

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ АЭРОЗОЛЯ В ОТКРЫТОМ АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Д. А. Тукмаков

Казанский научный центр РАН

Поступила в редакцию 20.04.2024 г.

Аннотация. В данной работе численно моделируются колебания аэрозоля в акустическом резонаторе открытого типа. Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред — для каждой из компонент смеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения для течения с осевой симметрией. Несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый теплопроводный газ. Математическая модель учитывала обмен импульсом и теплообмен между компонентами смеси. Уравнения математической модели решались явным конечно-разностным методом Мак-Кормака для получения монотонного решения применялась схема нелинейной коррекции.

Ключевые слова: численное моделирование, газовзвеси, акустический резонатор, межфазное взаимодействие.

NUMERICAL SIMULATION OF AEROSOL OSCILLATIONS IN AN OPEN ACOUSTIC RESONATOR

D. A. Tukmakov

Abstract. In this paper, the oscillations of a gas suspension in an open-type acoustic resonator are numerically investigated. The mathematical model implemented a continuous method for modeling the dynamics of inhomogeneous media - for each of the components of the mixture, a complete hydrodynamic system of equations of motion for a flow with axial symmetry was solved. The carrier medium was described as a viscous, compressible heat-conducting gas. The mathematical model took into account the exchange of momentum and heat exchange between the components of the mixture. The equations of the mathematical model were solved by the explicit finite-difference McCormack method; a nonlinear correction scheme was used to obtain a monotonic solution.

Keywords: numerical modeling, gas suspensions, acoustic resonator, interphase interaction.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из приложений математики является моделирование динамических процессов сплошных сред [1–22]. Частным случаем динамических процессов являются резонансные колебания столба газа в трубах и каналах [1]. Так как многие математические модели гидродинамики имеют нелинейный характер для интегрирования уравнений гидродинамики применяются численные методы. В некоторых случаях в качестве объекта моделирования рассматриваются течения неоднородных сред. В отличие от классической гидродинамики [2] в

гидродинамике неоднородных сред [3] течения определяются взаимодействием между компонентами смеси. В монографии [3] представлена общая теория динамики многофазных сред. В монографии [4] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред. В монографии [5] разработаны магматические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц. Исследование динамических процессов в неоднородных жидких средах имеет широкое применение в нефтегазовой промышленности [6, 7].

В публикации [8] экспериментально исследуются процессы массопереноса частиц аэрозоля в цилиндрической трубе, обнаружено влияние акустических полей на формирование областей концентрирования дисперсных частиц. В работе [9] для описания работы устройств промышленной экологии разработана математическая модель процесса коагуляции капель газокапельной среды под действием акустических полей. Недостатком математической модели было пренебрежение газовой динамикой процесса, поля скорости несущей среды определялись как фиксированные величины. В исследовании [10] моделировалось влияние акустических полей на интенсификацию сушки газодисперсных потоков. Математическая модель предполагала упрощенное описание течения газа, пренебрегая полным решением уравнений газовой динамики, также пренебрегалось описанием динамики дисперсных частиц. В работе [11] сделан обзор проблем и особенностей изучения двухфазных потоков. Указывается важность учета межфазного взаимодействия при описании течений двухфазных сред. В частности высказывается предположение о преимуществе континуальных математических моделей динамики газодисперсных сред над прочими при описании потоков с большим содержанием дисперсных частиц. В исследовании [12] в статье численно исследуется влияние динамических процессов двухфазной среды на производительность башенной испарительной градирни. Математическая модель не учитывала двухфазный состав смеси. В публикации [13] исследованы аэродинамические характеристики сухого инерционного пылеуловителя с соосными трубами. Математическая модель основана на численном решении системы уравнений Навье-Стокса однородной среды и не учитывала динамику дисперсных частиц.

Интерес к динамике дисперсных частиц в акустических полях связан с вопросами промышленной экологии, энергетики и химической промышленности. При этом часто в исследовании пренебрегается многофазным составом моделируемой среды — динамикой газа при исследовании массопереноса частиц или учетом влияния дисперсных частиц при описании потока неоднородной среды.

Применяемая в данной работе математическая модель учитывала межфазный теплообмен и межфазный обмен импульсом. В работе исследовано влияние дисперсности частиц на параметры динамики несущей среды и самих дисперсных включений при колебаниях аэрозоля в открытой трубе на частоте первого линейного резонанса для такого вида резонаторов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред позволяющую учесть межфазных обмен импульсом и энергией с дисперсной фазой [4, 14–18]. В качестве несущей среды рассматривается сжимаемый газ, движение которого описывается системой уравнений Навье-Стокса [19, 20]. В осесимметричной системе координат в двумерном случае [20] система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\rho v/y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = (\rho uv + \tau_{xy})/y + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = (-\rho v^2 + \tau_{yy})/y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left([e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ = \left(-v(e + (1 - \alpha)p - \tau_{yy}) + \tau_{xy}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) / y + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(up) + \alpha \frac{\partial}{\partial y}(vp) - \\ - Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1), \quad (4) \end{aligned}$$

$$p = (\gamma - 1)(e - 0.5\rho(u^2 + v^2)), e = \rho I + 0.5\rho(u^2 + v^2),$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y}.$$

Здесь $\rho, u, v, u_1, v_1, e, \lambda, \mu$ — плотность, составляющие скорости несущей и дисперсной среды, полная энергия, коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей среды. Величины F_x, F_y, Q задаются законами межфазного трения и теплообмена; $I = RT/(\gamma - 1)$ внутренняя энергия газа.

Движение дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности твердой фракции [4, 14–18], уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения внутренней энергии:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = -\rho_1 v_1 / y,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1) = -\rho_1 u_1 v_1 / y + F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_1^2) = -\rho v_1^2 / y + F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(e_1 v_1) = -e_1 v_1 / y + Q,$$

$$\rho_1 = \alpha \rho_{10}, e_1 = \rho_1 C_p T_1,$$

где T_1, e_1, ρ_1, α — температура дисперсной фазы, внутренняя энергия дисперсной фазы, средняя плотность и объемное содержание; C_p, ρ_{10} — теплоемкость и плотность вещества твердой фазы. Составляющие силы трения F_x и F_y задаются следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} F_x = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (u - u_1) + \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$F_y = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (v - v_1) + \alpha \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5\alpha\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

$$C_d = \frac{24}{Re_{10}} + \frac{4}{Re_{10}^{0.5}} + 0.4, \quad M_{10} = |\bar{V} - \bar{V}_1|/c, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2},$$

$$Re_{10} = \rho |\bar{V} - \bar{V}_1| 2r/\mu, \quad Pr = \gamma C_p \mu/\lambda, \quad Nu_1 = 2 \exp(-M_{10}) + 0.459 Re_{10}^{0.55} Pr^{0.33},$$

$$0 \leq M_{10} \leq 2, \quad 0 \leq Re_{10} < 2 \cdot 10^5.$$

Температура несущей среды находится из уравнения: $T = (\gamma t_1)(e/\rho t 0.5(u^2 + v^2))/R$. Внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется как $e_1 = \rho_1 C_p T_1$. В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа λ и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей [4]: $Q = 6\alpha N u_1 \lambda (T - T_1)/d^2$.

Полученные системы дифференциальных уравнений в частных производных — (1)–(8) решались явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [19] с расщеплением по пространственным направлениям [20] и схемой нелинейной коррекции [21, 22].

Сопоставление физического эксперимента с численными расчетами проведено в работе [14].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим динамику монодисперсной газозвеси при резонансных режимах колебаний несущей среды в закрытой цилиндрической трубе, продольные колебания в которой возбуждаются поршнем, перемещающимся по гармоническому закону. В численных расчетах длина трубы составляла $L = 1$ м, диаметр $d = 0.06$ м. Газозвесь в начальный момент времени представляет собой смесь воздуха с равномерно распределенными в объеме резонатора частицами твердой фазы - сферами одинакового диаметра с фиксированной плотностью вещества. В начальный момент времени газозвесь неподвижна, температуры фаз равны $T_0 = T_{10}$, заданы плотность воздуха, вещества дисперсной фазы и ее объемное содержание α . При $t = 0$ поршень начинал движение по гармоническому закону $x(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, где ω — резонансная частота колебаний газового столба в открытом акустическом резонаторе, $\omega = \pi c/2L$, $a = 1$ мм.

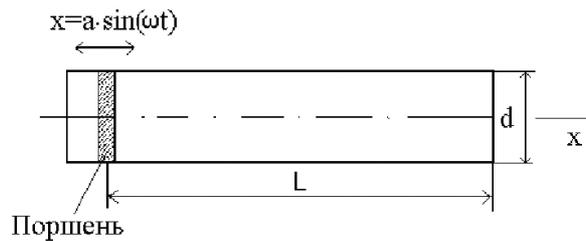


Рис. 1. Схема резонатора.

При постановке численных экспериментов задавалась плотность вещества дисперсной фазы — $\rho_{10} = 1000$ кг/м³ и начальная средняя плотность дисперсной фазы — $\alpha = 0.001$. В начальный момент времени и газ и частицы неподвижны, задана одинаковая температура газа и частиц — $T_0 = 293$ К. При расчетах на неподвижных поверхностях все составляющие скоростей фаз приравнивались нулю, для остальных газодинамических функций задавались однородные граничные условия второго рода. На оси трубы для составляющих скорости ставились условия симметрии, для плотности, давления и температуры однородные граничные условия второго рода. На поверхности поршня осевая составляющая скорости изменялась по

гармоническому закону, радиальная составляющая скорости приравнивалась нулю. На открытом конце трубы для всех функций задавались однородные граничные условия второго рода.

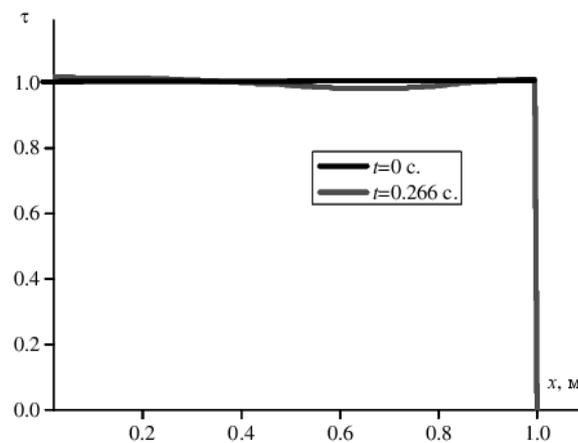


Рис. 2. Пространственное распределение средней плотности дисперсной фазы и плотности несущей среды вдоль продольной координаты x , момент времени $t = 0.266$ с.

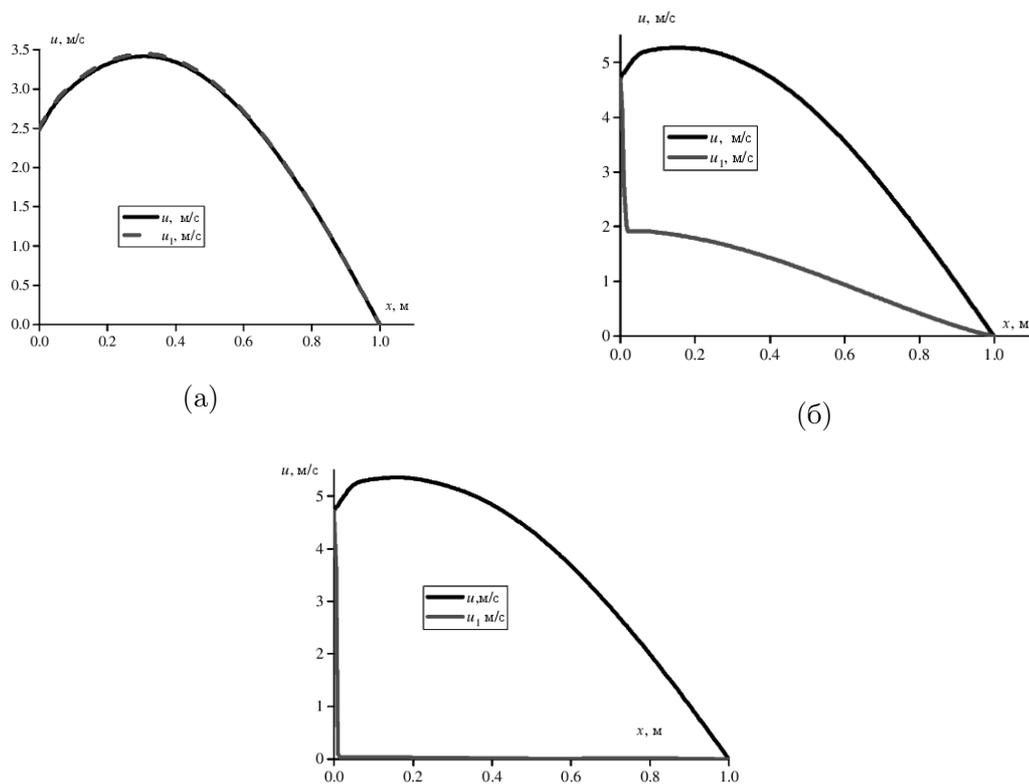


Рис. 3. Пространственное распределение продольной скорости несущей среды u и дисперсной фазы u_1 вдоль продольной координаты x для момента времени $t = 0.266$ с; рис. 3,а — частицы диаметром $d = 2$ мкм, рис. 3,б — частицы диаметром $d = 20$ мкм, рис. 3,в — частицы диаметром $d = 200$ мкм.

При моделировании динамики аэрозоля в трубе с открытым концом вблизи открытого конца трубы наблюдается наименьшая средняя плотность дисперсной фазы — рис. 2.

Численные расчеты пространственных распределений вдоль продольной оси x ($y = h/2$) — рис. 3 (а–в) и временных зависимостей в точке ($x = L/2, y = h/2$) рис. 4(а–в) демонстрируют, что при увеличении размера частиц происходит увеличения различий скорости несущей среды и дисперсной фазы — рис. 3 (а–в). Для мелкодисперсных частиц — $d = 2$ мкм распределение значения продольной скорости совпадает с аналогичным распределением несущей среды, для частиц с дисперсностью $d = 20$ мкм и $d = 200$ мкм отношения максимальных значений продольной составляющей скорости для этих дисперсностей составляют соответственно $u_{1max}/u_{max} = 7.4\%$ и $u_{1max}/u_{max} = 2.5\%$ — рис. 4(а–в). При этом колебания дисперсной фазы для средне и крупнодисперсных частиц происходят с различием примерно на четверть периода от колебаний несущей среды.

Для частиц с дисперсностью $d = 2$ мкм, $d = 20$ мкм и $d = 200$ мкм размах амплитуды изменения продольной скорости несущей среды аэрозоля ($U = |u_{max} - u_{min}|$) в течении одного периода составляет — $U = 7.47$ м/с, $U = 10.13$ м/с, $U = 10.63$ м/с соответственно.

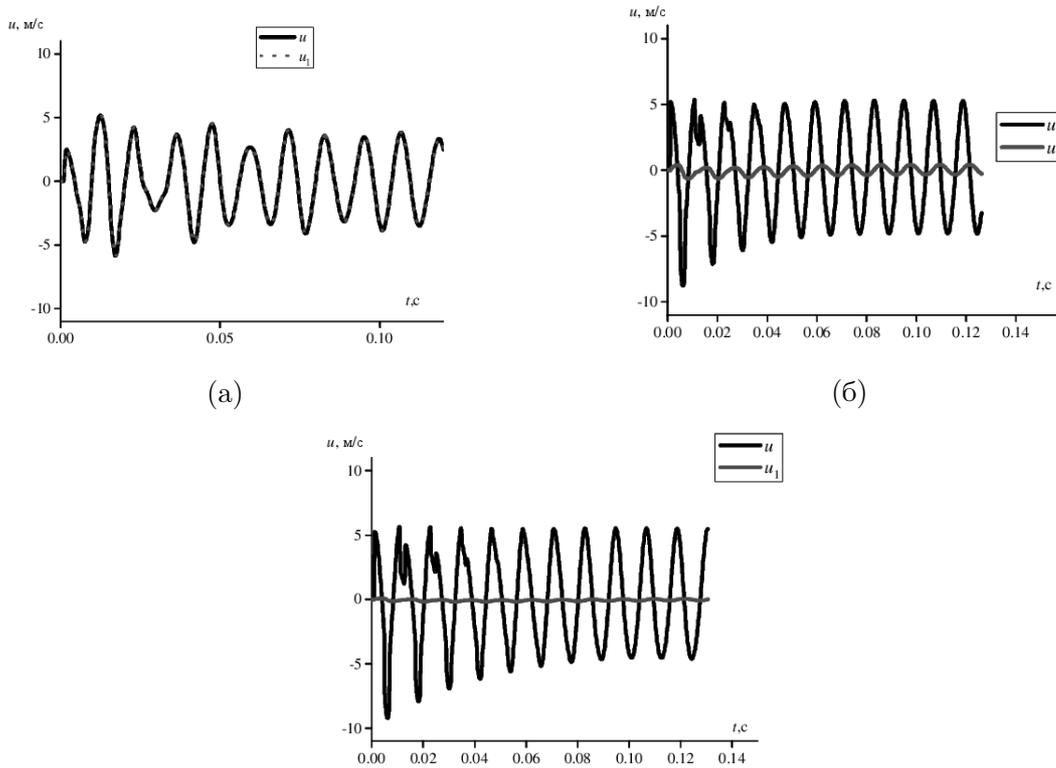


Рис. 4. Временная зависимость продольной составляющей скорости несущей среды и дисперсной фазы в точке $x = L/2, y = h/2$ для момента времени $t = 0.266$ с; рис. 4,а — частицы диаметром $d = 2$ мкм, рис. 4,б — частицы диаметром $d = 20$ мкм, рис. 4,в — частицы диаметром $d = 200$ мкм.

На рис. 5 (а–в) представлены пространственные распределения вдоль продольной оси x ($y = h/2$) температуры газа и дисперсной фазы при колебаниях с аэрозоля с различными дисперсностями. Максимальные значения разности температур несущей и дисперсной фазы составляют $|T - T_1|_{max} = 0.4$ К, $|T - T_1|_{max} = 6$ К, $|T - T_1|_{max} = 11$ К для дисперсностей $d = 2$ мкм, $d = 20$ мкм и $d = 200$ мкм соответственно. Таким образом увеличение размера частиц приводит к увеличению величины температурного скольжения фаз.

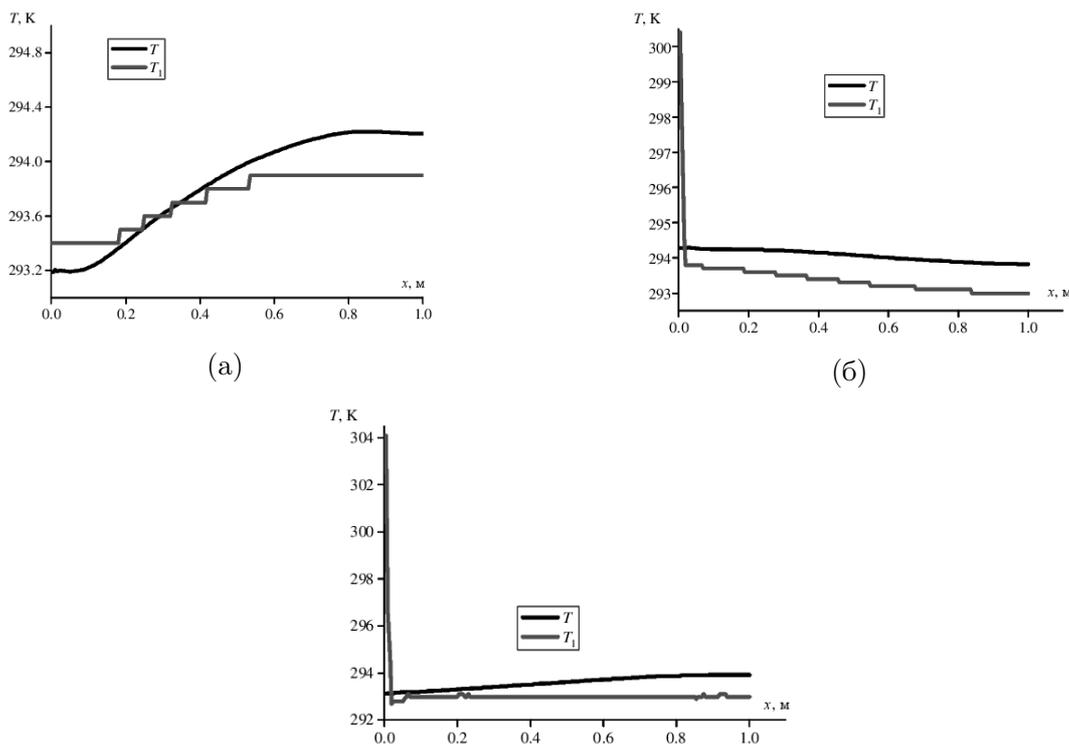


Рис. 5. Пространственное распределение температуры несущей среды и дисперсной фазы вдоль продольной координаты — x для момента времени $t = 0.266$ с; рис. 5,а — частицы диаметром $d = 2$ мкм, рис. 5,б — частицы диаметром $d = 20$ мкм, рис. 5,в — частицы диаметром $d = 200$ мкм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численно моделировалась динамика аэрозоля в акустическом резонаторе открытого типа. Применялась континуальная методика моделирования многофазной среды, учитывающая межфазное взаимодействие. Выявлено, что уменьшение размера дисперсных включений приводит к уменьшению скорости несущей среды. Закономерность можно объяснить тем, что с уменьшением размера частиц аэрозоля при фиксированном объемном содержании дисперсной фазы происходит увеличение совокупной площади дисперсной фазы, а значит увеличивается межфазное взаимодействие и энергия движения несущей среды поглощается дисперсной фазой более интенсивно. Выявлено, что увеличение размера дисперсных включений приводит к уменьшению амплитуды изменения скорости дисперсной фазы. Также при увеличении размера частиц происходит увеличение разности температур несущей и дисперсной фазы. Что может быть объяснено тем, что крупные частицы более инерционные, а за счет большей массы крупные частицы медленнее меняют свою температуру.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красильников, В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. — Москва : Наука, 1984. — 403 с.
2. Лоицянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лоицянский. — Москва : Дрофа,

2003. — 784 с.

3. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. — Москва : Наука, 1978. — 336 с.

4. Кутушев, А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А. Г. Кутушев. — Санкт-Петербург : Недра, 2003. — 284 с.

5. Федоров, А. В. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов / А. В. Федоров, В. М. Фомин, Т. А. Хмель. — Новосибирск : Параллель, 2015. — 301 с.

6. Шагапов, В. Ш. К теории процесса вымывания газа из гидрата в реакторе непрерывного действия / В. Ш. Шагапов, А. С. Чиглицева, Г. А. Кунсбаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 46–55.

7. Русинов, А. А. Математическая модель процесса всплытия одиночного пузырька газа в водной среде / А. А. Русинов, Е. В. Александров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 2. — С. 54–62.

8. Hoda, Y. Aerosol agglomeration by aerial ultrasonic sources containing a cylindrical vibrating plate with the same diameter as a circular tube / Y. oda, T. Asami, H. Miura // Japanese Journal of Applied Physics. — 2022. — V. 61. № SG.

9. Numerical simulation of condensation of natural fog aerosol under acoustic wave action / C. Liu, Y. Zhao, Z. Tian, H. Zhou // Aerosol and Air Quality Research. — 2021. — Т. 21, № 4. — С. 1–21.

10. Повышение эффективности аппарата для сушки и грануляции раствора путем применения акустических полей в системах распыливания и улавливания пыли продукта / Б. С. Сажин [и др.] // Успехи в химии и химической технологии. — 2007. — Т. 21, № 7. — С. 75–79.

11. Вараксин, А. Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков с твердыми частицами, каплями и пузырями / А. Ю. Вараксин // Теплофизика высоких температур. — 2023. — Т. 61, № 6. — С. 926–948.

12. Доброго, К. В. Моделирование башенной испарительной градирни и влияния аэродинамических элементов на ее работу в условиях ветра / К. В. Доброго, К. М. Хеммасиан, Е. Е. Ласко // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. — 2014. — № 6. — С. 47–60.

13. Численное моделирование газодинамики в центробежном классификаторе / В. Э. Зинуров [и др.] // Вестник Технологического университета. — 2021. — Т. 24, № 12. — С. 128–132.

14. Тукмаков, Д. А. Сопоставление результатов физических экспериментов по нелинейным колебаниям аэрозоля в акустических резонаторах с численными расчётами на основе математической модели гетерогенной сплошной среды / Д. А. Тукмаков, Н. А. Тукмакова // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. — 2019. — Т. 51. — С. 87–96.

15. Tukmakov, D. A. Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube by the continuum mathematical model / D. A. Tukmakov // Technical Physics. — 2022. — V. 67, № 2. — P. 764–770.

16. Тукмаков, Д. А. Численное моделирование взаимодействия газовзвеси с ударной волной континуальными математическими моделями с идеальной и диссипативными несущими средами / Д. А. Тукмаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2022. — Т. 11, № 4. — С. 67–87.

17. Тукмаков, Д. А. Численное исследование влияния внутреннего электрического поля дисперсной компоненты на распространение плоской ударной волны из двухфазной запыленной среды в чистый газ / Д. А. Тукмаков, Н. А. Тукмакова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2020. — № 4. — С. 112–123.

18. Тукмаков, Д. А. Численное моделирование взаимодействие ударной волны с газовзвесью с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы / Д. А. Тукмаков //

Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2024. — № 3. — С. 71–82.

19. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. — Москва : Мир, 1991. — 551 с.

20. Ковеня, В. М. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. — Новосибирск : Наука, 1990. — 247 с.

21. Музафаров, И. Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И. Ф. Музафаров, С. В. Утюжников // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 3. — С. 74–83.

22. Тукмаков, А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе / А. Л. Тукмаков // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2006. — № 4. — С. 33–36.

REFERENCES

1. Krasilnikov V.A., Krylov V.V. Introduction to physical acoustics. [Krasilnikov V.A., Krylov V.V. Vvedenie v fizicheskuyu akustiku]. Moscow: Nauka, 1984, 403 p.

2. Loicyanskij L.G. Mechanics of liquid and gas. [Loicyanskij L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza]. Moscow: Drofa, 2003, 784 p.

3. Nigmatulin R.I. Fundamentals of mechanics of heterogeneous media. [Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennyh sred]. Moscow: Nauka, 1978, 336 p.

4. Kutushev A.G. Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media. [Kutushev A.G. Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah]. Sankt-Peterburg: Nedra, 2003, 284 p.

5. Fedorov A.V., Fomin V.M., Hmel T.A. Volnovye processy v gazovzvesyakh chastic metallov. [Fedorov A.V., Fomin V.M., Hmel T.A. Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk: Parallel, 2015, 301 p.

6. Shagapov V.S., Chiglinceva A.S., Kunsbaeva G.A. On the theory of the process of gas leaching from hydrate in a continuous reactor. [Shagapov V.S., Chiglinceva A.S., Kunsbaeva G.A. K teorii processa vymyvaniya gaza iz gidrata v reaktore nepreryvnogo dejstviya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 46–55.

7. Rusinov A.A., Alexandrov E.V. Mathematical model of the process of ascent of a single gas bubble in an aquatic environment. [Rusinov A.A., Alexandrov E.V. Matematicheskaya model' processa vsplytiya odinochnogo puzyr'ka gaza v vodnoj srede]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 2, pp. 54–62.

8. Hoda Y., Asami T., Miura H. Aerosol agglomeration by aerial ultrasonic sources containing a cylindrical vibrating plate with the same diameter as a circular tube. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2022, vol. 61, no. SG.

9. Liu C., Zhao Y., Tian Z., Zhou H. Numerical simulation of condensation of natural fog aerosol under acoustic wave action. *Aerosol and Air Quality Research*, 2021, no. 4, pp. 1–21.

10. Sazhin B.S., Kochetov O.S., Sazhin V.B., Kostyleva A.V., Dorushenkova O.Y., Sokolova T.V. Improving the efficiency of the device for drying and granulating a solution by using acoustic fields in product spraying and dust collection systems. [Sazhin B.S., Kochetov O.S., Sazhin V.B., Kostyleva A.V., Dorushenkova O.Y., Sokolova T.V. Povyshenie effektivnosti apparata dlya sushki i granulyacii rastvora putem primeneniya akusticheskikh polej v sistemah raspylivaniya i ulavlivaniya pyli produkta]. *Uspekhi v himii i himicheskoy tekhnologii — Achievements in Chemistry and Chemical Technology*, 2007, vol. 21, no. 7, pp. 75–79.

11. Varaksin A.Y. Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows. [Varaksin A.YU. Gidrogazodinamika i teplofizika dvuhfaznyh potokov s tverdymi chasticami,

kaplyami i puzyryami]. *Teplofizika vysokih temperatur — High Temperature*, 2023, vol. 61, no. 6, pp. 926–948.

12. Dobrego K.V., Khemmasian K.M., Lasko E.E. Modeling of an evaporative cooling tower and the influence of aerodynamic elements on its operation in wind conditions. [Dobrego K.V., Khemmasian K.M., Lasko E.E. Modelirovanie bashennoj isparitel'noj gradirni i vliyaniya aerodinamicheskikh elementov na ee rabotu v usloviyah vetra]. *Energetika. Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij i energeticheskikh ob'edinenij SNG — Energy. News of higher educational institutions and energy associations of the CIS*, 2014, no. 6, pp. 47–60.

13. Zinurov, V.E., Dmitriev A.V., Sakhigareev N.F., Latypov D.N., Garipov M.G. Numerical modeling of gas dynamics in a centrifugal classifier. [Zinurov V.E., Dmitriev A.V., Sakhigareev N.F., Latypov D.N., Garipov M.G. Chislennoe modelirovanie gazodinamiki v centrobezhnom klassifikatore]. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta — Bulletin of the Technological University*, 2021, vol. 24, no. 12, pp. 128–132.

14. Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Comparison of the results of physical experiments on nonlinear oscillations of aerosol in acoustic resonators with numerical calculations based on a mathematical model of a heterogeneous continuous medium. [Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Sopostavlenie rezul'tatov fizicheskikh eksperimentov po nelinejnym kolebaniyam aerolya v akusticheskikh rezonatorah s chislennymi raschyotami na osnove matematicheskoy modeli geterogennoj sploshnoj sredy]. *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy — Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamic systems*, 2019, vol. 51, pp. 87–96.

15. Tukmakov D.A. Numerical simulation of oscillations of aerosol with a low dispersed phase concentration in a closed tube using the continuum mathematical model. *Technical Physics*, 2022, vol. 67, no. 2, pp. 764–770.

16. Tukmakov D.A. Numerical modeling of the interaction of a gas suspension with a shock wave by continuous mathematical models with ideal and dissipative carrier media. [Tukmakov D.A. Chislennoe modelirovanie vzaimodejstviya gazovzvesi s udarnoj volnoj kontinual'nymi matematicheskimi modelyami s ideal'noj i dissipativnymi nesushchimi sredami]. *Vestnik YUUrGU. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika — Bulletin of SUSU. Series: Computational Mathematics and Informatics*, 2022, vol. 11, no. 4, pp. 67–87.

17. Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Numerical study of the influence of the internal electric field of a dispersed component on the propagation of a plane shock wave from a two-phase dusty medium into a pure gas. [Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Chislennoe issledovanie vliyaniya vnutrennego elektricheskogo polya dispersnoj komponenty na rasprostranenie ploskoj udarnoj volny iz dvuhfaznoj zapylennoj sredy v chistyj gaz]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2020, no. 4, pp. 112–123.

18. Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of the internal electric field of a dispersed component on the propagation of a plane shock wave from a two-phase dusty medium into a pure gas. [Tukmakov D.A. Chislennoe modelirovanie vzaimodejstvie udarnoj volny s gazovzves'yu s periodicheskim raspredelenie koncentracii dispersnoj fazy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2024, no. 3, pp. 71–82.

19. Fletcher C.A. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. [Fletcher K. Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. T. 2]. Moscow: Mir, 1991, 551 p.

20. Kovenya V.M., Tarnavskij G.A., Chernyj S.G. Application of the splitting method in aerodynamics problems. [Kovenya V.M., Tarnavskij G.A., Chernyj S.G. Primenenie metoda rasshepleniya v zadachah aerodinamiki]. Novosibirsk: Nauka, 1990, 247 p.

21. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Application of compact difference schemes to the study

of unsteady flows of compressible gas. [Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. *Primenenie kompaktnykh raznostnykh skhem k issledovaniyu nestacionarnykh techenij szhimaemogo gaza*]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical modeling*, 1993, vol. 5, no. 3, pp: 74–83.

22. Tukmakov A.L. Numerical modeling of acoustic flows during resonant gas oscillations in a closed pipe. [Tukmakov A.L. *Chislennoe modelirovanie akusticheskikh techenij pri rezonansnykh kolebaniyah gaza v zakrytoj trube*]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika – News of higher educational institutions. Aviation technology*, 2006, no. 4, pp. 33–36.

*Тукмаков Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред Федерального научного центра “Казанский научный центр Российской академии наук”, Казань, Россия
E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru
Тел.: 8(843)236-52-89*

*Tukmakov Dmitry Alekseevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory of Continuum Mechanics, Federal Scientific Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russia
E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru
Tel.: 8(843)236-52-89*