(NN - 1) = \frac{d}{d\Omega}(M_L(N, \Omega_2))(\Omega_{3L} - \Omega_{2L})h/Gl_p.$$

Производная $\frac{d}{d\Omega}(M_L(N, \Omega))$ при этом непрерывна и положительна на всем интервале скоростей. Подставляя в предыдущее уравнение выражение

$$\Omega_{3L} \approx \frac{2(S_3(NN) - S_2(NN))}{d} - \Omega_{2L}$$

получим:

$$S_3(NN) = S_3(NN - 1)/C_1 + C_2,$$

где C_1 и C_2 выражаются только через углы поворота и скорости на предыдущих слоях. Полученное выражение для $S_3(NN)$ позволяет записать систему уравнений для нахождения $S_3(i)$ на всем временном слое.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $0.1 < a < 10, 0.001 < \omega_0 < 500, 10 < N < 10000(H), 0.1 < k < 0.3, G = 80(\text{ГПа}), L=1(\text{м})$ при различных начальных условиях. Характер возникающих автоколебаний при неизменных начальных условиях качественно оставался прежним во всех интервалах перечисленных параметров. На рис. 3а

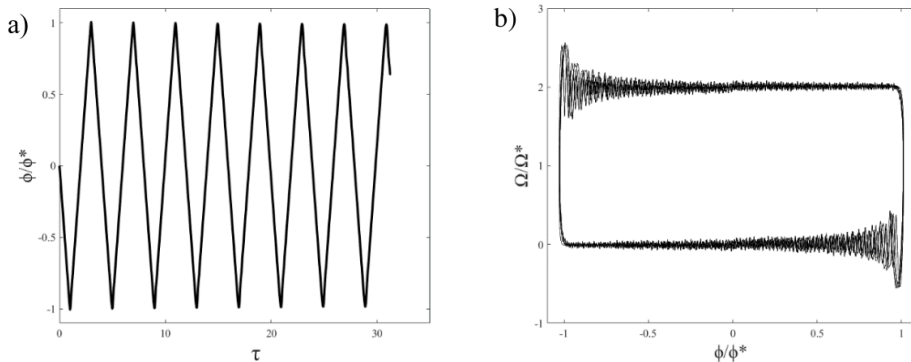


Рис. 3. а) временная зависимость нормированного угла закрутки нижнего торца (ϕ^* – максимальный угол отклонения); б) фазовый портрет колебательного процесса (Ω^* – угловая скорость верхнего торца). При $\tau = 0$: $\varphi(y) = -M_L(N, \Omega_0)y/Gl_p, d\varphi/dt = \Omega_0$.

приведена временная зависимость угла закрутки нижнего торца при $y = 1$ после вычитания вклада от равномерного вращения.

Зависимость состоит из линейных участков, за исключением областей вблизи экстремумов и имеет периодический характер с периодом $T = 4$. Этот период кратен времени пробега волны по стержню ($\tau = 1$). Частота возбуждаемых автоколебаний при этом совпадает с частотой основной моды четвертьволнового вибратора. Как видно из рис. 3 (а, б), угловая скорость изменяется скачкообразно в момент наибольшего углового отклонения, оставаясь постоянной большую часть периода T . После скачкообразного изменения значение скорости осциллирует с частотой существенно больше частоты автоколебания. В работах [7, 9] анализ рассматриваемой системы был выполнен с использованием метода бегущих волн, сводящего задачу к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Согласно этим результатам

временная зависимость скорости имеет вид разрывной функции: $\Omega = C \operatorname{sign}(\sin(n\pi/2)\tau)$, (n — номер собственной формы по которой задано начальное возмущение). Ускорение при скачке скорости оказывается бесконечно большим и фазовый портрет при таком решении для $n = 1$ будет иметь вид строго правильного прямоугольника. При численном решении наибольшее значение ускорения всегда ограничено. Так для автоколебания на рис. 5 наибольшее значение ускорения в относительных координатах не превышало 50. Отсутствие осцилляций после скачка скорости в этих результатах вероятно связано с пренебрежением моментом инерции нижнего конца стержня.

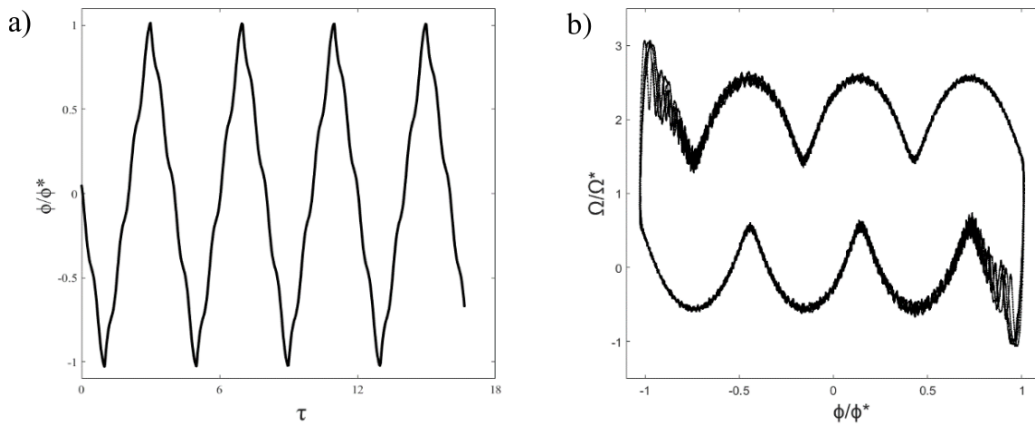


Рис. 4. а) временная зависимость нормированного угла закрутки нижнего торца (φ^* — максимальный угол отклонения); б) фазовый портрет колебательного процесса (Ω^* — угловая скорость верхнего торца). При $\tau = 0$ возбуждалась собственная функция с частотой $7\pi/2$.

Установлено, что начальные условия существенно влияют на характер автоколебаний. Начальные условия задавались как собственными функциями для стержня со свободным концом, так и функциями произвольного вида. Собственные функции в нормированных координатах имели вид:

$$\varphi_n(y) = C \sin((2n + 1)\pi y/2), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

с соответствующими собственными частотами: $((2n + 1)\pi/2)$. На верхнем конце всегда был узел, на нижнем — пучность. Возбуждение основной моды колебаний при $n = 0$ не приводило к изменению автоколебаний, зависимости на рис. 3 сохраняли тот же вид. Возбуждение более высоких гармоник ($n > 0$) в начальных условиях влияло как на временные зависимости угла закрутки и угловой скорости, так и на вид фазового портрета. На рисунках 4 и 5 показаны эти зависимости при $n = 3$.

Период зависимости $\varphi/\varphi^*(\tau)$ оставался прежним ($T = 4$), но линейная зависимость на участках между экстремумами отсутствовала. Эти отклонения зависимостей от линейной свидетельствуют о колебаниях угловой скорости. Этот факт также отражен на фазовом портрете на рис. 4 б).

Временная зависимость угловой скорости также сохраняет периодический характер с периодом основной моды ($T = 4$) (рис. 5). При этом на зависимости в момент наибольшего углового отклонения появились колебания более высокой частоты. Частота этих колебаний совпадает с частотой собственной функции в начальных условиях ($7\pi/2$). Анализ автоколебаний при других собственных гармониках в начальных условиях свидетельствует, что во всех случаях временная зависимость угла закрутки всегда периодична с периодом $T = 4$. При этом, частота и количество колебаний вблизи наибольшего углового отклонения определялось только номером гармоники в начальных условиях. При задании начальных условий

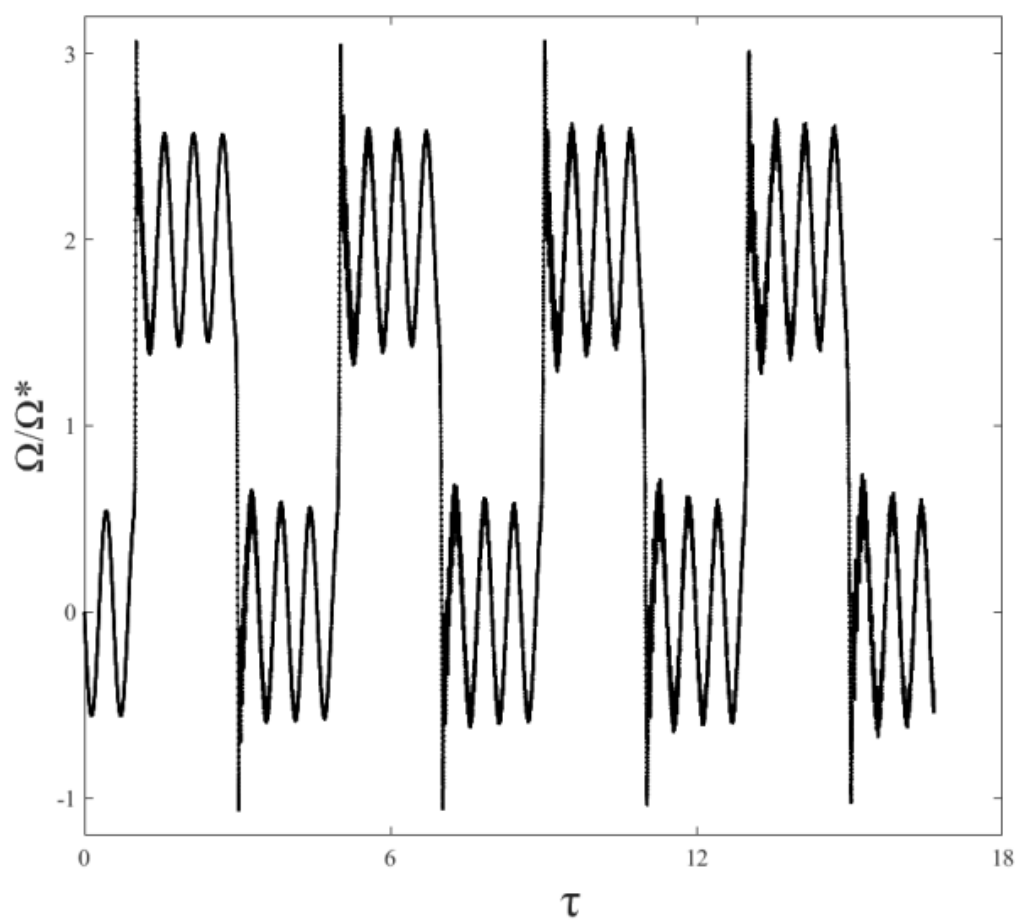


Рис. 5. Временная зависимость угловой скорости при возбуждении при $\tau = 0$ собственной функции с частотой $7\pi/2$.

функциями произвольного вида всегда также возбуждались периодические колебания только с периодом $T = 4$. Временные зависимости угла отклонения и скорости, а также фазовый портрет автоколебания могли иметь более сложный вид по сравнению с начальными условиями на собственных гармониках.

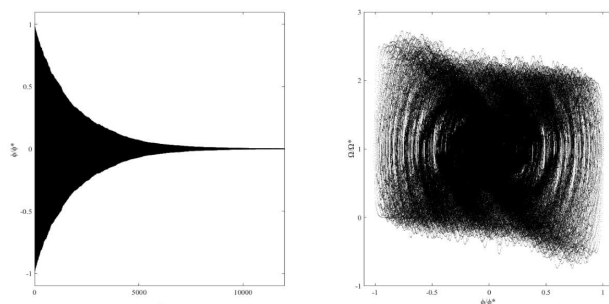


Рис. 6. Временная зависимость угла закрутки (а) и фазовый портрет автоколебания (б) при наличии вязких потерь.

В связи с негативным влиянием автоколебаний в стержнях на функционирование узлов конструкций рассматривалось влияние вязких потерь при вращении стержня в жидкой среде. Несмотря на то, сила взаимодействия твердой поверхности с потоком жидкости при различных значениях числа Рейнольдса по-разному зависит от скорости потока, качественно характер влияния вязкости будет одинаков. Для учета влияния вязкости в правой части волнового уравнения (1) добавлялся момент сил вязкого сопротивления на единицу длины стержня. На рис. 6 (а, б) показана возможная временная зависимость угла закрутки и фазовый портрет при наличии вязких потерь. Как видно, автоколебания затухают со временем. Угол закрутки исчезает и фазовая траектория сворачивается в точку. Стержень при этом вращается как единое целое.

Выполненный в работе анализ крутильных автоколебаний упругого стержня с сухим неньютоновским трением на торце позволяет сделать следующие выводы:

- период фрикционных автоколебаний для выбранной зависимости коэффициента трения от скорости $\left(k(v) = \frac{k_0}{1+av}\right)$ при изменении в широком диапазоне таких параметров как k_0 , угловой скорости верхнего торца ω_0 , нагрузки на верхний торец N и при различных начальных условиях оставался неизменным и равнялся $4t$, где t — время прохождения упругого возмущения вдоль стержня;
- возбуждение начального условия на основе собственной функции колебаний стержня с наименьшей частотой (основная мода) не влияло на параметры автоколебания;
- начальные условия на основе собственных функций стержня (кроме основной моды) и начальные условия на основе произвольных функций могли в значительной степени изменять фазовый портрет фрикционного автоколебания;
- вязкие потери на боковой поверхности стержня могут быть использованы для гашения фрикционного автоколебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Камбалов. — М. : Машиностроение, 1977. — 528 с.
2. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Наука, 1981. — 568 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. — М. : Машиностроение, 1979. — 350 с.

4. Малахов, А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах / А. Н. Малахов. — М. : Наука, 1968. — 660 с.
5. Основы теории колебаний / Под ред. В. В. Мигулина. — М. : Наука, 1978. — 392 с.
6. Ланда, П. С. Автоколебания в распределенных системах / П. С. Ланда. — М. : Издательская группа URSS, 2015. — 320 с.
7. Ерофеев, В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, Н. П. Семерикова. — М. : Физматлит, 2002. — 208 с.
8. Ерофеев, В. И. Хаотические фрикционные автоколебания упругого слоя, контактирующего с движущимся полупространством / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2009. — № 4. — С. 3–7.
9. Сумбатов, А. С. Очерки о трении / А. С. Сумбатов, Е. К. Юнин. — М. : Вычислительный центр РАН. — 2000. — 139 с.

REFERENCES

1. Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kambalov V.S. Fundamentals of friction and wear calculations. [Kragel'skiy I.V., Doby'chin M.N., Kambalov V.S. Osnovy' raschetov na trenie i iznos]. Moscow: Mashinostroenie, 1977, 528 p.
2. Andronov A.A., Witt A.A., Haykin S.E. Theory of oscillations. [Andronov A.A., Vitt A.A., Хайкин S.E. Teoriya kolebaniy]. Moscow: Nauka, 1981, 568 p.
3. Vibrations in Engineering: Handbook. In 6 volumes. Vol. 2. Oscillations of Nonlinear Mechanical Systems. Ed. I.I. Blekhman. [Vibracii v tekhnike: Spravochnik. V 6-ti tomakh. T. 2. Kolebaniya nelinejny'x mexanicheskix system. Pod red. I.I. Blexmana]. Moscow: Mechanical Engineering, 1979, 350 p.
4. Malakhov A.N. Fluctuations in self-oscillating systems. [Malaxov A.N. Fluktuacii v avtokolebatel'ny'x sistemax]. Moscow: Nauka, 1968, 660 p.
5. Fundamentals of the Theory of Oscillations. Ed. by V.V. Migulin. [Osnovy teorii kolebaniy. Pod red. V.V. Migulina]. Moscow: Nauka, 1978, 392 p.
6. Landa P.S. Self-oscillations in distributed systems. [Landa P.S. Avtokolebaniya v raspredelenny'x sistemax]. Moscow: Izdatel'skaya gruppa URSS, 2015, 320 p.
7. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity. [Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Volny' v sterzhnyax. Dispersiya. Dissipaciya. Nelinejnost']. Moscow: Fizmatlit, 2002, 208 p.
8. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Chaotic frictional self-oscillations of an elastic layer in contact with a moving half-space. [Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Хаотические фрикционные автоколебания упругого слоя, контактирующего с движущимся полупространством]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2009, no. 4, pp. 3–7.
9. Sumbatov A.S., Yunin E.K. Essays on friction. [Sumbatov A.S., Yunin E.K. Ocherki o trenii]. Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences, 2000, 139 p.

*Белошапка Валерий Яковлевич, доцент,
кандидат физ.-мат. наук. Азовский госу-
дарственный педагогический университет,
Бердянск, Россия
E-mail: bel_val1955@mail.ru*

*Beloshapka Valerij Yakovlevich, associate
professor, candidate of physical and
mathematical sciences, Azov State Pedagogical
University, Berdyansk, Russia
E-mail: bel_val1955@mail.ru*

Плачков Илья Александрович, инженер лаборатории, Азовский государственный педагогический университет, Бердянск, Россия

E-mail: i.plachkov@bk.ru

Plachkov Ilya Aleksandrovich, laboratory engineer, Azov State Pedagogical University, Berdyansk, Russia

E-mail: i.plachkov@bk.ru