

ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. Г. Курбатов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.10.2024 г.

Аннотация. Рассматривается достижимая и наблюдаемая динамическая система. Показано, что если каждому ограниченному входу соответствует единственный ограниченный выход, то матрица системы не имеет собственных значений на мнимой оси.

Ключевые слова: задача об ограниченных решениях, динамическая система, достижимость, наблюдаемость, матричная экспонента.

THE BOUNDED SOLUTIONS PROBLEM FOR A LINEAR DYNAMICAL SYSTEM

V. G. Kurbatov

Abstract. A reachable and observable dynamical system is considered. It is shown that if each bounded input corresponds to a unique bounded output, then the system matrix has no eigenvalues on the imaginary axis.

Keywords: bounded solutions problem, dynamical system, reachability, observability, matrix exponential.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об ограниченных решениях (§ 6) для дифференциального уравнения

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

с постоянным коэффициентом A заключается в нахождении ограниченного на $\mathbb{R}$ решения x . Хорошо известно (теорема 6), что для существования единственного ограниченного решения x при любом непрерывном ограниченном свободном члене f необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы A не пересекал с мнимую ось.

В настоящей работе рассматривается более общий объект — *динамическая система*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров. Устанавливается (теорема 9), что если динамическая система достижима (§ 7) и наблюдаема (§ 8), и каждому ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y , то спектр матрицы A не пересекает мнимую ось.

1. ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Символом $\mathbb{C}^{p \times q}$ будем обозначать множество всех матриц размера $p \times q$, состоящих из комплексных чисел. Символом $\mathbf{1}$ будем обозначать единичную (квадратную) матрицу подходящего размера, а символом $\mathbf{0}$ — нулевую матрицу. По умолчанию будем считать, что векторы из $\mathbb{C}^k$ записываются в виде столбцов. Символом $\ell\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ будем обозначать линейную оболочку столбцов матриц $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Динамической системой называют [8], [11] правило, преобразующее входной сигнал u в выходной сигнал y . Будем считать, что u и y — вектор-функции, аргументом которых является непрерывное время $t \in \mathbb{R}$. Мы будем предполагать, что

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^q, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^p.$$

Будем предполагать, что зависимость y от u задается уравнениями

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров:

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times q}, \quad C \in \mathbb{C}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{C}^{p \times q}.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда u — непрерывная функция. Динамические системы вида (1.1) называют линейными стационарными и непрерывными.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Спектром матрицы A называют множество $\sigma(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых матрица $\lambda \mathbf{1} - A$ не имеет обратной. Для матриц спектр совпадает с множеством собственных значений.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — точки, образующие спектр матрицы A (вообще говоря, $m \leq n$). Кратность w_i числа λ_i как корня характеристического многочлена называют алгебраической кратностью точки спектра λ_i .

Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее $\sigma(A)$, а $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Результатом применения функции f к матрице A называют матрицу

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda. \tag{2.1}$$

Здесь Γ — положительно ориентированный контур, лежащий в множестве определения U функции f и окружающий спектр $\sigma(A)$. Хорошо известна [4], [6] следующая теорема.

Теорема 1 (о функциональном исчислении). Для любой $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ соответствие $\varphi : f \mapsto f(A)$ обладает свойствами:

- $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$,
- $\varphi(\alpha f) = \alpha \varphi(f)$,
- $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$,
- $\varphi(u) = u(A) = \mathbf{1}$, где $u(\lambda) = 1$,

- $\varphi(v) = v(A) = A$, где $v(\lambda) = \lambda$,
- $\varphi(r_{\lambda_0}) = r_{\lambda_0}(A) = (\lambda_0 \mathbf{1} - A)^{-1}$, где $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, а $\lambda_0 \notin \sigma(A)$.

3. ЭКСПОНЕНТА С МАТРИЧНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Зафиксируем матрицу $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Согласно определению (2.1) положим

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Функцию $t \rightarrow e^{At}$ называют *матричной экспонентой* с показателем A [1], [7]. Для матричной экспоненты имеет место представление

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

а также тождества

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}, \quad e^{A0} = \mathbf{1}, \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 2 ([1, с. 264]). *Решение начальной задачи*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ — непрерывная функция, представимо в виде

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-r)} f(r) dr, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следствие 1 ([8, с. 65]). *Уравнения (1.1) вместе с начальным условием*

$$x(t_0) = x_0$$

однозначно определяют зависимость y от u . Эта зависимость задается формулой

$$y(t) = C \left[e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-r)} B u(r) dr \right] + D u(t). \quad (3.1)$$

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКТОРЫ

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все различные собственные значения матрицы A (вообще говоря, $m \leq n$). Обозначим через U_i открытые попарно непересекающиеся окрестности точек λ_i , а через U — их объединение. Пусть Γ_i — положительно ориентированные контуры, лежащие в U_i и окружающие λ_i , а Γ — их объединение.

На множестве U рассмотрим функции

$$p_i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \in U_i, \\ 0 & \text{при } \lambda \in U_j, j \neq i. \end{cases}$$

Очевидно, p_i являются аналитическими на U . Поэтому можно рассмотреть матрицы

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} p_i(\lambda) (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda.$$

Предложение 3 (см., например, [6, предложение 91]). Матрицы P_i обладают свойствами

$$P_i^2 = P_i, \quad P_i P_j = \mathbf{0} \text{ при } i \neq j, \quad P_1 + P_2 + \dots + P_n = \mathbf{1}.$$

Кроме того, выполняются тождества

$$P_i A = A P_i.$$

Матрицы P_i называют *спектральными проекторами*, а их образы — *спектральными подпространствами*, соответствующими точкам спектра λ_i .

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЖОРДАНА–ДАНФОРДА

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — список различных собственных значений матрицы A (вообще говоря, $m \leq n$). Обозначим через P_i , где $i = 1, \dots, m$, соответствующие спектральные проекторы. Напомним (предложение 3), что P_i коммутируют друг с другом и с A ; кроме того (это также вытекает из предложения 3),

$$A = \sum_{i=1}^m P_i A.$$

Положим

$$\begin{aligned} A_i &= P_i A = A P_i, \\ N_i &= P_i (A - \lambda_i \mathbf{1}) = A_i - \lambda_i P_i. \end{aligned}$$

Очевидно, N_i совпадает с функцией

$$n_i(\lambda) = \begin{cases} \lambda - \lambda_i & \text{при } \lambda \in U_i, \\ 0 & \text{при } \lambda \in U_j, j \neq i \end{cases}$$

от матрицы A . Таким образом,

$$N_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} (\lambda - \lambda_i)(\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda.$$

Матрицу N называют *нильпотентной*, если $N^k = \mathbf{0}$ для некоторого натурального k . Наименьшее k , обладающее этим свойством, называют *степенью nilьпотентности* матрицы N .

Теорема 4 ([2, гл. V, § 3, формула (22)], [3, с. 88], [4, с. 600], [6, теорема 97]). Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ справедливо представление

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i + N_i.$$

При этом

$$\begin{aligned} P_i^2 &= P_i, & N_i P_i &= P_i N_i = N_i, & i &= 1, \dots, m, \\ P_i P_j &= \mathbf{0}, & N_i P_j &= P_j N_i = \mathbf{0}, & i &\neq j, \end{aligned}$$

матрицы N_i являются нильпотентными, а их степени нильпотентности ν_i (т.е. минимальные числа, при которых $N_i^{\nu_i} = \mathbf{0}$) не превосходят алгебраических кратностей w_i соответствующих точек λ_i спектра. Для резольвенты матрицы A справедливо представление

$$(\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} = \sum_{i=1}^m \left[\frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(\lambda - \lambda_i)^{j+1}} \right].$$

Или сокращенно

$$(\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(\lambda - \lambda_i)^{j+1}},$$

где $N_i^0 = P_i$.

Степень нильпотентности ν_i матрицы N_i из теоремы 4 называют [9] *индексом собственного значения* λ_i .

Следствие 2 ([12], [7, следствие 3.34]). В обозначениях теоремы 4

$$e^{At} = \sum_{i=1}^m \left[e^{\lambda_i t} P_i + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j \right].$$

Или коротко

$$e^{At} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j,$$

где $N_i^0 = P_i$.

6. ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Задачей об ограниченных решениях для уравнения (6.1) называют [3] задачу об отыскании ограниченного решения $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ в предположении, что свободный член $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ является непрерывной и ограниченной функцией. Эту задачу можно интерпретировать как разновидность краевых задач — краевые условия состоят в ограниченности решения при $t \rightarrow \infty$.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, и $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, рассмотрим функции

$$\exp_{+,t}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (6.2a)$$

$$\exp_{-,t}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, \\ -e^{\lambda t} & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (6.2b)$$

$$g_t(\lambda) = \begin{cases} \exp_{-,t}(\lambda) & \text{при } \operatorname{Re} \lambda > 0, \\ \exp_{+,t}(\lambda) & \text{при } \operatorname{Re} \lambda < 0. \end{cases} \quad (6.2c)$$

Подчеркнем, что эти функции не определены при $t = 0$. Функция g_t , кроме того, не определена при $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Тем не менее, при всех $t \neq 0$ функции (6.2) являются аналитическими (по переменной λ) на своем множестве определения.

Предположим, что спектр A не пересекает мнимую ось. В этом случае положим

$$\mathcal{G}(t) = g_t(A), \quad t \neq 0. \quad (6.3)$$

Функцию $t \mapsto \mathcal{G}(t)$ называют [3] *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях для уравнения (6.1).

Обозначим через P_+ спектральный проектор, отвечающий части спектра, лежащей в левой полуплоскости, а через P_- — спектральный проектор, отвечающий части спектра, лежащей в правой полуплоскости.

Предложение 5 ([3], [10]). *Функция Грина обладает свойствами:*

1. матрицы $P_+ = \mathcal{G}(+0)$ и $P_- = -\mathcal{G}(-0)$ являются проекторами, соответствующими частям спектра, находящимся в левой и правой полуплоскостях соответственно,
2. $P_+ + P_- = \mathbf{1}$,
3. $\mathcal{G}(t_1)\mathcal{G}(t_2) = \mathcal{G}(t_1 + t_2)$ при $t_1, t_2 > 0$,
 $\mathcal{G}(t_1)\mathcal{G}(t_2) = -\mathcal{G}(t_1 + t_2)$ при $t_1, t_2 < 0$,
4. $\mathcal{G}(t_1)\mathcal{G}(t_2) = \mathbf{0}$ при $t_1 t_2 < 0$,
5. $\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) = A\mathcal{G}(t)$ при $t \neq 0$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 1 и тождеств

$$\begin{aligned} g_{+0}^2(\lambda) &= g_{+0}(\lambda), \\ g_{-0}^2(\lambda) &= -g_{-0}(\lambda), \\ g_{+0}(\lambda) - g_{-0}(\lambda) &= \mathbf{1}, \\ g_{t_1}(\lambda)g_{t_2}(\lambda) &= g_{t_1+t_2}(\lambda) \text{ при } t_1, t_2 > 0, \\ g_{t_1}(\lambda)g_{t_2}(\lambda) &= -g_{t_1+t_2}(\lambda) \text{ при } t_1, t_2 < 0, \\ g_{t_1}(\lambda)g_{t_2}(\lambda) &= \mathbf{0} \text{ при } t_1 t_2 < 0, \\ \frac{d}{dt}g_t(\lambda) &= \lambda g_t(\lambda) \text{ при } t \neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 6 ([3, с. 119, теорема 4.1]). *Уравнение (6.1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(A)$ не пересекает мнимую ось. При выполнении этого условия решение уравнения (6.1) допускает представление*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)f(t-s)ds,$$

где $\mathcal{G}$ — функция Грина (6.3).

Таким образом, решение задачи об ограниченных решениях для дифференциального уравнения (6.1) сводится к построению функции Грина.

7. ДОСТИЖИМОСТЬ

Вернемся к динамической системе (1.1). Обсудим свойство достижимости.

В определении достижимости участвует только фазовое уравнение из (1.1)

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

а матрицы C и D не используются.

Состояние $x_1 \in \mathbb{C}^n$ называют [8] *достижимым*, если существуют такой момент времени $T > 0$ и такой вход¹⁾ $u \in L_2[0, T]$, что

$$x_1 = \varphi(T, 0, 0, u),$$

где $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ — значение в точке t решения начальной задачи

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Подпространством достижимости называют подмножество $X_{\text{reach}} \subseteq \mathbb{C}^n$, состоящее из всех достижимых состояний x_1 . Нетрудно видеть, что подмножество X_{reach} действительно является линейным подпространством пространства $\mathbb{C}^n$.

Систему (7.1) называют (полностью) *достижимой*, если $X_{\text{reach}} = X$.

Замечание 1. Состояние $x_0 \in \mathbb{C}$ называют [8] *управляемым*, если существуют такой момент времени $T > 0$ и такое управление $u \in L_2[0, T]$, что

$$0 = \varphi(T, 0, x_0, u).$$

Подпространством управляемости называют подмножество $X_{\text{contr}} \subseteq \mathbb{C}^n$, состоящее из всех управляемых состояний x_0 . Систему называют (полностью) *управляемой*, если $X_{\text{contr}} = \mathbb{C}^n$. Нетрудно показать, что $X_{\text{contr}} = X_{\text{reach}}$.

Теорема 7. *Подпространство достижимости совпадает с линейной оболочкой столбцов матриц $N_i^j B$:*

$$\ell\{N_i^j B : i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, \nu_i - 1\}.$$

Доказательство. В силу следствия 2

$$e^{At} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j.$$

Отсюда для решения x задачи (7.1) с $x_0 = 0$ имеем

$$x(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} N_i^j B \int_0^T \frac{(T-r)^j e^{\lambda_i(T-r)}}{j!} u(r) dr.$$

Или

$$x(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} N_i^j B \int_0^T \frac{r^j e^{\lambda_i r}}{j!} u(T-r) dr.$$

Из этой формулы видно, что

$$X_{\text{reach}} \subseteq \ell\{N_i^j B : i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, \nu_i - 1\}.$$

Докажем обратное вложение. Покажем, к примеру, что столбец $N_{i_0}^{j_0} B_1$, где B_1 — первый столбец матрицы B , принадлежит X_{reach} . Рассмотрим семейство функций $h_{ij}(r) = \frac{r^j e^{\lambda_i r}}{j!}$, $i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, \nu_i - 1$. Хорошо известно [1, теорема 13.2], что они линейно независимы в пространстве $C[0, T]$. Следовательно, они линейно независимы и в пространстве $L_2[0, T]$.

¹⁾ В доказательстве теоремы 7 мы увидим, что вход можно выбрать непрерывным. Кроме того, если состояние достижимо для какого-то $T > 0$, то оно достижимо и для всех $T > 0$.

Рассмотрим подпространство E , натянутое на эти функции, со скалярным произведением, индуцированным вложением в $L_2[0, T]$. Построим базис $\hat{h}_{ij}$ в E , биортогональный [5, теорема 12.2], [7, предложение 4.14] к h_{ij} . Возьмем в качестве $u_{i_0 j_0}$ функцию $t \mapsto \hat{h}_{i_0 j_0}(T - t)$, где $\hat{h}_{i_0 j_0}$ из биортогонального базиса. В силу выбора функции $u_{i_0 j_0}$ имеем

$$\begin{aligned} x(T) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} N_i^j B_1 \int_0^T \frac{r^j e^{\lambda_i r}}{j!} u_{i_0 j_0}(T - r) dr = \\ &= N_{i_0}^{j_0} B_1 \int_0^T \frac{r^{j_0} e^{\lambda_{i_0} r}}{j_0!} u_{i_0 j_0}(T - r) dr, \end{aligned}$$

□

8. НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Задача наблюдения для системы (1.1) состоит в восстановлении начального состояния x_0 при известном управлении u по значениям выхода y . Поскольку u известно, при исследовании задачи наблюдения можно игнорировать слагаемые в формуле (3.1), содержащие B и D . Таким образом, исследование задачи наблюдения сводится к рассмотрению задачи

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Отметим, что согласно формуле (3.1) решение y задачи (8.1) имеет вид

$$y(t) = Ce^{At}x_0. \tag{8.2}$$

(Начальное) состояние $x_0 \in \mathbb{C}^n$ называют *ненаблюдаемым*, если $y(t) = 0$ при $t > 0$. *Подпространством ненаблюдаемости* называют [8] множество всех ненаблюдаемых состояний. Его обозначают символом X_{unobs} . Нетрудно видеть, что подмножество $X_{\text{unobs}} \subseteq \mathbb{C}^n$ действительно является подпространством.

Систему называют (*полностью*) *наблюдаемой*, если $X_{\text{unobs}} = \{0\}$.

Теорема 8 ([8, теорема 4.26]). *Система (1.1) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда ни один правый собственный вектор матрицы A не содержится в ядре матрицы C , т.е.*

$$\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad Cv \neq 0.$$

9. ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ДОСТИЖИМОЙ И НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМЫ

В настоящем параграфе доказывается основной результат настоящей работы.

Теорема 9. *Пусть система (1.1) полностью достижима и полностью наблюдаема. Пусть каждому непрерывному ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y . Тогда у матрицы A нет точек спектра на мнимой оси.*

Доказательство. Предположим противное: пусть некоторое чисто мнимое число $i\omega_*$, где $\omega_* \in \mathbb{R}$, принадлежит спектру A . Покажем, что в этом случае некоторому ограниченному входу u не может соответствовать ограниченный выход y . Это будет означать противоречие.

Собственное значение $i\omega_*$ будем также (в зависимости от ситуации) обозначать λ_* или λ_1 и считать первым в списке собственных значений. Соответственно будем использовать обозначения P_* , N_* и ν_* или P_1 , N_1 и ν_1 , см. § 5.

Рассмотрим систему (1.1) с $u(t) = u_0 e^{i\omega_1 t}$ с некоторым $u_0 \in \mathbb{C}^q$:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu_0 e^{i\omega_1 t}, \quad (9.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du_0 e^{i\omega_1 t}. \quad (9.1b)$$

Вектор $u_0 \in \mathbb{C}^q$ выберем таким образом, чтобы $P_1 Bu_0 \neq 0$; здесь P_1 — спектральный проектор, соответствующий $\lambda_1 = i\omega_1$ (см. § 5). Если бы такого u_0 не было, т. е. $P_1 Bu_0 = 0$ при всех $u_0 \in \mathbb{C}^q$ или, иными словами, $P_1 B = 0$, то в силу теоремы 7 система не была бы полностью достижима.

Общее решение однородного уравнения $x'(t) = Ax(t)$ имеет вид (см. следствие 2)

$$x_{\text{оо}}(t) = e^{At} x_0 = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j \right) x_0. \quad (9.2)$$

А частным решением неоднородного уравнения (9.1a), как легко проверяется, является функция

$$x_{\text{чн}}(t) = \left[\left(tP_1 + \sum_{j=1}^{\nu_1-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} N_1^j \right) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{P_i}{i\omega_1 - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(i\omega_1 - \lambda_i)^{j+1}} \right) \right] Bu_0 e^{i\omega_1 t}. \quad (9.3)$$

Здесь первое слагаемое растет при $t \rightarrow +\infty$ как $\frac{t^{\nu_1}}{\nu_1!} N_1^{\nu_1-1} Bu_0$, а второе слагаемое ограничено. В силу следствия 1 общее решение задачи (9.1) представимо в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= C(x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t)) + DBu_0 e^{i\omega_1 t} = \\ &= C \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j \right) x_0 + \end{aligned} \quad (9.4a)$$

$$+ C \left(tP_1 + \sum_{j=1}^{\nu_1-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} N_1^j \right) Bu_0 e^{i\omega_1 t} + \quad (9.4b)$$

$$+ C \sum_{i=2}^m \left(\frac{P_i}{i\omega_1 - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(i\omega_1 - \lambda_i)^{j+1}} \right) Bu_0 e^{i\omega_1 t} + DBu_0 e^{i\omega_1 t}, \quad (9.4c)$$

где x_0 — произвольный вектор.

Напомним, что по условию теоремы задача (9.1) имеет ровно одно ограниченное решение. Будем считать, что x_0 выбрано так, что (9.4) — это самое ограниченное решение. Покажем, что в этом случае многие слагаемые в формуле (9.4) имеют нулевые коэффициенты.

Среди собственных значений со строго положительной действительной частью выберем те, у которых действительная часть максимальна; обозначим эти собственные значения через λ_{i_1} , λ_{i_2} , ..., λ_{i_r} , а их действительную часть через α . Обозначим через ν наибольшую из степеней нильпотентности ν_{i_1} , ν_{i_2} , ..., ν_{i_r} , соответствующих этим собственным значениям (значение ν может реализовываться для нескольких из собственных значений λ_{i_1} , λ_{i_2} , ..., λ_{i_r}). Покажем, что все коэффициенты $CN_{i_k}^{\nu-1} x_0$ в (9.4a) равны нулю. Предположим противное: для какого-то i_k коэффициент $CN_{i_k}^{\nu-1} x_0$ из (9.4a) отличен от нуля.

Посмотрим на поведение при $t \rightarrow +\infty$ функции (нижний предел интегрирования взят равным 1, а не 0, чтобы избежать расходимости интеграла в нуле)

$$w(t) = \int_1^t \frac{z(s)}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \int_1^t \frac{Cx_{\text{оо}}(s) + Cx_{\text{чн}}(s) + DBu_0 e^{i\omega_1 s}}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds, \quad (9.5)$$

где z — выбранное решение (9.4) задачи (9.1). Заметим, что здесь под интегралом стоит частное ограниченной функции z и экспоненциально растущей на $+\infty$ функции $s \mapsto s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}$. Таким образом, функция w ограничена при $t \rightarrow +\infty$.

Поскольку действительная часть ν собственного значения λ_{i_k} строго положительна, часть

$$\int_1^t \frac{C \left\{ \left[\left(sP_1 + \sum_{j=1}^{\nu_1-1} \frac{s^{j+1}}{(j+1)!} N_1^j \right) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{P_i}{i\omega - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(i\omega - \lambda_i)^{j+1}} \right) \right] + D \right\} B u_0 e^{i\omega_1 t}}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds$$

интеграла (9.5), пришедшая из (9.4b) и (9.4c), заведомо стремится к нулю.

Рассмотрим слагаемые функции (9.5), пришедшие из (9.4a). Если $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$ или λ_i есть одно из чисел $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_r}$, но $j < \nu - 1$, то слагаемое

$$\int_1^t \frac{C \frac{s^j e^{\lambda_i s}}{j!} N_i^j x_0}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds = 0$$

растает на $+\infty$ не быстрее, чем $\ln t$. Нерассмотренными остаются слагаемые, соответствующие случаю, когда λ_i есть одно из чисел $\lambda_{i_1} = \alpha + i\omega_{i_1}, \lambda_{i_2} = \alpha + i\omega_{i_2}, \dots, \lambda_{i_r} = \alpha + i\omega_{i_r}$ и $j = \nu - 1$:

$$\int_1^t \frac{C \left(\sum_{\gamma=1}^r \frac{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_\gamma} s}}{(\nu-1)!} N_{i_\gamma}^{(\nu-1)} \right) x_0}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \int_1^t C \left(\sum_{\gamma=1}^r \frac{e^{i(\omega_{i_\gamma} - \omega_{i_k})s}}{(\nu-1)!} N_{i_\gamma}^{(\nu-1)} \right) x_0 ds$$

(здесь использовано то, что $\operatorname{Re} \lambda_{i_\gamma} = \operatorname{Re} \lambda_{i_k} = \alpha$). При этом слагаемое (соответствующее выбранному i_k)

$$\int_1^t C \frac{e^{(\omega_{i_k} - \omega_{i_k})s}}{(\nu-1)!} N_{i_k}^{(\nu-1)} x_0 ds = \int_1^t C \frac{1}{(\nu-1)!} N_{i_k}^{\nu-1} x_0 ds$$

растет как t на $+\infty$ (напомним, что по предположению $C N_{i_k}^{\nu-1} x_0 \neq 0$), что превышает скорость роста остальных слагаемых. Отсюда следует, что функция

$$w(t) = \int_1^t \frac{z(s)}{s^{\nu-1} e^{\lambda_{i_k} s}} ds,$$

определенная формулой (9.5), растет как t на $+\infty$, что противоречит ее ограниченности. Значит, предположение противного неверно, т. е. коэффициент $C N_{i_k}^{\nu-1} x_0$ равен нулю.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, устанавливаем, что для всех слагаемых, отвечающих $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_r}$ с максимальной действительной частью α , сначала равны нулю все слагаемые, содержащие $t^{\nu-1}$, а затем — слагаемые со всеми меньшими степенями t . После этого точно так же устанавливаем, что коэффициенты у всех слагаемых с положительной действительной частью λ_i равны нулю.

Аналогично доказывается, что слагаемые со строго отрицательной действительной частью λ_i равны нулю; но теперь переходить к пределу надо при $t \rightarrow -\infty$. В результате оказывается, что в (9.4a) ненулевыми могут быть только слагаемые, в которых $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$. Следовательно, выбранное ограниченное решение (9.4) сводится к

$$z(t) = C \left(\sum_{\operatorname{Re} \lambda_i = 0} \sum_{j=0}^{\nu_i-1} \frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!} N_i^j \right) x_0 + \quad (9.6a)$$

$$+ C \left(tP_* + \sum_{j=1}^{\nu_*-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} N_*^j \right) B u_0 e^{i\omega_* t} + \quad (9.6b)$$

$$+ C \sum_{i=2}^m \left(\frac{P_i}{i\omega_* - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(i\omega_* - \lambda_i)^{j+1}} \right) B u_0 e^{i\omega_* t} + D B u_0 e^{i\omega_* t}, \quad (9.6c)$$

где x_0 — произвольный вектор.

Далее подобным образом доказывается, что коэффициенты

$$CN_i^j x_0$$

в (9.6a) перед $\frac{t^j e^{\lambda_i t}}{j!}$ при $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ и $j \geq 1$, а также коэффициенты

$$CP_1 B u_0 \quad \text{и} \quad CN_1^j B u_0$$

из (9.6b) перед $\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}$ при $j \geq 0$ равны нулю. Проведем соответствующие рассуждения подробно.

Обозначим собственные значения λ_i , входящие в (9.6a) (они имеют нулевые действительные части), через $\lambda_{i_1} = i\omega_{i_1}$, $\lambda_{i_2} = i\omega_{i_2}$, ..., $\lambda_{i_r} = i\omega_{i_r}$. Добавим к ним собственное значение $\lambda_* = i\omega_*$. Обозначим через ν наибольшую из степеней t , входящих в (9.6) (поскольку в силу выбора u_0 в (9.6b) присутствует заведомо ненулевое слагаемое tP_* , имеем $\nu \geq 1$). Покажем, что коэффициенты $CN_{i_k}^\nu x_0$ в (9.6a) и коэффициент $CN_*^{\nu-1} B u_0$ в (9.6b) равны нулю (коэффициент $CP_* B u_0$ для краткости обозначений считаем частным случаем $CN_*^j B u_0$ при $j = 0$). Предположим противное: пусть, например (случай, когда $CN_*^{\nu-1} B u_0 \neq 0$ разбирается аналогично, о чем будет напомнено ниже), для какого-то i_k коэффициент $CN_{i_k}^\nu x_0$ из (9.6a) отличен от нуля.

Посмотрим на поведение при $t \rightarrow \infty$ функции

$$w(t) = \int_1^t \frac{z(s)}{s^\nu e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \int_1^t \frac{z(s)}{s^\nu e^{i\omega_{i_k} s}} ds, \quad (9.7)$$

где z — функция (9.6). Поскольку $\nu \geq 1$, часть

$$\int_1^t \frac{C \left[\sum_{i=2}^m \left(\frac{P_i}{i\omega_* - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{\nu_i-1} \frac{N_i^j}{(i\omega_* - \lambda_i)^{j+1}} \right) \right] e^{i\omega_* s} + DB u_0 e^{i\omega_* s}}{s^\nu e^{i\omega_{i_k} s}} ds$$

этого интеграла, пришедшая из (9.6с), растет не быстрее $\ln t$.

Рассмотрим слагаемые функции (9.7), пришедшие из (9.4a). Если λ_i есть одно из чисел $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_r}$, но $j < \nu$, то интеграл

$$\int_1^t \frac{C \frac{s^j e^{\lambda_{i_\gamma} s}}{j!} N_{i_\gamma}^j x_0}{s^\nu e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \int_1^t \frac{C \frac{s^j}{j!} N_{i_\gamma}^j x_0}{s^\nu} e^{i(\omega_{i_\gamma} - \omega_{i_k})s} ds = 0$$

при $t \rightarrow +\infty$ ограничен. Аналогично (в случае $\lambda_i = \lambda_*$) для $j < \nu - 1$ имеем, что ограничен интеграл

$$\int_1^t \frac{C \frac{s^{j+1}}{(j+1)!} N_1^j B u_0 e^{i\lambda_* s}}{s^\nu e^{i\lambda_{i_k} s}} ds = \int_1^t \frac{C \frac{s^{j+1}}{(j+1)!} N_1^j B u_0}{s^\nu} e^{i(\omega_* - \omega_{i_k})s} ds = 0.$$

Нерассмотренными в (9.6a) остаются слагаемые

$$\int_1^t \frac{C \left(\sum_{\gamma=1}^r \frac{s^\nu e^{\lambda_{i_\gamma} s}}{\nu!} N_{i_k}^{\nu-1} \right) x_0}{s^\nu e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \frac{1}{\nu!} \int_1^t C \left(\sum_{\gamma=1}^r N_{i_k}^\nu \right) x_0 e^{i(\omega_{i_\gamma} - \omega_{i_k})s} ds,$$

а в (9.6b) —

$$\int_1^t \frac{C \frac{s^\nu}{\nu!} N_*^{\nu-1} x_0 e^{i\lambda_* s}}{s^\nu e^{\lambda_{i_k} s}} ds = \frac{1}{\nu!} \int_1^t C N_*^{\nu-1} x_0 e^{i(\omega_* - \omega_{i_k})s} ds.$$

При этом слагаемое (соответствующее $i_\gamma = i_k$)

$$\frac{1}{\nu!} \int_1^t C N_{i_k}^\nu x_0 e^{i(\omega_{i_k} - \omega_{i_k})s} ds = \frac{1}{\nu!} \int_1^t C N_{i_k}^\nu x_0 ds$$

растет как t на ∞ (напомним, что по предположению противного $C N_{i_k}^\nu x_0 \neq 0$), а остальные слагаемые ограничены. Отсюда следует, что функция (9.7) растет как t на $+\infty$, хотя функция z ограничена и $\nu \geq 1$, что является противоречием. Значит, предположение противного было неверным, т. е. коэффициент $C N_{i_k}^\nu x_0$ равен нулю.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получаем, что для всех слагаемых, отвечающих $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_r}$ с нулевой действительной частью, равны нулю все слагаемые, содержащие $t^{\nu-1}$. Аналогично рассматривается второй вариант предположения противного: коэффициент $C N_*^{\nu-1} B u_0$ из (9.6b) отличен от нуля. Затем устанавливаем, что коэффициенты у всех слагаемых, содержащих меньшие ненулевые степени t , также равны нулю.

Напомним, что в силу выбора u_0 имеем $P_1 B u_0 \neq 0$. Обозначим через j_0 наибольшее значение j , для которого $N_1^{j_0} B u_0 \neq 0$. Очевидно, вектор $v = N_1^{j_0} B u_0$ переводится матрицей N_1 в ноль и поэтому, как следует из формулы (см. теорему 4)

$$A v = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i + N_i \right) N_1^{j_0} B u_0 = (\lambda_1 P_1 N_1^{j_0} + N_1^{j_0+1}) B u_0 = \lambda_1 N_1^{j_0} B u_0 = \lambda_1 v,$$

является собственным для матрицы A , отвечающим собственному значению $\lambda_1 = i\omega_1$. В силу теоремы 8 $C v \neq 0$ или подробнее

$$C N_1^{j_0} B u_0 \neq 0.$$

Но это противоречит ранее доказанному равенству $C N_1^j B u_0 = 0$ при всех $j \geq 0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских, А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. — М.-Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. — 540 с.
2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.
3. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.
4. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М. : ИЛ, 1962. — 895 с.
5. Курбатов, В. Г. Алгебра : учебное пособие / В. Г. Курбатов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 604 с.
6. Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Научная книга, 2015. — 122 с.
7. Курбатов, В. Г. Вычислительные методы спектральной теории : учебное пособие / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — 323 с.
8. Antoulas, A. C. Approximation of large-scale dynamical systems / A. C. Antoulas. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005. — V. 6 of Advances in Design and Control. — xxvi+479 p.
9. Higham, N. J. Functions of matrices: theory and computation / N. J. Higham. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. — xx+425 p.
10. Kurbatov, V. G. Computation of Green's function of the bounded solutions problem / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Comput. Methods Appl. Math. — 2018. — V. 18, № 4. — P. 673–685.

11. Polderman, J. W. Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach / J. W. Polderman, J. C. Willems. — New York : Springer-Verlag, 1998. — V. 26 of Texts in Applied Mathematics. — xxx+424 p.
12. Ziebur, A. D. On determining the structure of A by analyzing e^{At} / A. D. Ziebur // SIAM Rev. — 1970. — V. 12. — P. 98–102.

REFERENCES

1. Borovskikh A.V., Perov A.I. Lectures on ordinary differential equations. [Borovskikh A.V., Perov A.I. Lekcii po obyknovennym differentsial'nyh uravneniyam]. Moscow–Izhevsk, 2004, 540 p.
2. Gantmacher F.R. The theory of matrices. [Gantmacher F.R. Teoriya matric]. Moscow, 1988, 552 p.
3. Daleckiĭ J.L., Kreĭn M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. [Daleckij YU.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differentsial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve]. Moscow, 1970, 536 p.
4. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Part I. General theory. [Danford N., SHvarc Dzh.T. Linejnye operatory. Obshchaya teoriya]. Moscow, 1962, 895 p.
5. Kurbatov V.G. Algebra. [Kurbatov V.G. Algebra]. Voronezh, 2022, 604 p.
6. Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. The foundation of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. Osnovy spektral'noj teorii]. Voronezh, 2015, 122 p.
7. Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. Computational methods of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. Vychislitel'nye metody spektral'noj teorii]. Voronezh, 2019, 323 p.
8. Antoulas A.C. Approximation of large-scale dynamical systems. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005, vol. 6 of Advances in Design and Control, xxvi+479 p.
9. Higham N.J. Functions of matrices: theory and computation. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008, xx+425 p.
10. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Computation of Green's function of the bounded solutions problem. Comput. Methods Appl. Math., 2018, vol. 18, no. 4, pp. 673–685.
11. Polderman J.W., Willems J.C. Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach. New York: Springer-Verlag, 1998, vol. 26 of Texts in Applied Mathematics, xxx+424 p.
12. Ziebur A.D. On determining the structure of A by analyzing e^{At} . SIAM Rev., 1970, vol. 12, pp. 98–102.

*Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kv51@inbox.ru*

*Kurbatov V. G., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kv51@inbox.ru*