

ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С «РАСЩЕПЛЕННЫМИ» МЕРАМИ

И. А. Х. Ал-Гарайхоли

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.07.2023 г.

Аннотация. В работе доказаны теоремы сравнения для однородного дифференциального уравнения второго порядка с «расщепленными» мерами. Показана возможность факторизации уравнения с разрывными решениями. При этом мы используем поточечный подход к трактовке уравнения, предложенный Ю. В. Покорным.

Ключевые слова: интеграл Стильтьеса, мера, разрывное решение, краевая задача, «расщепленная» мера, теорема сравнения, факторизация.

ON ANALOGUES OF COMPARISON THEOREMS FOR EQUATIONS WITH «SPLIT» MEASURES

E. A. H. Al-Garayholi

Abstract. In this paper, comparison theorems for a homogeneous differential equation of the second order with "split" measures are proved. The possibility of factorization of an equation with discontinuous solutions is shown. In this case, we use the pointwise approach to the interpretation of the equation proposed by Yu. V. Pokornyy.

Keywords: Stieltjes integral, measure, discontinuous solution, boundary value problem, «split» measure, comparison theorem, factorization.

Работа является продолжением исследований, начатых в работах [1], [2].

При этом исследование осуществляется не с помощью теории обобщенных функций, а позиции поточечного подхода, предложенным Ю. В. Покорным в 1999 году [3], и показавшим свою эффективность при построении качественной теории краевых задач второго и четвертого порядков [4]–[10].

Для удобства читателя приведем определения и понятия, изложенные в работе [2].

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция, определенная в каждой точке отрезка $[0; \ell]$. При этом мы предполагаем, что множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ непусто, т. е. $S(\mu) \neq \emptyset$, и $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ хотя бы для одной точки ξ , принадлежащей множеству $S(\mu)$. Здесь и далее, через $\Delta^-\mu(\xi)$ и $\Delta^+\mu(\xi)$ обозначены левый и правый скачки функции $\mu(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta^-\mu(\xi) = \mu(\xi) - \mu(\xi - 0)$ и $\Delta^+\mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi)$. Таким образом, мера точка $\xi \in S(\mu)$, в которой $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ «расщеплена» на два значения.

Нам удобней считать, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов (см., напр., [7]). Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны. Поэтому, производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в

точке ξ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$ в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Обозначать мы будем через τ_1^ξ и τ_2^ξ , причем

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_1^\xi) = \frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)} = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}, \quad (1)$$

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_2^\xi) = \frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}. \quad (2)$$

Пусть на множестве $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$ определена функция $\sigma(x)$, которая порождает на нем меру. При дифференцировании функции $v(x) = u'_{[\mu]_2}(x)$ по мере σ необходимо «помнить» уже три значения в точке $\xi \in S(\mu)$. Поэтому производная $v'_{[\sigma]_3}(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]_\sigma}^{(3)}$ в котором каждая точка разрыва заменена на тройку (помимо предельных $\xi - 0$ и $\xi + 0$) собственных значений $\hat{\tau}_1^\xi$, $\hat{\tau}_2^\xi$ и $\hat{\tau}_3^\xi$. При этом $[\sigma]_3$ -производная функции $v(x)$ в точках $\hat{\tau}_j^\xi$ ($j = 1, 2, 3$) определяется следующим образом

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) = \frac{v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)}, \quad (3)$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_2^\xi) = \frac{v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)}, \quad (4)$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_3^\xi) = \frac{v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)}. \quad (5)$$

Естественно считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$ для всех точек разрыва функции $\mu(x)$.

1. ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ

Здесь устанавливаются аналогии теорем о перемежаемости нулевых мест решений однородных уравнений. Рассмотрим вначале одно однородное уравнение

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = 0, \quad (6)$$

Точку s , принадлежащую множеству $\overline{[0; \ell]_\mu}$, мы назовем нулевой точкой решения $u(x)$ однородного уравнения, если $u(s) = 0$.

Точку τ_1^ξ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (6), если $\varphi(\xi - 0) \cdot \varphi(\xi) < 0$; точку τ_2^ξ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (6), если $\varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi + 0) < 0$.

Нулевые точки и нулевые места мы будем называть нуля решения.

Определение 1. Будем говорить, что нулевая точка ξ_1 функции $u_1(x)$ лежит левее нулевой точки ξ_2 функции $u_2(x)$, если либо $\xi_1 < \xi_2$ в обычном смысле, либо $\xi_1 = \xi_2 = \xi \in S(\mu)$ и

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi - 0) & u_1(\xi) \\ u_2(\xi - 0) & u_2(\xi) \end{vmatrix}}{(u_1(\xi) - u_1(\xi - 0)) \cdot (u_2(\xi) - u_2(\xi - 0))} > 0, \quad (7)$$

если точка τ_1^ξ является нулевой, или

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_1(\xi + 0) \\ u_2(\xi) & u_2(\xi + 0) \end{vmatrix}}{(u_1(\xi + 0) - u_1(\xi)) \cdot (u_2(\xi + 0) - u_2(\xi))} > 0, \quad (8)$$

если нулевой является точка τ_2^ξ .

Неравенство (7) имеет простую геометрическую интерпретацию: если точку ξ «растянуть» в отрезок $[\alpha, \beta]$, т. е. сделать замену переменной $\eta(\cdot)$ так, чтобы $\eta(\xi - 0) = \alpha$, $\eta(\xi) = \beta$ и доопределить на $[\alpha, \beta]$ функции $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ линейными, то нуль доопределенной функции $u_1^*(\eta)$ будет лежать на $[\alpha, \beta]$ левее (уже в обычном смысле) нуля функции $u_2^*(\eta)$. Аналогично в случае $\xi, \xi + 0$.

Очевидно, любое нетривиальное решение уравнения может иметь лишь конечное число нулей.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения (6). И пусть $\xi_1 < \xi_2$ — соседние нулевые точки решения $\varphi_1(x)$. Тогда между ними, т. е. правее ξ_1 и левее ξ_2 в смысле определения 1, найдется нулевая точка функции $\varphi_2(x)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\varphi_1(\xi_1 - 0) < 0$, $\varphi_1(\xi_1) > 0$, $\varphi_1(\xi_2) > 0$, $\varphi_1(\xi_2 + 0) < 0$. Предположим, что для всех $x \in [\xi_1 - 0, \xi_2 + 0]$ справедливо неравенство $\varphi_2(x) > 0$. Так как функция $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ является μ -непрерывной на компакте $[\xi_1 - 0, \xi_2 + 0]$, то найдется $\xi \in [\xi_1 - 0, \xi_2 + 0]$ такая, что $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \leq \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}$ для всех $x \in [\xi_1 - 0, \xi_2 + 0]$. Обозначив $\lambda = \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}$, введем функцию $h(x) = \lambda\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$. Заметим, что $h(x) \geq 0$ в некоторой окрестности точки ξ , и $h(\xi) = 0$. Пусть $\xi \notin S(\mu)$. Если в точке ξ функции $p(x)$, $Q(x)$ непрерывны, то в точке ξ существует производная $h'_{[\mu]_2}(\xi)$, причем $h'_{[\mu]_2}(\xi) = 0$, поскольку ξ — точка локального минимума $h(x)$. Если же в точке ξ хотя бы одна из функций $p(x)$, $Q(x)$ терпит разрыв, то

$$-p(\xi)h'_{[\mu]_2}(\xi) - p(\xi - 0)h'_{[\mu]_2}(\xi - 0) = 0. \quad (9)$$

Так как $h(x) \geq 0$ в окрестности точки ξ , и $h(\xi) = 0$, то $h'_{[\mu]_2}(\xi - 0) \leq 0$, $h'_{[\mu]_2}(\xi + 0) \geq 0$. Последнее возможно, в силу (9), лишь когда $h'_{[\mu]_2}(\xi - 0) = h'_{[\mu]_2}(\xi + 0) = 0$. Оба этих случая в силу теоремы существования и единственности ведут к равенству $h(x) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Пусть $\xi \in S(\mu)$, и например, $\xi = \xi_1 - 0$. Тогда $h'_{[\mu]_2}(\xi_1 - 0) \leq 0$. С другой стороны, так как $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения уравнения (6), то $p(\xi_1)h'_{[\mu]_2}(\xi_1) = p(\xi_1 - 0)h'_{[\mu]_2}(\xi_1 - 0)$ и $h'_{[\mu]_2}(\xi_1) \geq 0$, значит, $h'_{[\mu]_2}(\xi_1 - 0) \geq 0$, и следовательно, $h(x) \equiv 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Рассмотрим теперь два уравнения

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{dv}{d[\mu]_2} \right) + v \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} = 0. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $\frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \geq \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3}$ в естественном смысле, т. е. функция $Q_1(x) - Q_2(x)$ не убывает. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение (10) и $\xi_1 < \xi_2$ — его нулевые точки в $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Тогда любое нетривиальное решение $v(x)$ уравнения (11) меняет в (ξ_1, ξ_2) знак.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда для решения $u(x)$ однородного уравнения (10) точки $\tau_1^{x_1}$ и $\tau_2^{x_2}$ являются нулевыми местами, а решение $v(x)$ уравнения (11) — сохраняет знак на интервале $(x_1; x_2)$, и точки $\tau_i^{x_j}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) не являются нулевыми местами.

Подставим функцию $u(x)$ в уравнение (10), полученное тождество умножим на функцию $v(x)$, а в уравнение (11) подставим $v(x)$, и умножим на $u(x)$, полученные тождества вычтем почленно, получим

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) v + \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{dv}{d[\mu]_2} \right) u + uv \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} - uv \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} \equiv 0, \quad (12)$$

или

$$\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{dv}{d[\mu]_2} \right) u - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) v \equiv uv \left(\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} - \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \right). \quad (13)$$

При этом умножение в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ производится следующим образом: в точках $\hat{\tau}_1^\xi$: вторая производная, взятая в этой точке, умножается на предельное слева значение функции; в точках $\hat{\tau}_2^\xi$: вторая производная, взятая в этой точке, умножается на значение функции в точке ξ ; в точках $\hat{\tau}_3^\xi$: вторая производная, взятая в этой точке, умножается на предельное справа значение функции.

Проинтегрируем равенство (13) по $[\sigma]$ -мере по множеству $\overline{[\hat{\tau}_2^{x_1}; \hat{\tau}_2^{x_2}]}_\sigma$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p v'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_2^{x_1}) u(x_1) \cdot (\sigma(\tau_2^{x_1}) - \sigma(\tau_1^{x_1})) - \\ & - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_2^{x_1}) v(x_1) \cdot (\sigma(\tau_2^{x_1}) - \sigma(\tau_1^{x_1})) + \\ & + \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p v'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_3^{x_1}) u(x_1 + 0) \cdot (\sigma(x_1 + 0) - \sigma(\tau_2^{x_1})) - \\ & - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_3^{x_1}) v(x_1 + 0) \cdot (\sigma(x_1 + 0) - \sigma(\tau_2^{x_1})) + \\ & + \int_{x_1+0}^{x_2-0} \left(\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{dv}{d[\mu]_2} \right) u - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) v \right) d[\sigma] + \\ & + \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p v'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_1^{x_2}) u(x_2 - 0) \cdot (\sigma(\tau_1^{x_2}) - \sigma(x_2 - 0)) - \\ & - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_1^{x_2}) v(x_2 - 0) \cdot (\sigma(\tau_1^{x_2}) - \sigma(x_2 - 0)) + \\ & + \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p v'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_2^{x_2}) u(x_2) \cdot (\sigma(\tau_2^{x_2}) - \sigma(\tau_1^{x_2})) - \\ & - \frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) (\hat{\tau}_2^{x_2}) v(x_2) \cdot (\sigma(\tau_2^{x_2}) - \sigma(\tau_1^{x_2})) = \\ & = \int_{\hat{\tau}_2^{x_1}}^{\hat{\tau}_2^{x_2}} uv \left(\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} - \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \right) d[\sigma]. \quad (14) \end{aligned}$$

Проинтегрируем интеграл в левой части равенства (14) по частям, и вспоминая определение $[\sigma]$ -производной, будем иметь

$$\begin{aligned}
 & u(x_1) \left(p v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) - p v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_1}) \right) - v(x_1) \left(p u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) - p u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_1}) \right) + \\
 & \quad + u(x_1 + 0) \left(p v'_{[\mu]_2}(x_1 + 0) - p v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) \right) - \\
 & \quad - v(x_1 + 0) \left(p u'_{[\mu]_2}(x_1 + 0) - p u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) \right) + p v'_{[\mu]_2} u \Big|_{x_1+0}^{x_2-0} - p u'_{[\mu]_2} v \Big|_{x_1+0}^{x_2-0} + \\
 & \quad + u(x_2 - 0) \left(p v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) - p v'_{[\mu]_2}(x_2 - 0) \right) - \\
 & \quad - v(x_2 - 0) \left(p u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) - p u'_{[\mu]_2}(x_2 - 0) \right) + \\
 & \quad + u(x_2) \left(p v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2}) - p v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) \right) - v(x_2) \left(p u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2}) - p u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) \right) = \\
 & \quad = \int_{\hat{\tau}_2^{x_1}}^{\hat{\tau}_2^{x_2}} uv \left(\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} - \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \right) d[\sigma], \quad (15)
 \end{aligned}$$

в силу взаимной ликвидации интегралов. После приведения подобных, вспоминая определение $[\mu]_2$ -производной, равенство (15) допускает упрощение

$$\begin{aligned}
 & u(x_1) \left(p(\tau_2^{x_1}) \cdot \frac{v(x_1 + 0) - v(x_1)}{\mu(x_1 + 0) - \mu(x_1)} - p(\tau_1^{x_1}) \cdot \frac{v(x_1) - v(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} \right) - \\
 & \quad - v(x_1) \left(p(\tau_2^{x_1}) \cdot \frac{u(x_1 + 0) - u(x_1)}{\mu(x_1 + 0) - \mu(x_1)} - p(\tau_1^{x_1}) \cdot \frac{u(x_1) - u(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} \right) - \\
 & \quad - u(x_1 + 0) \cdot p(\tau_2^{x_1}) \cdot \frac{v(x_1 + 0) - v(x_1)}{\mu(x_1 + 0) - \mu(x_1)} + v(x_1 + 0) \cdot p(\tau_2^{x_1}) \cdot \frac{u(x_1 + 0) - u(x_1)}{\mu(x_1 + 0) - \mu(x_1)} + \\
 & \quad + u(x_2 - 0) \cdot p(\tau_1^{x_2}) \cdot \frac{v(x_2) - v(x_2 - 0)}{\mu(x_2) - \mu(x_2 - 0)} - v(x_2 - 0) \cdot p(\tau_1^{x_2}) \cdot \frac{u(x_2) - u(x_2 - 0)}{\mu(x_2) - \mu(x_2 - 0)} + \\
 & \quad + u(x_2) \left(p(\tau_2^{x_2}) \cdot \frac{v(x_2 + 0) - v(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} - p(\tau_1^{x_2}) \cdot \frac{v(x_2) - v(x_2 - 0)}{\mu(x_2) - \mu(x_2 - 0)} \right) - \\
 & \quad - v(x_2) \left(p(\tau_2^{x_2}) \cdot \frac{u(x_2 + 0) - u(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} - p(\tau_1^{x_2}) \cdot \frac{u(x_2) - u(x_2 - 0)}{\mu(x_2) - \mu(x_2 - 0)} \right) = \\
 & \quad = \int_{\hat{\tau}_2^{x_1}}^{\hat{\tau}_2^{x_2}} uv \left(\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} - \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \right) d[\sigma], \quad (16)
 \end{aligned}$$

или, после перегруппировки слагаемых и приведения подобных,

$$\begin{aligned}
 & p(\tau_1^{x_1}) \frac{u(x_1)v(x_1 - 0) - v(x_1)u(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} + \\
 & \quad + p(\tau_2^{x_2}) \frac{u(x_2)v(x_2 + 0) - v(x_2)u(x_2 + 0)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} = \\
 & \quad = \int_{\hat{\tau}_2^{x_1}}^{\hat{\tau}_2^{x_2}} uv \left(\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} - \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \right) d[\sigma]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Так как $u(x_i) > 0$ ($i = 1, 2$), $u(x_1 - 0) < 0$, $u(x_2 + 0) < 0$, $v(x_1 - 0) > 0$, $v(x_2 + 0) > 0$, то правая часть равенства (17) положительна, а левая, в силу условия $\frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \geq \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3}$, — неположительна, и приходим к противоречию.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Теорема 3. Пусть $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$ и $\frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \geq \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3}$ в естественном смысле, т. е. функция $Q_1(x) - Q_2(x)$ не убывает. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p_1 \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ_1}{d[\sigma]_3} = 0, \quad (18)$$

и $\xi_1 < \xi_2$ — его нулевые точки в $\overline{[0; \ell]_\mu}$. Тогда любое нетривиальное решение $v(x)$ уравнения

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p_2 \frac{dv}{d[\mu]_2} \right) + v \frac{dQ_2}{d[\sigma]_3} = 0. \quad (19)$$

меняет в (ξ_1, ξ_2) знак.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Рассмотрим случай, когда для решения $u(x)$ однородного уравнения (18) точки $\tau_1^{x_1}$ и $\tau_2^{x_2}$ являются нулевыми местами, а решение $v(x)$ уравнения (19) — сохраняет знак на интервале $(x_1; x_2)$, и точки $\tau_i^{x_j}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) не являются нулевыми местами.

На множестве $\overline{[x_1; x_2]_\mu}^{(2)}$ рассмотрим следующую функцию

$$I(x) = \begin{cases} p_1(x)u'_{[\mu]_2}(x)u(x) - p_2(x)v'_{[\mu]_2}(x)\frac{u^2(x)}{v(x)}, & x \notin S(\mu); \\ p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)u(\xi) - p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)}, & x = \tau_1^\xi \text{ при неко-} \\ & \text{тором } \xi \in S(\mu); \\ p_1(\tau_2^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)u(\xi) - p_2(\tau_2^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)}, & x = \tau_2^\xi \text{ при неко-} \\ & \text{тором } \xi \in S(\mu). \end{cases} \quad (20)$$

Найдем ее производную по мере $[\sigma]_3$, которая будет определена на множестве $\overline{[x_1; x_2]_\sigma}^{(3)}$. Для точек $x \notin S(\sigma)$ мы, очевидно, будем иметь

$$\begin{aligned} I'_{[\sigma]_3}(x) &= \left(p_1 u'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x) u(x) + \\ &+ p_1(x) u_{[\mu]_2}^2(x) \cdot \mu'_{[\sigma]_3}(x) - \left(p_2 v'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x) \frac{u^2(x)}{v(x)} - \\ &- p_2(x) v'_{[\mu]_2}(x) \frac{2u(x)u'_{[\mu]_2}(x)\mu'_{[\sigma]_3}(x)v(x) - u^2(x)v'_{[\mu]_2}(x)\mu'_{[\sigma]_3}(x)}{v^2(x)}, \end{aligned} \quad (21)$$

а так как $u(x)$ — решение уравнения (18), а $v(x)$ — (19), то (21) допускает переписку

$$\begin{aligned} I'_{[\sigma]_3}(x) &= q_1(x)u^2(x) + p_1(x)u_{[\mu]_2}^2(x) \cdot \mu'_{[\sigma]_3}(x) - q_2(x)u^2(x) + \\ &+ p_2(x) \left(\frac{u(x)v'_{[\mu]_2}(x)}{v(x)} - u'_{[\mu]_2}(x) \right)^2 \cdot \mu'_{[\sigma]_3}(x) - p_2(x)u_{[\mu]_2}^2(x) = \\ &= (q_1(x) - q_2(x))u^2(x) + (p_1(x) - p_2(x))u_{[\mu]_2}^2(x) \cdot \mu'_{[\sigma]_3}(x) + \\ &+ p_2(x) \left(\frac{u(x)v'_{[\mu]_2}(x)}{v(x)} - u'_{[\mu]_2}(x) \right)^2 \cdot \mu'_{[\sigma]_3}(x), \quad (22) \end{aligned}$$

где $q_i(x) = \frac{dQ_i}{d[\sigma]_3}$ ($i = 1, 2$).

Для точек $\hat{\tau}_1^\xi$ мы последовательно находим

$$\begin{aligned} I'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) &= \frac{1}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} \cdot \left(p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)u(\xi) - \right. \\ &- p_1(\xi - 0)u'_{[\mu]_2}(\xi - 0)u(\xi - 0) - p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} + \\ &\left. + p_2(\xi - 0)v'_{[\mu]_2}(\xi - 0)\frac{u^2(\xi - 0)}{v(\xi - 0)} \right), \quad (23) \end{aligned}$$

или, так как $u(x)$ — решение уравнения (18), а $v(x)$ — (19),

$$\begin{aligned} I'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) &= u(\xi - 0) \cdot \frac{p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - p_1(\xi - 0)u'_{[\mu]_2}(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} + \\ &+ p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) \cdot \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)} \cdot \frac{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} - \\ &- \frac{u^2(\xi - 0)}{v(\xi - 0)} \cdot \frac{p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - p_2(\xi - 0)v'_{[\mu]_2}(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} - \\ &- p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) \left[\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} - \frac{u^2(\xi - 0)}{v(\xi - 0)} \right] \cdot \frac{1}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} = \\ &= q_1(\hat{\tau}_1^\xi)u^2(\xi - 0) + p_1(\tau_1^\xi)u_{[\mu]_2}^2(\tau_1^\xi) \cdot \frac{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} - q_2(\hat{\tau}_1^\xi)u^2(\xi - 0) - \\ &- p_2(\tau_1^\xi)u_{[\mu]_2}^2(\tau_1^\xi) \cdot \frac{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} + p_2(\tau_1^\xi)u_{[\mu]_2}^2(\tau_1^\xi) \cdot \frac{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} - \\ &- p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) \left[\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} - \frac{u^2(\xi - 0)}{v(\xi - 0)} \right] \cdot \frac{1}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)}. \quad (24) \end{aligned}$$

Преобразовав последние два слагаемых в правой части (24) к виду

$$p_2(\tau_1^\xi) \cdot \frac{(u(\xi - 0)v(\xi) - u(\xi)v(\xi - 0))^2}{(\mu(\xi) - \mu(\xi - 0))(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0))v(\xi - 0)v(\xi)},$$

равенство (24) мы можем записать следующим образом

$$I'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) = u^2(\xi - 0) \left(q_1(\hat{\tau}_1^\xi) - q_2(\hat{\tau}_1^\xi) \right) +$$

$$+ u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) \cdot \frac{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)} \cdot (p_1(\tau_1^\xi) - p_2(\tau_1^\xi)) + \\ + p_2(\tau_1^\xi) \cdot \frac{(u(\xi - 0)v(\xi) - u(\xi)v(\xi - 0))^2}{(\mu(\xi) - \mu(\xi - 0))(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0))v(\xi - 0)v(\xi)}. \quad (25)$$

Для точек $\hat{\tau}_2^\xi$ последовательно находим

$$I'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_2^\xi) = \frac{1}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)} \cdot \left(p_1(\tau_2^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)u(\xi) - p_2(\tau_2^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} - \right. \\ \left. - \left(p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)u(\xi) - p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} \right) \right) = \\ = u(\xi) \cdot \frac{p_1(\tau_2^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - p_1(\tau_1^\xi)u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)} - \\ - \frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} \cdot \frac{p_2(\tau_2^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - p_2(\tau_1^\xi)v'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)} = q_1(\hat{\tau}_2^\xi)u^2(\xi) - q_2(\hat{\tau}_2^\xi)u^2(\xi), \quad (26)$$

так как $u(x)$ и $v(x)$ — решения уравнений (18) и (19) соответственно.

Аналогично мы получим

$$I'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_3^\xi) = u^2(\xi + 0) \left(q_1(\hat{\tau}_3^\xi) - q_2(\hat{\tau}_3^\xi) \right) + \\ + u'_{[\mu]_2}(\tau_3^\xi) \cdot \frac{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)} \cdot (p_1(\tau_2^\xi) - p_2(\tau_2^\xi)) + \\ + p_2(\tau_2^\xi) \cdot \frac{(u(\xi + 0)v(\xi) - u(\xi)v(\xi + 0))^2}{(\mu(\xi + 0) - \mu(\xi))(\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi))v(\xi + 0)v(\xi)}. \quad (27)$$

Интегрируя производную $I'_{[\sigma]_3}(x)$ от точки $\tau_1^{x_1}$ до $\tau_2^{x_2}$, получим

$$I(\tau_2^{x_2}) - I(\tau_1^{x_1}) = \int_{\tau_1^{x_1}}^{\tau_2^{x_2}} I'_{[\sigma]} d[\sigma], \quad (28)$$

но из равенств (22), (25), (26), (27), мы делаем вывод, что производная $I'_{[\sigma]}$ неотрицательна на этом множестве. С другой стороны, вспоминая определение $[\mu]$ -производной, —

$$p_1(\tau_2^{x_2})u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})u(x_2) - p_2(\tau_2^{x_2})v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})\frac{u^2(x_2)}{v(x_2)} - \\ - p_1(\tau_1^{x_1})u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_1})u(x_1) + p_2(\tau_1^{x_1})v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_1})\frac{u^2(x_1)}{v(x_1)} = \\ = p_1(\tau_2^{x_2}) \cdot \frac{u(x_2 + 0) - u(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} \cdot u(x_2) - p_2(\tau_2^{x_2}) \cdot \frac{v(x_2 + 0) - v(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} \cdot \frac{u^2(x_2)}{v(x_2)} - \\ - p_1(\tau_1^{x_1}) \cdot \frac{u(x_1) - u(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} \cdot u(x_1) + p_2(\tau_1^{x_1}) \cdot \frac{v(x_1) - v(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} \cdot \frac{u^2(x_1)}{v(x_1)} = \\ = - (p_1(\tau_2^{x_2}) - p_2(\tau_2^{x_2})) \frac{u^2(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} - \\ - (p_1(\tau_1^{x_1}) - p_2(\tau_1^{x_1})) \frac{u^2(x_1)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (p_1(\tau_2^{x_2}) - p_2(\tau_2^{x_2})) \frac{u(x_2 + 0)u(x_2)}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} + \\
 & + (p_1(\tau_1^{x_1}) - p_2(\tau_1^{x_1})) \frac{u(x_1)u(x_1 - 0)}{\mu(x_1) - \mu(x_1 - 0)} + \\
 & + \frac{p_2(\tau_2^{x_2})}{\mu(x_2 + 0) - \mu(x_2)} \left[u(x_2 + 0)u(x_2) - \frac{v(x_2 + 0)u^2(x_2)}{v(x_2)} \right] + \\
 & + \frac{p_2(\tau_1^{x_1})}{\mu(x_1 - 0) - \mu(x_1)} \left[u(x_1 - 0)u(x_1) - \frac{v(x_1 - 0)u^2(x_1)}{v(x_1)} \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

каждое слагаемое в правой части последнего равенства, как нетрудно видеть, отрицательно, и мы приходим к противоречию.

Рассмотрим случай, когда для решения $u(x)$ однородного уравнения (18) точки $\tau_2^{x_1}$ и $\tau_2^{x_2}$ являются нулевыми местами, а решение $v(x)$ уравнения (19) — сохраняет знак на интервале $(x_1; x_2)$, и точки $\tau_2^{x_j}$ ($j = 1, 2$) не являются нулевыми местами.

На множестве $\overline{[x_1; x_2]}_\mu^{(2)}$ рассмотрим следующую функцию

$$I_1(x) = \begin{cases} I(x), & x \neq \tau_2^{x_1}; \\ p_1(\tau_2^{x_1})u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})u(x_1 + 0) - \\ - p_2(\tau_2^{x_1})v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})\frac{u^2(x_1 + 0)}{v(x_1 + 0)}, & x = \tau_2^{x_1}. \end{cases} \quad (30)$$

Найдем ее производную по мере $[\sigma]_3$, которая будет определена на множестве $\overline{[x_1; x_2]}_\sigma^{(3)}$.

Так как функция $I_1(x)$ совпадает с $I(x)$ во всех точках множества $\overline{[x_1; x_2]}_\mu^{(2)}$, за исключением точки $\tau_2^{x_1}$, то достаточно пересчитать ее значение в точке $\hat{\tau}_3^{x_1}$:

$$\begin{aligned}
 I_{1[\sigma]_3}'(\hat{\tau}_3^{x_1}) = & \frac{1}{\sigma(x_1 + 0) - \sigma(\tau_2^{x_1})} \left(p_1(x_1 + 0)u'_{[\mu]_2}(x_1 + 0)u(x_1 + 0) - \right. \\
 & - p_2(x_1 + 0)v'_{[\mu]_2}(x_1 + 0)\frac{u^2(x_1 + 0)}{v(x_1 + 0)} - p_1(\tau_2^{x_1})u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})u(x_1 + 0) + \\
 & \left. + p_2(\tau_2^{x_1})v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})\frac{u^2(x_1 + 0)}{v(x_1 + 0)} \right). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Отсюда, после несложных преобразований, вспоминая, что $u(x)$ и $v(x)$ — решения соответствующих однородных уравнений,

$$I_{1[\sigma]_3}'(\hat{\tau}_3^{x_1}) = u^2(x_1 + 0) (q_1(\hat{\tau}_3^{x_1}) - q_2(\hat{\tau}_3^{x_1})). \quad (32)$$

Интегрируя производную $I_{1[\sigma]_3}'(x)$ от точки $\tau_2^{x_1}$ до $\tau_2^{x_2}$, получим

$$I_1(\tau_2^{x_2}) - I_1(\tau_2^{x_1}) = \int_{\tau_2^{x_1}}^{\tau_2^{x_2}} I_{1[\sigma]}' d[\sigma], \quad (33)$$

но из равенств (22), (25), (26), (27), (32) мы делаем вывод, что производная $I_{1[\sigma]}'$ неотрицательна на этом множестве.

С другой стороны, вспоминая определение $[\mu]$ -производной, —

$$p_1(\tau_2^{x_2})u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})u(x_2) - p_2(\tau_2^{x_2})v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})\frac{u^2(x_2)}{v(x_2)} -$$

$$\begin{aligned}
 & -p_1(\tau_2^{x_1})u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})u(x_1+0) + p_2(\tau_2^{x_1})v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})\frac{u^2(x_1+0)}{v(x_1+0)} = \\
 & = \left(p_1(\tau_2^{x_2}) - p_2(\tau_2^{x_2})\right)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})u(x_2) + \\
 & + p_2(\tau_2^{x_2})\left[\frac{u(x_2+0) - u(x_2)}{\mu(x_2+0) - \mu(x_2)} \cdot u(x_2) - \frac{v(x_2+0) - v(x_2)}{\mu(x_2+0) - \mu(x_2)} \cdot \frac{u^2(x_2)}{v(x_2)}\right] - \\
 & - \left(p_1(\tau_2^{x_1}) - p_2(\tau_2^{x_1})\right)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})u(x_1+0) + \\
 & + p_2(\tau_2^{x_1})\left[\frac{v(x_1+0) - v(x_1)}{\mu(x_1+0) - \mu(x_1)} \cdot \frac{u^2(x_1+0)}{v(x_1+0)} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{u(x_1+0) - u(x_1)}{\mu(x_1+0) - \mu(x_2)} \cdot u(x_1+0)\right] = \\
 & = \left(p_1(\tau_2^{x_2}) - p_2(\tau_2^{x_2})\right)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_2})u(x_2) - \\
 & - \left(p_1(\tau_2^{x_1}) - p_2(\tau_2^{x_1})\right)u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1})u(x_1+0) + \\
 & + \frac{p_2(\tau_2^{x_2})}{\mu(x_2+0) - \mu(x_2)}\left[u(x_2+0) \cdot u(x_2) - \frac{v(x_2+0)u^2(x_2)}{v(x_2)}\right] + \\
 & + \frac{p_2(\tau_2^{x_1})}{\mu(x_1+0) - \mu(x_1)}\left[u(x_1+0) \cdot u(x_1) - \frac{v(x_1+0)u^2(x_1)}{v(x_1)}\right], \quad (34)
 \end{aligned}$$

и мы снова приходим к противоречию, так как левая часть последнего равенства отрицательна ввиду справедливости неравенств: $u(x_2+0) < 0$, $u(x_2) > 0$, $u(x_1+0) < 0$, $u(x_1) > 0$, $v(x_2+0) > 0$, $v(x_2) > 0$, $v(x_1+0) > 0$ и $v(x_1) > 0$.

Рассмотрим случай, когда на интервале $(x_1; x_2)$ оба решения $u(x)$ и $v(x)$ положительны, значения их в точках x_i ($i = 1, 2$) отрицательны, и функция $v(x)$ на множестве $(x_1; x_2)$ не имеет нулевых точек. Тогда, на основании определения 1 справедливы неравенства

$$\frac{\begin{vmatrix} u(x_2-0) & u(x_2) \\ v(x_2-0) & v(x_2) \end{vmatrix}}{(u(x_2) - u(x_2-0))(v(x_2) - v(x_2-0))} > 0 \quad (35)$$

и

$$\frac{\begin{vmatrix} v(x_1) & v(x_1+0) \\ u(x_1) & u(x_1+0) \end{vmatrix}}{(u(x_1+0) - u(x_1))(v(x_1+0) - v(x_1))} > 0. \quad (36)$$

Рассмотрим на множестве $\overline{[x_1; x_2]}_\mu^{(2)}$ функцию

$$I_2(x) = \begin{cases} I_1(x), & x \neq \tau_1^{x_2}; \\ p_1(\tau_1^{x_2})u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2})u(x_2-0) - \\ - p_2(\tau_1^{x_2})v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2})\frac{u^2(x_2-0)}{v(x_2-0)}, & x = \tau_1^{x_2}. \end{cases} \quad (37)$$

Как и ранее, находим ее производную по мере $[\sigma]$, которая определена на множестве $\overline{[x_1; x_2]}_\sigma^{(3)}$.

Так как функция $I_2(x)$ совпадает с $I_1(x)$ во всех точках множества $\overline{[x_1; x_2]}_\mu^{(2)}$, за исключе-

нием точки $\tau_1^{x_2}$, то нам требуется пересчитать производную в точке $\hat{\tau}_1^{x_2}$:

$$\begin{aligned} I_{2[\sigma]_3}'(\hat{\tau}_1^{x_2}) &= \frac{1}{\sigma(\tau_1^{x_2}) - \sigma(x_2 - 0)} \left(p_1(\tau_1^{x_2}) u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) u(x_2 - 0) - \right. \\ &\quad - p_2(\tau_1^{x_2}) v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) \frac{u^2(x_2 - 0)}{v(x_2 - 0)} - p_1(x_2 - 0) u'_{[\mu]_2}(x_2 - 0) u(x_2 - 0) + \\ &\quad \left. + p_2(x_2 - 0) v'_{[\mu]_2}(x_2 - 0) \frac{u^2(x_2 - 0)}{v(x_2 - 0)} \right) = u^2(x_2 - 0) (q_1(\hat{\tau}_1^{x_2}) - q_2(\hat{\tau}_1^{x_2})), \quad (38) \end{aligned}$$

так как $u(x)$ и $v(x)$ — решения уравнений (18) и (19) соответственно.

Интегрируя производную $I_{2[\sigma]}'(x)$ от точки $\tau_2^{x_1}$ до $\tau_1^{x_2}$, получим

$$I_2(\tau_1^{x_2}) - I_2(\tau_2^{x_1}) = \int_{\tau_2^{x_1}}^{\tau_1^{x_2}} I_{2[\sigma]}' d[\sigma], \quad (39)$$

но из равенств (22), (25), (26), (27) и (38) мы делаем вывод, что производная $I_{2[\sigma]}'(x)$ неотрицательна на этом множестве.

С другой стороны, вспоминая определение $I_2(x)$ и $[\mu]$ -производной

$$\begin{aligned} I_2(\tau_1^{x_2}) - I_2(\tau_2^{x_1}) &= p_1(\tau_1^{x_2}) u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) u(x_2 - 0) - \\ &\quad - p_2(\tau_1^{x_2}) v'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) \frac{u^2(x_2 - 0)}{v(x_2 - 0)} - p_1(\tau_2^{x_1}) u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) u(x_1 + 0) - \\ &\quad - p_2(\tau_2^{x_1}) v'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) \frac{u^2(x_1 + 0)}{v(x_1 + 0)} = \\ &= (p_1(\tau_1^{x_2}) - p_2(\tau_1^{x_2})) u'_{[\mu]_2}(\tau_1^{x_2}) u(x_2 - 0) - \\ &\quad - (p_1(\tau_2^{x_1}) - p_2(\tau_2^{x_1})) u'_{[\mu]_2}(\tau_2^{x_1}) u(x_1 + 0) + \\ &\quad + \frac{p_2(\tau_1^{x_2})}{\mu(x_2) - \mu(x_2 - 0)} \cdot \frac{u(x_2 - 0)}{v(x_2 - 0)} \cdot \left| \frac{u(x_2)}{v(x_2)} \frac{u(x_2 - 0)}{v(x_2 - 0)} \right| + \\ &\quad + \frac{p_2(\tau_2^{x_1})}{\mu(x_1 - 0) - \mu(x_1)} \cdot \frac{u(x_1)}{v(x_1)} \cdot \left| \frac{u(x_1)}{v(x_1)} \frac{u(x_1 + 0)}{v(x_1 + 0)} \right|, \quad (40) \end{aligned}$$

и мы снова приходим к противоречию, так как правая часть последнего равенства отрицательна.

Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

2. АНАЛОГ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЙА–МАММАНА

Здесь доказывается аналог представления Пойа–Маммана, т. е. возможность представления дифференциального оператора в виде $\psi_2(\psi_1(\psi_0 u)'_{[\mu]_2})'_{[\sigma]_3} = F'_{[\sigma]_3}$.

Лемма 1. Пусть $\inf_{\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$. Тогда, существует положительное на $\overline{[0; \ell]_\mu}$ решение однородного уравнения

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = 0. \quad (41)$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ — решение уравнения (41), удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $pu'_{[\mu]_2}(0) = 1$. Существование и единственность такого решения доказано в работе [1]. Покажем, что оно положительно для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu \setminus \{0\}$.

Так как $p\varphi'_{1[\mu]_2}(x) - [\sigma]_3$ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$, $\sigma(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и $p\varphi'_{1[\mu]_2}(0) = 1$, то $p\varphi'_{1[\mu]_2}(x)$ положительна в некоторой окрестности $U_\delta(0)$ точки $x = 0$. Так как $p(x) > 0$, то этим свойством обладает и $[\mu]_2$ -производная $\varphi'_{1[\mu]_2}(x)$, т. е. $p\varphi'_{1[\mu]_2}(x) > 0$ для всех $x \in U_\delta(0)$. Отсюда следует, что $\varphi_1(x)$ возрастает на этой окрестности, а так как $\varphi_1(0) = 0$, то $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$.

Пусть $I \subset \overline{[0; \ell]}_\mu$ — множество точек x , удовлетворяющих следующему требованию: $\varphi_1(t) > 0$ для всех t , принадлежащих множеству $\overline{[0; \ell]}_\mu$, таких, что $0 < t < x$. Покажем, что I совпадает со всем $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Предположим, что это не так, т. е. $\beta = \sup I < \ell$. Рассмотрим случай, когда $\beta \notin S(\mu)$. Это означает, что $\varphi_1(\beta) = 0$. На множестве $I \setminus \{0\}$ функция $\varphi_1(x)$ положительна, следовательно, $p\varphi'_{1[\mu]_2}(x)$ возрастает на этом множестве. А так как $p\varphi'_{1[\mu]_2}(0) = 1$, то $p\varphi'_{1[\mu]_2}(x) > 0$ для всех $x \in I$, и, ввиду положительности $p(x)$, функция $\varphi_1(x)$ возрастает на I . Последнее вместе с условием нам дает $\varphi(\beta) > \varphi(0) = 0$. И в этом случае мы приходим к противоречию.

Пусть $\beta \in S(\mu)$. Здесь возможны подслучаи: а) $\varphi_1(\beta) \leq 0$ и б) $\varphi_1(\beta + 0) \leq 0$.

В первом случае мы получаем

$$\left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_1^\beta) - \left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\beta - 0) = \varphi_1(\beta - 0) \left[Q(\tau_1^\beta) - Q(\beta - 0)\right] > 0, \quad (42)$$

т. е.

$$\left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_1^\beta) > \left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\beta - 0) > 0, \quad (43)$$

или, вспоминая определение $[\mu]_2$ -производной в точке τ_1^β ,

$$p(\tau_1^\beta) \frac{\Delta^- \varphi_1(\beta)}{\Delta^- \mu(\beta)} > 0. \quad (44)$$

Так как $p(\tau_1^\beta) > 0$ и $\Delta^- \mu(\beta) > 0$, то

$$\Delta^- \varphi_1(\beta) > 0, \quad (45)$$

или

$$\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\beta - 0) > 0, \quad (46)$$

и мы приходим к противоречию.

Во втором случае аналогично находим

$$\left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_2^\xi) - \left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_1^\xi) = \varphi_1(\xi) \left[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi)\right] \geq 0, \quad (47)$$

т. е.

$$\left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_2^\beta) > \left(p\varphi'_{1[\mu]_2}\right)(\tau_1^\beta) > 0, \quad (48)$$

или, вспоминая определение $[\mu]_2$ -производной в точке τ_2^β ,

$$p(\tau_2^\beta) \frac{\Delta^+ \varphi_1(\beta)}{\Delta^+ \mu(\beta)} > 0. \quad (49)$$

Так как $p(\tau_2^\beta) > 0$ и $\Delta^+ \mu(\beta) > 0$, то

$$\Delta^+ \varphi_1(\beta) > 0, \quad (50)$$

или

$$\varphi_1(\beta + 0) - \varphi_1(\beta) > 0, \quad (51)$$

и мы приходим к противоречию.

Таким образом, β совпадает с ℓ , т. е. $\varphi_1(x)$ положительна на $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus \{0\}$.

Аналогично мы получим, что решение $\varphi_2(x)$ — решение однородного уравнения (41), удовлетворяющее начальным условиям $u(\ell) = 0$, $pu'_{[\mu]_2}(\ell) = -1$, положительна на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus \{\ell\}$.

Тогда, функция $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4. Пусть $\inf_{\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, $p(x)$ и $Q(x) - [\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$. Тогда, существуют положительные функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ и отрицательная функция $\psi_2(x)$ такие, что

$$\psi_2 \left(\psi_1 (\psi_0 u)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} = F'_{[\sigma]_3}. \quad (52)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — положительное решение однородного уравнения (41). Положим $\psi_0(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Имеем

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_1^\xi) = \frac{1}{\Delta^- \mu(\xi)} \cdot \left(\frac{u(\xi)}{\varphi(\xi)} - \frac{u(\xi - 0)}{\varphi(\xi - 0)} \right) = \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi - 0)} - u(\xi) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi - 0)}. \quad (53)$$

Заметим, что значение производной $\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_1^\xi)$ допускает запись

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_1^\xi) = \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)} - u(\xi - 0) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi - 0)}. \quad (54)$$

Аналогично мы получаем

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_2^\xi) = \frac{1}{\Delta^+ \mu(\xi)} \cdot \left(\frac{u(\xi + 0)}{\varphi(\xi + 0)} - \frac{u(\xi)}{\varphi(\xi)} \right) = \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi + 0)} - u(\xi) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi + 0)}. \quad (55)$$

Заметим, что значение производной $\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_2^\xi)$ допускает запись

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_2^\xi) = \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)} - u(\xi - 0) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi + 0)}. \quad (56)$$

Таким образом,

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (x) = \begin{cases} \frac{u'_{[\mu]_2}(x)\varphi(x) - u(x)\varphi'_{[\mu]_2}(x)}{\varphi^2(x)}, & x \notin S(\mu); \\ \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi - 0)} - u(\xi) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi - 0)}, & x = \tau_1^\xi; \\ \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi + 0)} - u(\xi) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi + 0)}, & x = \tau_2^\xi. \end{cases} \quad (57)$$

Отметим, что равенство (57), с учетом (54) и (56), допускает запись

$$\left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (x) = \begin{cases} \frac{u'_{[\mu]_2}(x)\varphi(x) - u(x)\varphi'_{[\mu]_2}(x)}{\varphi^2(x)}, & x \notin S(\mu); \\ \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)} - u(\xi - 0) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi - 0)}, & x = \tau_1^\xi; \\ \frac{u'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)} - u(\xi + 0) \cdot \frac{\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi)}{\varphi(\xi)\varphi(\xi + 0)}, & x = \tau_2^\xi. \end{cases} \quad (58)$$

Положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} p\varphi^2(x), & x \notin S(\mu); \\ p(\tau_1^\xi)\varphi(\xi-0)\varphi(\xi), & x = \tau_1^\xi; \\ p(\tau_2^\xi)\varphi(\xi+0)\varphi(\xi), & x = \tau_2^\xi. \end{cases}$$

Тогда

$$\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2}(x) = \begin{cases} pu'_{[\mu]_2}(x)\varphi(x) - u(x)p\varphi'_{[\mu]_2}(x), & x \notin S(\mu); \\ \varphi(\xi) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - u(\xi) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi), & x = \tau_1^\xi; \\ \varphi(\xi) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - u(\xi) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi), & x = \tau_2^\xi, \end{cases} \quad (59)$$

или, с учетом (58),

$$\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2}(x) = \begin{cases} pu'_{[\mu]_2}(x)\varphi(x) - u(x)p\varphi'_{[\mu]_2}(x), & x \notin S(\mu); \\ \varphi(\xi-0) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - u(\xi-0) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi), & x = \tau_1^\xi; \\ \varphi(\xi+0) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - u(\xi+0) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi), & x = \tau_2^\xi, \end{cases} \quad (60)$$

Найдем $[\sigma]_3$ -производную $\left(\psi_1 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x)$. В точках $x \notin S(\sigma)$, в которых производные $(pu'_{[\mu]_2})'_{[\sigma]_3}(x)$, $(p\varphi'_{[\mu]_2})'_{[\sigma]_3}(x)$ существуют, очевидно имеем

$$\begin{aligned} \left(\psi_1 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x) &= \left(pu'_{[\mu]_2}(x)\varphi(x) - u(x)p\varphi'_{[\mu]_2}(x) \right)'_{[\sigma]_3} = \\ &= \left(pu'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x)\varphi(x) - u(x) \left(p\varphi'_{[\mu]_2}(x) \right)'_{[\sigma]_3}, \end{aligned} \quad (61)$$

а так как $u(x)$ является решением неоднородного уравнения

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = F'_{[\sigma]_3}, \quad (62)$$

а $\varphi(x)$ — решение однородного уравнения (41), то

$$\begin{aligned} \left(\psi_1 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(x) &= \\ &= \left(u(x)Q'_{[\sigma]_3}(x) - F'_{[\sigma]_3}(x) \right) \varphi(x) - u(x) \cdot \varphi(x)Q'_{[\sigma]_3}(x) = \\ &= -F'_{[\sigma]_3}(x)\varphi(x). \end{aligned} \quad (63)$$

Найдем $[\sigma]_3$ -производную в точках $\xi \in S(\sigma)$. Используя равенство (60), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) &= \\ &= \frac{\psi_1(\tau_1^\xi) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - \psi_1(\xi-0) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2}(\xi-0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi-0)} = \\ &= \frac{1}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi-0)} \left(\varphi(\xi-0) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - u(\xi-0) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\varphi(\xi-0) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\xi-0) - u(\xi-0) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\xi-0) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \varphi(\xi - 0) \left(pu'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_1^\xi) - u(\xi - 0) \left(p\varphi'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_1^\xi) = -\varphi(\xi - 0) F'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_1^\xi), \quad (64)$$

так как $u(x)$ — решение неоднородного уравнения и $\varphi(x)$ — решение однородного уравнения.

Аналогично доказывается равенство

$$\left(\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_3^\xi) = -\varphi(\xi + 0) F'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_3^\xi), \quad (65)$$

Для нахождения производной $\left(\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_2^\xi)$, воспользуемся равенством (59):

$$\begin{aligned} \left(\psi_1(x) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_2^\xi) &= \\ &= \frac{\psi_1(\tau_2^\xi) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_2^\xi) - \psi_1(\tau_1^\xi) \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} (\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)} = \\ &= \frac{1}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)} \left(\varphi(\xi) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - u(\xi) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_2^\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\varphi(\xi) \cdot pu'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) - u(\xi) \cdot p\varphi'_{[\mu]_2}(\tau_1^\xi) \right) \right) = \\ &= \varphi(\xi) \left(pu'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_2^\xi) - u(\xi) \left(p\varphi'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_2^\xi) = -\varphi(\xi) F'_{[\sigma]_3} (\hat{\tau}_2^\xi), \quad (66) \end{aligned}$$

ввиду того, что $u(x)$ — решение неоднородного уравнения и $\varphi(x)$ — решение однородного уравнения.

Положим

$$\psi_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\varphi(x)}, & x \notin S(\sigma), \\ -\frac{1}{\varphi(\xi-0)}, & x = \hat{\tau}_1^\xi, \\ -\frac{1}{\varphi(\xi)}, & x = \hat{\tau}_2^\xi, \\ -\frac{1}{\varphi(\xi+0)}, & x = \hat{\tau}_3^\xi. \end{cases} \quad (67)$$

Тогда, с учетом (63), (64), (65) и (66), мы получим требуемое. Теорема доказана. $\square$

Определение 2. Функцию $\varphi_1(x)$, определенную на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, назовем T_0 -системой, если функция положительна на этом множестве.

Определение 3. Систему функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$, определенных на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, назовем T_1 -системой, если любая функция $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$, при этом $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, имеет не более одной перемены знака.

Определение 4. Систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=2}$ μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций назовём системой Маркова или M -системой, если для любого n ($n = 1, 2$) система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1} -системой.

Определение 5. Назовем однородное уравнение

$$Lu \equiv -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(pu'_{[\mu]_2} \right) + \frac{dQ}{d[\sigma]_3} u = 0 \quad (68)$$

неосциллирующим на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, если любое нетривиальное его решение имеет не более одного нулевого места.

Теорема 5. Следующие условия эквивалентны:

1) однородное уравнение

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) + \frac{dQ}{d[\sigma]_3} u = 0$$

не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\mu$;

2) справедливо представление Поля–Маммана

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p u'_{[\mu]_2} \right) + \frac{dQ}{d[\sigma]_3} u = -\frac{1}{\varphi} \left(p \varphi^2 \left(\frac{u}{\varphi} \right)'_{[\mu]_2} \right)'_{[\sigma]_3}; \quad (69)$$

3) существует фундаментальная система $\{u_i(x)\}_{i=1}^2$ решений однородного уравнения такая, что $W_1(x) = u_1(x) > 0$, $W_2(x) = W[u_1, u_2](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'_{[\mu]_2}(x) & u_2'_{[\mu]_2}(x) \end{vmatrix} > 0$;

4) в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальная система решений являющаяся M -системой на $\overline{[0; \ell]}_\mu$;

5) существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 1.

Доказательство. Докажем цепочку импликаций $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Так как однородное уравнение $Lu = 0$, по условию, не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, то решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $u(0) = 0$, $pu'_{[\mu]_2}(0) = 1$ и $u(\ell) = 0$, $pu'_{[\mu]_2}(\ell) = -1$ соответственно, положительны на $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus \{0\}$ и $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus \{\ell\}$ соответственно. Тогда их сумма $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ положительна на всем $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Теперь остается повторить рассуждения теоремы 4.

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть $\varphi(x)$ — положительное решение $Lu = 0$ о котором говорится в представлении Поля–Маммана, $\varphi_1(x)$ — произвольное решение уравнения $Lu = 0$, линейно независимое с $\varphi(x)$. Ранее доказано, что определитель Вронского этой системы постоянен. Если он положителен, то мы берем $u_1(x) = \varphi(x)$, $u_2(x) = \varphi_1(x)$, и $u_1(x) = \varphi(x)$, $u_2(x) = -\varphi_1(x)$ в противном случае.

Остальные импликации вытекают из определений. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ткаченко, А. А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стильтьеса / А. А. Ткаченко, С. А. Шабров // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 36–39.
2. Ал-Гарайхоли, И. А. Х. О приложении интегралов Стильтьеса с «расщепленными» мерами к краевым задачам / И. А. Х. Ал-Гарайхоли // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2024. — № 4. — С. 19–35.
3. Покорный, Ю. В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
4. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
5. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
7. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.
8. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.
9. Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С. А. Шабров. — Saarbrücken, 2015. — 162 с.
10. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

REFERENCES

1. Tkachenko A.A., Shabrov S.A. On the solvability of an integro-differential equation with an extended Stieltjes integral. [Tkachenko A.A., Shabrov S.A. O razreshimosti integro-differencial'nogo uravneniya s rasshirennym integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 36–39.
2. Al-Garayholi E. A. H. On the application of Stieltjes integrals with split measures to boundary value problems. [Al-Garayholi I. A. H. O prilozhenii integralov Stilt'esa s «rasshcheplennymi» merami k kraevykh zadacham]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2024, no. 4, pp. 19–35.
3. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokorniy Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennykh differencial'nykh uravneniyakh]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.
4. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokorniy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.
5. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokorniy Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma-Liuvillya dlya impul'snykh zadach]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.
6. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokorniy Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nykh zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.
7. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.
8. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokorniy Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-

Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

9. Shabrov S.A. Qualitative methods of analysis of boundary value problems of the fourth order. [Shabrov S.A. Kachestvennye metody analiza granichnyh zadach chetvertogo poryadka]. Saarbrücken, 2015, 162 p.

10. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

Ал-Гарайхоли Иван Абдулкарим Хузам,
аспирант, кафедра математического ана-
лиза, математический факультет, Воро-
нежский государственный университет,
Воронеж, Россия
E-mail: evan.abd3@gmail.com

Al-Garayholi Evan Abdulkareem Huzam,
postgraduate student, Department of
Mathematical Analysis, Faculty of
Mathematics, Voronezh State University,
Voronezh, Russia
E-mail: evan.abd3@gmail.com