УДК 517.954

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ И ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А. А. Петрова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2024 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с симметричным оператором и нелокальным весовым интегральным условием решается приближённо проекционно-разностным методом с использованием по времени неявного метода Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Для рассматриваемой задачи в условиях слабой разрешимости установлена среднеквадратичная сходимость проекционно-разностного метода, а также получены оценки погрешностей и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, нелокальное весовое интегральное условие, проекционно-разностный метод, неявный метод Эйлера.

ROOT-MEAN-SQUARE CONVERGENCE OF A PROJECTION-DIFFERENCE METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF PARABOLIC EQUATION WITH SYMMETRICAL OPERATOR AND WEIGHTED INTEGRAL CONDITION

A. A. Petrova

Abstract. We search for an approximate solution of an abstract linear parabolic equation in a Hilbert space with a symmetrical operator and a nonlocal weighted integral condition by the projection-difference method and the implicit Euler method in time. The approximation of the problem with respect to spatial variables is oriented to the finite element method. For the problem under consideration, in conditions of weak solvability, the root-mean-square convergence of the projection-difference method is established, and the error estimates and the orders of the rate of convergence are obtained.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, nonlocal weighted integral condition, projection-difference method, implicit Euler method.

ВВЕДЕНИЕ

При приближённом решении параболических уравнений весьма эффективны проекционно-разностные методы. В приложениях наряду с задачами Коши для параболических уравнений (см., например, [1] – [5]), большой интерес также представляют параболические задачи с нелокальными по времени, в частности, интегральными, условиями на решение. Так, например, в задаче о распространении радионуклидов в водной среде, в задаче долгосрочного прогноза температуры океана возникает необходимость задавать в качестве исходных не начальные, а средние по времени данные для неизвестных величин [6], [7].

В настоящей работе рассматриваются вопросы сходимости проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени для параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием на решение. Отметим, что так называемая слабая разрешимость для рассматриваемой задачи с несимметричным оператором была установлена в [8]. В [9] была получена обобщённая разрешимость этой задачи в случае симметричности оператора.

Сходимость проекционно-разностного метода для рассматриваемой задачи в случае, когда оператор, вообще говоря, не является симметричным, установлена в [10] и [11]. Сделанное в настоящей работе предположение о симметричности оператора позволяет усилить и дополнить результаты [10] и [11].

Отметим также, что сходимость проекционно-разностного метода для параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием в простейшем случае весовой функции тождественно раной единице исследовалась в [12].

1. ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЁННОЙ ЗАДАЧ

Пусть задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, такой что для $u, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au,v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [13, с. 58].

В пространстве V' на $[0,T]$ рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t),\quad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$, элемент $\overline{u}$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщённом смысле.

В [8] доказана теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1), функция* $f(t) \in L_1(0,T;H)\bigcap L_2(0,T;V')$. *Пусть функция* $p(t)$ *абсолютно непрерывная, невозрастающая и принимает положительные значения на* $[0,T]$. *Пусть также* $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V|\, Av \in H\}$. *Тогда задача (2) имеет единственное решение* $u(t)$, *такое что* $u \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T\Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T\|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int\limits_0^T\|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}.$$

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Отметим, что на V_h можно рассматривать нормы пространств V, H, V'. Определим пространство V'_h, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup|(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_h \in V_h$, таким что $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leqslant \|u_h\|_{V'}$ $(u_h \in V_h)$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на $V_h \subset H$. В [3] замечено, что оператор P_h допускает продолжение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V'_h$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \leqslant \|u\|_{V'} \ \ (u \in V'). \tag{3}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u,v) = (u,P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [4].

Определим проектор Ритца. Из теоремы Лакса-Мильграмма [14, с. 19] для любого элемента $u \in V$ следует существование единственного $u_h \in V_h$, такого что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h,v_h) = a(u,v_h)$. Таким образом, определён оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$ выполнено $a(R_h u, v_h) = a(u, v_h)$. Из определения оператора Ритца следует, что для любого $u \in V$ справедливо равенство

$$\overline{P}_h A R_h u = \overline{P}_h A u. \tag{4}$$

Отметим также оценку, приведённую в [15]:

$$\|(I - R_h)u\|_V \leqslant M\alpha^{-1}\|(I - Q_h)u\|_V \qquad (u \in V), \tag{5}$$

где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h.

В пространстве V_h рассмотрим приближённую задачу:

$$\frac{u^h_k - u^h_{k-1}}{\tau} + A_h u^h_k = f^h_k \ \ (k = \overline{1,N}), \qquad \sum_{k=1}^{N} p_k u^h_k \tau = \overline{u}_h. \tag{6}$$

В (6) N — натуральное число, $\tau = T/N$; $p_k = p(t_k)$, где t_k — точки разбиения отрезка $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, такого что $t_k - t_{k-1} = \tau$; $f^h_k = \tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\, dt$; $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$, а $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$.

В [10] показано, что задача (6) имеет единственное решение. Там же, в [10], получена сходимость приближённых решений задачи (2) к точному, а также оценки скорости сходимости при условии равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$.

Далее в работе всюду предполагается, что форма $a(u,v)$ является симметричной, то есть $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из симметричности формы $a(u,v)$, оценки $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2_V$ и соотношения $(A_h u_h,v_h) = a(u_h,v_h)$, где u_h, $v_h \in V_h$, следует самосопряжённость и положительная определённость оператора $A_h : V_h \to V_h$. В таком случае существует опрератор $A_h^{-1} : V_h \to V_h$. Заметим также, что существует самосопряжённый положительно определённый оператор $A_h^{1/2} : V_h \to V_h$. Приведём необходимое далее утверждение из [4].

Лемма 1. *Для любых $u_h \in V_h$ выполняются оценки:*

$$\alpha\|u_h\|^2_V \leqslant \|A_h^{\frac{1}{2}} u_h\|^2_H \leqslant M\|u_h\|^2_V, \tag{7}$$

$$\alpha\|A_h^{-\frac{1}{2}} u_h\|^2_H \leqslant \|u_h\|^2_{V'_h} \leqslant M\|A_h^{-\frac{1}{2}} u_h\|^2_H. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть форма $a(u,v)$ является симметричной. Обозначим через $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)\,(k = \overline{1,N})$, где $u(t)$ – решение задачи (2), а u_k^h – решение задачи (6). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|z_k^h\|^2_{V_h'} + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|^2_{V_h'} + \|z_k^h\|^2_H \tau\Big) \leqslant$$

$$C\Bigg\{\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|^2_H\,dt + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|^2_H\,dt +$$

$$\tau\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\cdot\int\limits_0^T\|u(t)\|^2_V\,dt\Bigg\}. \tag{9}$$

Доказательство. К уравнению в (2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство проинтегрируем от t_{k-1} до t_k, разделим на τ и вычтем его из уравнения в (6)

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} - \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt + A_h u_k^h = 0. \tag{10}$$

С учётом того что $\overline{P}_h u(t_k) = \tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_h u(t_k)\,dt$, из (10) следуют равенства

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_h z_k^h = \psi_k^h \quad (k = \overline{1,N}), \tag{11}$$

где $\psi_k^h = \tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_h A[u(t) - \overline{P}_h u(t_k)]\,dt$.

Отметим, что из (11) следует соотношение, приведённое в [10]

$$z_k^h = (I+\tau A_h)^{-k} z_0^h + \sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau \qquad (k=\overline{1,N}). \tag{12}$$

Так как z_k^h – решение уравнения (11), то справедлива оценка [12]

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|z_k^h\|^2_{V_h'} + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|^2_{V_h'} + \|z_k^h\|^2_H \tau\Big) \leqslant$$

$$C\Bigg\{\|z_0^h\|^2_{V_h'} + \int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|^2_H\,dt + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|^2_H\,dt\Bigg\}. \tag{13}$$

Покажем, что $\|z_0^h\|^2_{V_h'}$ оценивается равномерно по h.

В [10] показано, что

$$z_0^h = B_h^{-1}\Bigg[p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau -$$

$$\overline{P}_h A\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Bigg],$$

где оператор $B_h^{-1} : V_h \to V_h$ определён равенством

$$B_h^{-1} = \frac{1}{p_0}\Bigg[I + \frac{1}{p_0}\Big(I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Bigg]^{-1} \times$$

$$\Bigg[I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Bigg]^{-1} \qquad (14)$$

и является обратным к оператору

$$B_h = p_0\Big[\big(I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\big) + \frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big]. \qquad (15)$$

Также в [10] показано, что оператор B_h^{-1} является равномерно по h ограниченным, то есть

$$\|B_h^{-1}\|_{H\to H} \leqslant \frac{e^{T\alpha\beta}}{T\alpha\beta p(T)} = M_1, \qquad (16)$$

где $\beta > 0$ – константа из условия непрерывности вложения $V \subset H$, означающего, что имеет место оценка

$$\beta^{\frac{1}{2}}\|v\|_H \leqslant \|v\|_V \quad (v \in V). \qquad (17)$$

С учётом (8), (14) и (16) имеем оценку

$$\|z_0^h\|^2_{V_h'} \leqslant M\Big\|A_h^{-\frac{1}{2}}B_h^{-1}\Big[p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau -$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau - \overline{P}_hA\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big]\Big\|^2_H \leqslant$$

$$3M\alpha^{-1}M_1^2\Bigg[\Big\|p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'} +$$

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'} + \Big\|\overline{P}_hA\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big\|^2_{V_h'}\Bigg]. \qquad (18)$$

Из (12) следует, что $\xi_k^h = \sum\limits_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau$ является решением задачи

$$(\xi_k^h - \xi_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h\xi_k^h = \psi_k^h \ \ (k = \overline{1,N}), \quad \xi_0^h = 0.$$

Тогда, используя (13), получаем

$$\Big\|p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'} + \Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'} =$$

$$p_N^2\|\xi_k^h\|^2_{V_h'} + \Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\xi_k^h\Big\|^2_{V_h'} \leqslant$$

$$p_N^2 \max_{1\leqslant k\leqslant N} \|\xi_k^h\|^2_{V_h'} + \Big|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big|^2 \max_{1\leqslant k\leqslant N} \|\xi_k^h\|^2_{V_h'} \leqslant$$

$$C\bigg\{\int_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt\bigg\}. \tag{19}$$

Оценим теперь третье слагаемое в (18). Учитывая неравенство (3) и ограниченность оператора $A : V \to V'$, имеем

$$\Big\|\overline{P}_h A \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (p_k - p(t))u(t)\,dt\Big\|^2_{V_h'} \leqslant M^2 \Big\|\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (p_k - p(t))u(t)\,dt\Big\|^2_V =$$

$$M^2 \Big\|\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\int_t^{t_k} p'(s)\,ds\Big) u(t)\,dt\Big\|^2_V \leqslant M^2 \bigg(\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V\,dt\bigg)^2 \leqslant$$

$$\tau M^2 \sum_{k=1}^N \bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds\bigg)^2 \cdot \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt. \tag{20}$$

Таким образом, оценка (9) получается из оценок (13), (18), (19) и (20). □

3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Для получения сходимости приближённых решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ также предельно плотна в пространствах H и V'.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$*

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \to 0. \tag{21}$$

Доказательство. Отметим, что правая часть неравенства (9) сходится к нулю при $h \to 0$ и $\tau \to 0$: сходимость к нулю первого слагаемого следует из (17), (5) и предельной плотности $\{V_h\}$ в V, второго – из полученной в [4] оценки

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt \leqslant \tau C\bigg\{\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\bigg\}, \tag{22}$$

а сходимость к нулю третьего слагаемого, с учётом абсолютной непрерывности функции $p(t)$, очевидна. Заметим теперь, что

$$u(t_k) - u_k^h = (I-P_h)u(t_k) - z_k^h = (I-P_h)(u(t_k)-u(t)) + (I-P_h)u(t) - z_k^h. \tag{23}$$

С учётом ограниченности оператора $I - P_h$ и (22) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^N \|(I-P_h)(u(t_k)-u(t))\|_H^2 \tau \leqslant \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k)-u(t)\|_H^2\,dt \leqslant$$

$$\tau C\left\{\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_V\,dt\right\}. \tag{24}$$

Теперь сходимость к нулю (21) следует из (9), (22), (23), (24), равенства

$$\sum_{k=1}^N \|(I-P_h)u(t)\|^2_H\tau = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-P_h)u(t)\|^2_H\,dt = \int_0^T \|(I-P_h)u(t)\|^2_H\,dt, \tag{25}$$

предельной плотности $\{V_h\}$ в H и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. □

4. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Предположим, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E \leqslant d\|Av\|_H \qquad (v \in E), \tag{26}$$

где $d > 0$. Например, если оператор A порождён в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\ V = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\ E = W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\,.$$

Если же на границе Ω задано краевое условие Неймана, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\ V = W^1_2(\Omega),\ E = W^2_2(\Omega)\,.$$

Считаем далее, что подпространства $V_h \subset V$ удовлетворяют условию

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant rh\|v\|_E \quad (v \in E), \tag{27}$$

которое типично для подпространств типа конечных элементов [14, гл.3], [1, гл. 2]. В [5] показано, что из (27) при условии (26) для $v \in V$ следует оценка

$$\|(I-R_h)v\|_H \leqslant Mdrh\|(I-Q_h)v\|_V. \tag{28}$$

Покажем, как в сделанных предположениях получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному как по временной, так и по пространственной переменным.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1 и условия (26), (27). Тогда*

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|^2_H\tau \leqslant$$

$$C\left\{h^2\int_0^T \|u(t)\|^2_V\,dt + \tau\Big(\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_V\,dt\Big)\right\}. \tag{29}$$

Если же решение задачи более гладкое, а именно $u \in L_2(0,T;E)$, $u' \in L_2(0,T;H)$, *а* $p' \in L_2(0,T)$, *то справедлива следующая оценка*

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|^2_H\tau \leqslant$$

$$C\left\{h^4\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt+\tau^2\Big(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\right\}. \tag{30}$$

Доказательство. Из (23) с учётом (25) и (9) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \leqslant C\left\{\sum_{k=1}^N \|(I-P_h)[u(t_k)-u(t)]\|_H^2\tau+\right.$$

$$\int\limits_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt+$$

$$\left.\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt+\tau\sum_{k=1}^N\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\cdot\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\right\}. \tag{31}$$

Рассмотрим второе и третье слагаемые в правой части (31). Заметим, что для $v\in H$ справедливо соотношение $(I-P_h)v=(I-P_h)(I-R_h)v$. Тогда, используя оценку (28), будем иметь

$$\int\limits_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt \leqslant$$

$$2M^2d^2r^2h^2\int\limits_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V\,dt. \tag{32}$$

Оценка (29) теперь следует из (31), (22), (24), (32) и абсолютной непрерывности функции $p(t)$.

Для получения оценки (30) проведём оценку четвёртого слагаемого в правой части неравенства (31):

$$\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt=\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big\|\int\limits_t^{t_k}u'(s)\,ds\Big\|_H^2\,dt\leqslant$$

$$\tau\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H^2\,ds\,dt=\tau^2\int\limits_0^T\|u'(s)\|_H^2\,ds. \tag{33}$$

Аналогично (33), учитывая ограниченность оператора $I-P_h$, получаем оценку первого слагаемого правой части (31)

$$\sum_{k=1}^N \|(I-P_h)(u(t_k)-u(t))\|_H^2\tau\leqslant\tau^2\int\limits_0^T\|u'(s)\|_H^2\,ds. \tag{34}$$

Теперь оценка (30) получается из оценок (31), (33), (34), (32) и (27), а также неравенства

$$\sum_{k=1}^N\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\leqslant\tau\int\limits_0^T|p'(s)|^2\,ds. \tag{35}$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

2. Самарский, А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщёнными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. — М. : Высшая школа, 1987. — 296 с.

3. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

4. Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188 (3). — С. 143–160.

5. Смагин, В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 908–919.

6. Shelukhin, V. V. A nonlocal in time model for radionuclide propagation in Stokes fluid / V. V. Shelukhin // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН. — 1993. — Вып. 107. — С. 180–193.

7. Шелухин, В. В. Задача о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени / В. В. Шелухин // Доклады РАН. — 1992. — Т. 324, № 4. — С. 760–764.

8. Петрова, А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 160–169.

9. Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 160–174.

10. Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 975–987.

11. Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения гладко разрешимого параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 176. — С. 61–69.

12. Нгуен, Тыонг Хуен. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 178–191.

13. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М. : Мир, 1977. — 384 с.

14. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М. : Мир, 1980. — 512 с.

15. Васильева, Т. Е. Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью / Т. Е. Васильева, В. В. Смагин // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та Воронежского гос. у-та. — 2001. — С. 38–42.

REFERENCES

1. Marchuk G.I. Agoshkov V.I. Introduction to Projection-Grid Methods. [Marchuk G.I. Agoshkov V.I. Vvedenie v proektsionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

2. Samarskii A.A., Lazarov R.D., Makarov V.L. Finite-Difference Schemes for Differential Equations with Generalized Solutions. [Samarskii A.A., Lazarov R.D., Makarov V.L. Raznostnye skhemy dlya differentsial'nykh uravnenii s obobshchennymi resheniyami]. Moscow: Vysshaya Shkola, 1987, 296 p.

3. Vainikko G.M., Oya P.E. Convergence and the rate of convergence of the Galerkin method for abstract evolution equations. [Vajnikko G.M., Oya P.E. O skhodimosti i bystrote skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh evolyucionnykh uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

4. Smagin V.V. Estimates of the rate of convergence of projective and projective-difference methods for weakly solvable parabolic equations. [Smagin V.V. Ocenki skorosti skhodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimykh parabolicheskikh uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

5. Smagin V.V. Mean-square error estimates for a projection-difference method for parabolic equations. [Smagin V.V. Srednekvadratichnye ocenki pogreshnosti proekcionno-raznostnogo metoda dlya parabolicheskikh uravnenij]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 6, pp. 908–919.

6. Shelukhin V.V. A nonlocal in time model for radionuclide propagation in Stokes fluid. Dynamics of a continuous medium, Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1993, vol. 107, pp. 180–193.

7. Shelukhin V.V. The problem of predicting the temperature of an ocean based on mean data from the previous period. [Shelukhin V.V. Zadacha o prognoze temperatury okeana po srednim dannym za predshestvuyushchij period vremeni]. *Doklady Akademii Nauk — Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, 1992, vol. 324, no. 4, pp. 760–764.

8. Petrova A.A., Smagin V.V. Solvability of the variational problem of parabolic type with a weighted integral condition. [Petrova A.A., Smagin V.V. Razreshimost' variacionnoj zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 160–169.

9. Petrova A.A. The convergence of Galerkin's method of approximate solution of parabolic equation with symmetrical operator and weight integral condition. [Petrova A.A. Skhodimost' metoda Galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s simmetrichnym operatorom i vesovym integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 160–174.

10. Petrova A.A. Convergence of the projection-difference method of an approximate solution of a parabolic equation with a weighted integral condition on the solution. [Petrova A.A. Skhodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem na reshenie]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 975–987.

11. Petrova A.A. Convergence of the projection-difference method for the approximate solution of a smoothly solvable parabolic equation with a weighted integral condition. [Petrova A.A. Skhodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya gladko razreshimogo parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory — Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 176, pp. 61–69.

12. Nguyen Thuong Huyen Convergence of the projection-difference method for the approximate solution of parabolic equation with symmetrical operator and integral condition on solution. [Nguyen Thuong Huyen Skhodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s simmetrichnym operatorom i integral'nym usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 178–191.

13. Aubin J.-P. Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. [Aubin J.-P. Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh zadach]. Moscow: Mir, 1997, 384 p.

14. Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. [S'yarle F. Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach]. Moscow: Mir, 1980, 512 p.

15. Vasil'eva T.E., Smagin V.V. Convergence of the Projection Method for Equations with Nonsymmetric Main Part. [Vasil'eva T.E., Smagin V.V. Skhodimost' proekcionnogo metoda dlya uravnenij s nesimmetrichnoj glavnoj chast'yu]. *Coll. of works of young researchers — Math. Faculty of Voronezh State University*, 2001, pp. 38–42.

Петрова Анастасия Александровна, старший преподаватель кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Petrova Anastasiya Alexandrovna, senior teacher of the Department of functional analysis and operator equations, Mathematical faculty at Voronezh State University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rezolwenta@mail.ru