

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ И РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ*

М. Б. Зверева

*Воронежский государственный университет;
Воронежский государственный педагогический университет*

Поступила в редакцию 02.09.2024 г.

Аннотация. В настоящей работе изучается краевая задача с нелинейными краевыми условиями и разрывными решениями, принадлежащими классу μ – абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций, μ – производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$. Предполагается, что функция μ строго возрастает на $[0, l]$ и непрерывна в точках $x = 0$ и $x = l$. Такая задача моделирует процесс деформаций разрывной стieltjesовской струны, натянутой вдоль отрезка $[0, l]$, под воздействием внешней силы. Предполагается, что в точках $x = 0$ и $x = l$ установлены вертикальные ограничители на перемещения, представленные отрезками $[-m_1, m_1]$ и $[-m_2, m_2]$ соответственно. В зависимости от внешней силы, соответствующие концы струн либо остаются свободными, либо соприкасаются с граничными точками ограничителей. Это порождает нелинейные краевые условия, поскольку заранее поведение решения не известно. Исследуемая задача получена в соответствии с принципом Лагранжа – Гамильтона из задачи о минимизации функционала потенциальной энергии. Вариационными методами установлены необходимое и достаточное условия экстремума энергетического функционала, доказана единственность решения полученной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, функционал энергии, вариация, интеграл Стильеса, мера, производная по мере, функция ограниченной вариации.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLINEAR CONDITIONS AND DISCONTINUOUS SOLUTIONS

M. B. Zvereva

Abstract. In the present paper we study a boundary value problem with nonlinear boundary conditions and discontinuous solutions, belonging to the class of μ – absolutely continuous functions on $[0, l]$, whose μ – derivatives have bounded variation on $[0, l]$. It is assumed that the function μ strictly increases on $[0, l]$ and is continuous at the points $x = 0$ and $x = l$. Such problem models the process of deformations of a discontinuous Stieltjes string stretched along the segment $[0, l]$ under the action of an external force. It is assumed that at the points $x = 0$ and $x = l$ vertical limiters on displacements are installed, represented by the segments $[-m_1, m_1]$ and $[-m_2, m_2]$, respectively. Depending on the external force, the corresponding ends of the strings either remain free or touch the boundary points of the limiters. This generates nonlinear boundary conditions, since the behavior of the solution is not known in advance. The problem under study is obtained in accordance with the Lagrange-Hamilton principle from the problem of minimizing the potential energy functional. Variational methods are used to establish the necessary and sufficient conditions for the extremum of the energy functional, and the uniqueness of the solution to the obtained problem is proven.

Keywords: boundary value problem, energy functional, variation, Stieltjes integral, measure, derivative with respect to measure, function of bounded variation.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы OTGE–2024–0002).

© Зверева М. Б., 2024

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучению дифференциального уравнения вида

$$-(pu')' + qu = f \quad (1.1)$$

с импульсными коэффициентами и правой частью посвящено много работ (см., например, [1]–[33]). Особенно выделим публикации [2], [6] – [9], [12] – [15], [23]–[25], [29], [30]. Наличие особенностей у таких уравнений может приводить к трудно разрешимым проблемам из-за потери гладкости. Этот факт исключает возможность использования классических производных при моделировании и анализе. В настоящей работе мы не применяли теорию обобщенных функций, а воспользовались поточечным подходом с использованием интеграла Стильтьеса. Этот подход в случае сильных особенностей в потенциале q , когда q может считаться обобщенной производной от функции ограниченной вариации Q , был намечен Ю.В. Покорным в [16], где в развитие идей В. Феллера и М.Г. Крейна (см. комментарии в [3]), уравнение (1.1) с особенностями в коэффициентах и правой части (типа δ – функции) было заменено интегро-дифференциальным уравнением

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0),$$

решения которого определены в каждой точке. Этот факт позволил разработать [18] качественные методы, направленные на анализ классических осцилляционных свойств для задачи Штурма-Лиувилля и рассмотреть ряд нелинейных задач [4], [5], [11], [22], [31], [32], [33]. Однако краевые задачи с разрывными решениями и нелинейными краевыми условиями к настоящему времени мало исследованы.

В настоящей работе изучается модель деформаций разрывной стилтьесовской струны, имеющая вид

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ p(0)u'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) + f_1 \in N_{[-m_1, m_1]}(u(0)), \\ -p(l)u'_\mu(l) - \gamma_2 u(l) + f_2 \in N_{[-m_2, m_2]}(u(l)). \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь через $N_C(x)$ обозначен нормальный конус в точке $x \in C$ ко множеству C , определяемый числовым множеством

$$N_C(x) = \{\xi \in R : \xi(c - x) \leq 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Мы предполагаем существование строго возрастающей на $[0, l]$ функции $\mu(x)$, непрерывной в точках $x = 0$ и $x = l$, такой, что решения $u(x)$ уравнения из (1.2) могут считаться μ – абсолютно – непрерывными. Интеграл $\int_0^x ud[Q]$ понимается в обобщенном смысле по Стильтьесу, предложенном Ю.В. Покорным в работе [16]. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки.

Статья устроена следующим образом. В п.2. приведены необходимые понятия и факты. В п.3 приводится постановка задачи и выписывается функционал потенциальной энергии изучаемой физической системы. В п. 4 установлены необходимые и достаточные условия экстремума энергетического функционала, доказана теорема о единственности решения задачи (1.2).

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Пространство $BV[0, l]$ — множество функций, каждая из которых имеет ограниченную вариацию

$$V_0^l(u) = \sup_{0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq l} \sum_{i=0}^{k-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|.$$

Любая функция $u(x)$ из $BV[0, l]$ допускает разложение Жордана $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — неубывающие функции.

Скачки функций из BV . Для любой функции $u(x)$ из $BV[0, l]$ в каждой точке $\xi \in (0, l]$ существует левый, а в каждой точке $\xi \in [0, l]$ — правый пределы, т.е. $u(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} u(x)$ и $u(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} u(x)$.

Простым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину

$$\Delta u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi - 0),$$

полагая $u(0 - 0) = u(0)$ и $u(l + 0) = u(l)$.

Левым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину

$$\Delta^- u(\xi) = u(\xi) - u(\xi - 0).$$

Правым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину

$$\Delta^+ u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi).$$

Всюду далее через $S(u)$ обозначается множество точек разрыва $u(x)$. Для $u \in BV[0, l]$ множество $S(u)$ не более чем счетно.

Функция скачков $u_s(x)$ для функции ограниченной вариации $u(x)$ определяется как

$$u_s(x) = \sum_{0 < \xi \leq x} \Delta^- u(\xi) + \sum_{0 \leq \xi < x} \Delta^+ u(\xi),$$

полагая $u_s(0) = 0$.

Всякая функция $u(x)$ из $BV[0, l]$ может быть представлена в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_s(x),$$

где $u_0(x)$ — непрерывная функция, $u_s(x)$ — функция скачков.

μ -абсолютная непрерывность. Пусть функция $\mu(x)$ монотонно возрастает на $[0, l]$. Функция $u(x)$ является μ -абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f d\mu,$$

где интеграл понимается по Лебегу–Стилтьесу. Функция f называется μ производной от u по мере μ и обозначается через u'_μ .

Заметим, что μ -абсолютно непрерывная функция $u(x)$ может быть разрывной лишь в точках разрыва $\mu(x)$. Причем, во всякой точке ξ разрыва функции μ справедливо равенство

$$u'_\mu(\xi) = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)}.$$

Обобщенный интеграл Стильеса.

Интеграл, понимаемый в обобщенном смысле по Стильтесу (когда мера сингулярных точек "расщепляется") $\int_{\alpha}^{\beta} u d[v]$ впервые был введен Ю.В. Покорным в [16]. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы будем заключать функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Следуя [16], для функций ограниченной вариации $u(x)$ и $v(x)$ интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} u d[v]$ может быть представлен в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} u d[v] = \int_{\alpha}^{\beta} u dv_0 + \sum_{\alpha < s \leq \beta} u(s-0) \Delta^{-} v(s) + \sum_{\alpha \leq s < \beta} u(s+0) \Delta^{+} v(s),$$

где v_0 — непрерывная часть v ; интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} u dv_0$ понимается в обычном смысле по Лебегу-Стилтьесу. Если одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ непрерывна, то обобщенный интеграл Стильтеса совпадает с классическим интегралом Стильтеса. Если $v(x)$ и $u(x)$ — функции ограниченной вариации, то имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} u d[v] = u(\beta)v(\beta) - u(\alpha)v(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} v du,$$

где интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} v du$ понимается в обычном смысле по Лебегу-Стилтьесу.

Обозначим через E множество μ - абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций таких, что производная u'_{μ} имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$.

Лемма 2.1. (см. [22]) Пусть функция $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$; функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, l]$ и непрерывна в точках $x = 0$ и $x = l$. Предположим, что для любой функции $h \in E$, удовлетворяющей условиям $h(0) = h(l) = 0$, верно

$$\int_0^l A h'_{\mu} d\mu = 0.$$

Тогда функция A является константой на $[0, l]$ в следующем смысле. Для любой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ выполняется равенство

$$A(\xi - 0) = A(\xi) = A(\xi + 0) = c.$$

Для любой точки s непрерывности функции $\mu(x)$ выполняется равенство

$$A(s - 0) = A(s + 0) = c.$$

Интегро - дифференциальное уравнение.

Центральный объект настоящей работы — интегро-дифференциальное уравнение

$$-(pu'_{\mu})(x) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - (pu'_{\mu})(0), \quad (2.1)$$

где интеграл понимается в обобщенном смысле по Стильтесу [16]. Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$, масштабирующей отрезок $[0, l]$, такой, что

решения уравнения (2.1) могут считаться μ – абсолютно непрерывными. Функции p, F имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p > 0$; функция $Q(x)$ не убывает на $[0, l]$.

Функции μ, Q, F, p непрерывны в точках $x = 0$ и $x = l$.

Корректное распространение методов классического анализа на изучаемую нами ситуацию требует замены точек разрыва μ, Q, F, p некоторыми их расширениями. Пусть $S(\mu)$ – множество точек разрыва $\mu(x)$. Отметим, что мы допускаем случай и когда $S(\mu)$ счетно, и когда $S(\mu)$ конечно. Решения $u(x)$ уравнения (2.1) мы ищем в классе E . Тем самым всякое решение $u(x)$ уравнения (2.1) есть функция ограниченной вариации на $[0, l]$, которая может быть разрывной только в точках из $S(\mu)$. При этом значения $u(\xi_i)$, где $\xi_i \in S(\mu)$, не определены: играют роль лишь предельные значения $u(\xi_i - 0)$, $u(\xi_i + 0)$.

Обозначим $J_\mu = [0, l] \setminus S(\mu)$. Введем на J_μ метрику $\rho(x, y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство (J_μ, ρ) , очевидно, не является полным. Обозначим через $\overline{[0, l]}_\mu$ его пополнение по метрике ρ . Заметим, что множество $\overline{[0, l]}_\mu$ вместо всякой точки разрыва ξ функции $\mu(x)$ содержит пару элементов, обозначаемых через $\xi - 0$ и $\xi + 0$. В точках $\xi \pm 0$ будем определять функции μ, u, Q, F, p предельными значениями. Таким образом, всякое решение уравнения (2.1) определено на $\overline{[0, l]}_\mu$.

Пусть $R_\mu = \overline{[0, l]}_\mu \cup S(\mu)$. Введем функцию $\sigma(x) = x + p_1 + p_2 + Q + F_1 + F_2$, где z_1 и z_2 – возрастающие функции из жорданова представления функции ограниченной вариации $z = z_1 - z_2$. Можно считать, что функция $\sigma(x)$ содержит лишь точки разрыва p, Q, F . Обозначим через S множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не лежащих в $S(\mu)$. Пусть $JR_\mu = R_\mu \setminus S$. Пополним JR_μ по метрике $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$, заменив всякую точку $s \in S$ парой $\{s - 0, s + 0\}$. Обозначим полученное множество через $\overline{[0, l]}_S$. Заметим, что множество $\overline{[0, l]}_S$ вместе со всякой точкой ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, а всякая точка $s \in S$ заменена парой $\{s - 0, s + 0\}$. В точках $s \pm 0$ будем определять функции μ, u, Q, F, p предельными значениями.

Из (2.1) следует, что для любой точки x , в которой все функции μ, p, Q, F непрерывны, существует производная $u'_\mu(x)$. Во всех других точках существуют левая и правая производные $u'_\mu(\xi - 0)$ и $u'_\mu(\xi + 0)$, совпадающие с односторонними пределами. Из (2.1) вытекает, что в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ справедливы равенства

$$-p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0) u'_\mu(\xi - 0) + u(\xi - 0) \Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi), \quad (2.2)$$

$$p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0) u'_\mu(\xi + 0) + u(\xi + 0) \Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi), \quad (2.3)$$

а в точках $s \in S$ равенство

$$-p(s + 0) u'_\mu(s + 0) + p(s - 0) u'_\mu(s - 0) + u(s) \Delta Q(s) = \Delta F(s).$$

Уравнение (2.1) напоминает по своим свойствам обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Доказательство основных фактов базируется на следующих результатах.

Теорема 2.1. (см. [17]) Для любой точки $x_0 \in \overline{[0, l]}_S \setminus S(\mu)$ и любых чисел u_0, v_0 задача

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - (pu')_\mu(0) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'_\mu(x_0) = v_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Пусть $u(x)$ — функция ограниченной вариации на $[0, l]$. Будем называть $\xi \in [0, l]$ нулевой точкой функции $u(x)$, если $u(\xi - 0)u(\xi + 0) \leq 0$. Заметим, что если в нулевой точке ξ функция $u(x)$ непрерывна, то $u(\xi) = 0$. Если же нулевая точка ξ является точкой разрыва u , то либо один из пределов $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$ равен нулю, либо функция $u(x)$ меняет знак.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-(pu'_\mu)(x) + \int_0^x u d[Q] = -(pu'_\mu)(0). \quad (2.4)$$

Будем называть уравнение (2.4) неосциллирующим на $[0, l]$, если всякое нетривиальное решение (2.4) имеет на $[0, l]$ не более одной нулевой точки.

Теорема 2.2. (см. [22]) *Для неосцилляции на $[0, l]$ уравнения (2.4) достаточно, чтобы функция $Q(x)$ монотонно неубывала на $[0, l]$.*

Нормальный конус. Пусть задано замкнутое выпуклое множество $G \subset H$, где H — гильбертово пространство. Пусть $x \in G$. Нормальным конусом в точке x ко множеству G называется множество

$$N_G(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x \rangle \leq 0 \quad \forall c \in G\}.$$

Заметим, что если x — внутренняя точка G , то $N_G(x) = \{0\}$. Если $G = [-m, m]$, где $m > 0$, то $N_G(m) = [0, +\infty)$, $N_G(-m) = (-\infty, 0]$.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть разрывная стилтесовская струна (цепочка стилтесовских струн, соединенных пружинами) расположена вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox . В точках $x = 0$ и $x = l$ прикреплены упругие опоры (пружины жесткостей γ_1 и γ_2 соответственно). Кроме того, в точках $x = 0$ и $x = l$ установлены ограничители $[-m_1, m_1]$ и $[-m_2, m_2]$ на перемещение упруго закрепленных концов струны. Под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F^*(x)$, струна отклоняется от положения равновесия в положение $u(x)$. Условия присутствия ограничителей на перемещение концов струны означают, что $|u(0)| \leq m_1$, $|u(l)| \leq m_2$. Соприкоснутся или нет концы струн с точками $\pm m_1$, $\pm m_2$ зависит от внешней нагрузки.

Рассмотрим сначала простой случай, когда цепочка состоит из двух струн, соединенных в точке $x = \xi$ пружиной жесткости γ . Заметим, что в точке ξ функция $u(x)$ не определена, но определены предельные значения $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$, описывающие отклонения от положения равновесия скрепленных пружиной концов струн. Предположим, что сосредоточенные силы f_1 и f_2 применяются на концах струнной цепочки, а сосредоточенные силы f_3 и f_4 действуют на скрепленные концы струн. Тогда функция $F^*(x)$, характеризующая внешнюю силу, имеет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ f_1, & 0 < x < \xi, \\ f_1 + f_3, & x = \xi, \\ f_1 + f_3 + f_4, & \xi < x < l, \\ f_1 + f_3 + f_4 + f_2, & x = l. \end{cases}$$

Работа, совершенная этой силой, равна

$$f_1 u(0) + f_3 u(\xi - 0) + f_4 u(\xi + 0) + f_2 u(l) = \int_0^l u d[F^*].$$

Заметим, что скачки функции F^* в точках разрыва совпадают с силами, сосредоточенными в соответствующих точках. Для того, чтобы иметь возможность рассматривать случай сосредоточенных сил в произвольном множестве точек (но не более чем счетном), исследовать задачи с произвольным множеством точек разрыва (но не более чем счетном), мы применяем обобщенный интеграл Стильтьеса $\int_0^l u d[F^*]$.

Обозначим через $p^*(x)$ функцию, характеризующую локальное натяжение струн. Будем определять значения функции $p^*(x)$ в точках разрыва $u(x)$ равными упругостям пружин, соединяющих струны. В частности, в рассматриваемом примере $p^*(\xi) = \gamma$. При малых деформациях работа силы натяжения может быть представлена как

$$\int_0^l \frac{p^*(x) u_x'^2(x)}{2} dx + \frac{\gamma(\Delta u(\xi))^2}{2} = \int_0^l \frac{p^*(x) u_\mu'^2(x)}{2} d\mu(x),$$

где $\mu(x) = x + \theta(x - \xi)$; $\theta(x)$ — функция Хевисайда. В общей ситуации, $\mu(x)$ — произвольная возрастающая на $[0, l]$ функция, непрерывная в точках $x = 0$, $x = l$.

Обозначим через $Q^*(x)$ функцию, характеризующую упругие свойства внешней среды. Пусть пружины жесткостей γ_3 и γ_4 дополнительно прикреплены к концам струн, соединенных пружиной жесткости γ , и пружины с жесткостями γ_1 и γ_2 установлены в точках $x = 0$ и $x = l$. Тогда

$$Q^*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \gamma_1, & 0 < x < \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_3, & x = \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4, & \xi < x < l, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, & x = l. \end{cases}$$

Заметим, что скачки функции $Q^*(x)$ в точках разрыва совпадают с упругостями соответствующих пружин. Таким образом, работа силы упругости внешней среды равна

$$\frac{u^2(0)}{2} \gamma_1 + \frac{u^2(\xi - 0)}{2} \gamma_3 + \frac{u^2(\xi + 0)}{2} \gamma_4 + \frac{u^2(l)}{2} \gamma_2 = \int_0^l \frac{u^2(x)}{2} d[Q^*(x)].$$

Следовательно, функционал потенциальной энергии для нашей физической системы имеет вид

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{p^* u_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^l \frac{u^2}{2} d[Q^*] - \int_0^l u d[F^*]. \quad (3.1)$$

Далее мы будем рассматривать общий случай, когда функция $u(x)$ может быть разрывна в не более чем счетном множестве точек, упругие опоры могут быть установлены в не более чем счетном множестве точек и силы могут быть сосредоточены в не более чем счетном множестве точек. В этом случае функционал потенциальной энергии также имеет вид (3.1). Мы предполагаем, что функции $p^*(x)$, $F^*(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$ и $\inf_{(0, l)} p^*(x) > 0$; $\Delta^+ F^*(0) = f_1$, $\Delta^- F^*(l) = f_2$. Функция $Q^*(x)$ не убывает на $[0, l]$ и $\Delta^+ Q^*(0) = \gamma_1 > 0$; $\Delta^- Q^*(l) = \gamma_2 > 0$. В функционале (3.1) первый интеграл понимается в классическом смысле как интеграл по мере, генерируемой функцией $\mu(x)$, когда мера всякой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ может быть задана простым скачком $\Delta\mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)$. Второго и третьего интегралы понимаются в обобщенном смысле, когда мера всякой точки разрыва, например, функции Q^* расщепляется на левую и правые, определяемые с помощью левого $\Delta^- Q^*(\xi) = Q^*(\xi) - Q^*(\xi - 0)$ и правого $\Delta^+ Q^*(\xi) = Q^*(\xi + 0) - Q^*(\xi)$ скачков.

Подчеркнем, что рассматриваемая здесь функция $u(x)$ определяет гипотетически возможную деформацию изучаемой физической системы. Энергетический функционал (3.1) задан на множестве функций $u \in E$, удовлетворяющих условиям

$$|u(0)| \leq m_1, \quad |u(l)| \leq m_2. \quad (3.2)$$

Согласно принципу Лагранжа – Гамильтона, реальная форма u_0 , принятая физической системой, минимизирует функционал Φ при условиях (3.2).

Определим функции

$$Q(x) = \begin{cases} Q^*(0+0), & x = 0, \\ Q^*(x), & 0 < x < l, \\ Q^*(l-0), & x = l \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} F^*(0+0), & x = 0, \\ F^*(x), & 0 < x < l, \\ F^*(l-0), & x = l \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} p^*(0+0), & x = 0, \\ p^*(x), & 0 < x < l, \\ p^*(l-0), & x = l. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{u^2}{2} d[Q^*] &= \int_{(0,l)} \frac{u^2}{2} d[Q^*] + \frac{u^2(0)}{2} \Delta^+ Q^*(0) + \frac{u^2(l)}{2} \Delta^- Q^*(l) = \\ &= \int_0^l \frac{u^2}{2} d[Q] + \frac{u^2(0)}{2} \gamma_1 + \frac{u^2(l)}{2} \gamma_2, \\ \int_0^l u d[F^*] &= \int_{(0,l)} u d[F^*] + u(0) \Delta^+ F^*(0) + u(l) \Delta^- F^*(l) = \\ &= \int_0^l u d[F] + u(0) f_1 + u(l) f_2. \end{aligned}$$

Функционал Φ может быть переписан как

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{p u_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^l \frac{u^2}{2} d[Q] + \frac{u^2(0)}{2} \gamma_1 + \frac{u^2(l)}{2} \gamma_2 - \int_0^l u d[F] - u(0) f_1 - u(l) f_2.$$

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 4.1. Для того, чтобы функция $u_0(x)$ минимизировала функционал потенциальной энергии $\Phi(u)$ необходимо и достаточно, чтобы $u_0(x)$ являлась решением задачи (1.2), т.е.

$$\begin{cases} -(p u'_\mu)(x) + (p u'_\mu)(0) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0), \\ p(0) u'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) + f_1 \in N_{[-m_1, m_1]}(u(0)), \\ -p(l) u'_\mu(l) - \gamma_2 u(l) + f_2 \in N_{[-m_2, m_2]}(u(l)). \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функции $h \in E$ такие, что $h(0) = h(l) = 0$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что $u \in E$, $|u(0)| = |u_0(0)| \leq m_1$, $|u(l)| = |u_0(l)| \leq m_2$. Так как u_0 минимизирует функционал Φ , то

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Фиксируя h , рассмотрим функцию $\varphi_h(\lambda)$ вещественной переменной λ , определенную как $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма, получим

$$\frac{d}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0.$$

В силу $h(0) = h(l) = 0$ перепишем последнее равенство как

$$\int_0^l p u'_{0\mu} h'_\mu d\mu + \int_0^l u_0 h d[Q] - \int_0^l h d[F] = 0.$$

Пусть

$$g(x) = \int_0^x u_0 d[Q].$$

Имеем

$$\int_0^l u_0 h d[Q] = - \int_0^l g dh, \quad - \int_0^l h d[F] = \int_0^l F dh.$$

Значит

$$\int_0^l (p u'_{0\mu} - g + F) dh = 0.$$

Так как функция $h(x)$ является μ -абсолютно непрерывной, то

$$\int_0^l (p u'_{0\mu} - g + F) h'_\mu d\mu = 0. \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) выполнено для всех функций $h \in E$ таких, что $h(0) = h(l) = 0$. Согласно лемме 2.1 получим

$$(p u'_{0\mu})(x) - g(x) + F(x) = \text{const}, \quad x \in \overline{[0, l]}_S. \quad (4.2)$$

Следовательно,

$$-(p u'_{0\mu})(x) + (p u'_{0\mu})(0) + \int_0^x u_0 d[Q] = F(x) - F(0).$$

Зафиксируем число $c \in [-m_2, m_2]$. Рассмотрим функцию $h \in E$ такую, что $h(0) = 0$, $h(l) = c - u_0(l)$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Заметим, что $u \in E$, и $|u(0)| \leq m_1$. Рассмотрим условие в точке $x = l$. Имеем

$$u(l) = u_0(l) + \lambda h(l) = u_0(l) + \lambda(c - u_0(l)) = \lambda c + (1 - \lambda)u_0(l) \in [-m_2, m_2],$$

так как $c, u_0(l) \in [-m_2, m_2]$, $\lambda \in [0, 1]$. В силу того, что u_0 — точка минимума функционала Φ , выполняется неравенство

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Фиксируя h , введем функцию $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Тогда

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda).$$

Значит, правая производная удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^+}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geq 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^l ((pu'_{0\mu})(x) - \int_0^x u_0 d[Q] + F(x)) dh + h(l) \int_0^l u_0 d[Q] - h(l)F(l) + \\ \gamma_2 u_0(l)h(l) - f_2 h(l) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) перепишем как

$$(pu'_{0\mu})(x) - \int_0^x u_0 d[Q] + F(x) = p(l)u'_{0\mu}(l) - \int_0^l u_0 d[Q] + F(l).$$

Подставив это представление в (4.3), получим

$$(p(l)u'_{0\mu}(l) + \gamma_2 u_0(l) - f_2) h(l) \geq 0.$$

Таким образом, для всех $c \in [-m_2, m_2]$, с учетом $h(l) = c - u_0(l)$, имеем

$$(-p(l)u'_{0\mu}(l) - \gamma_2 u_0(l) + f_2)(c - u_0(l)) \leq 0.$$

Другими словами,

$$-p(l)u'_{0\mu}(l) - \gamma_2 u_0(l) + f_2 \in N_{[-m_2, m_2]}(u_0(l)).$$

Зафиксируем теперь любое число $c \in [-m_1, m_1]$. Рассмотрим функцию $h \in E$ такую, что $h(0) = c - u_0(0)$, $h(l) = 0$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Заметим, что $u \in E$, $|u(l)| \leq m_2$ и $|u(0)| \leq m_1$. Так как u_0 — точка минимума функционала Φ , выполнено неравенство

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Фиксируя h , введем функцию $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Тогда

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda).$$

Значит, правая производная удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^+}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geq 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^l ((pu'_{0\mu})(x) - \int_0^x u_0 d[Q] + F(x)) dh + h(0)F(0) + \\ \gamma_1 u_0(0)h(0) - f_1 h(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(-p(0)u'_{0\mu}(0) + \gamma_1 u_0(0) - f_1) h(0) \geq 0.$$

Тогда для всех $c \in [-m_1, m_1]$, с учетом $h(0) = c - u_0(0)$, имеем

$$(p(0)u'_{0\mu}(0) - \gamma_1 u_0(0) + f_1)(c - u_0(0)) \leq 0.$$

Другими словами,

$$p(0)u'_{0\mu}(0) - \gamma_1 u_0(0) + f_1 \in N_{[-m_1, m_1]}(u_0(0)).$$

Достаточность. Пусть функция $u_0(x)$ является решением задачи (1.2). Докажем, что для любой функции $u \in E$, удовлетворяющей условиям $|u(0)| \leq m_1$, $|u(l)| \leq m_2$, выполняется неравенство $\Phi(u) - \Phi(u_0) \geq 0$. Представим функцию $u(x)$ как $u(x) = u_0(x) + h(x)$, где $h(x) = u(x) - u_0(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) &= \int_0^l \frac{ph_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^l \frac{h^2}{2} d[Q^*] + \\ &+ \int_0^l (pu'_{0\mu} - \int_0^x u_0 d[Q] + F(x)) dh + h(l) \int_0^l u_0 d[Q] + \\ &+ h(0)(\gamma_1 u_0(0) + F(0) - f_1) + h(l)(\gamma_2 u_0(l) - F(l) - f_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(pu'_{0\mu})(x) - \int_0^x u_0 d[Q] + F(x) = (pu'_{0\mu})(l) - \int_0^l u_0 d[Q] + F(l) = (pu'_{0\mu})(0) + F(0),$$

$h(0) = u(0) - u_0(0)$ и $u(0) \in [-m_1, m_1]$, $h(l) = u(l) - u_0(l)$ и $u(l) \in [-m_2, m_2]$,

$$p(0)u'_{0\mu}(0) - \gamma_1 u_0(0) + f_1 \in N_{[-m_1, m_1]}(u_0(0)),$$

$$-p(l)u'_{0\mu}(l) - \gamma_2 u_0(l) + f_2 \in N_{[-m_2, m_2]}(u_0(l)),$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) &= \int_0^l \frac{ph_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^l \frac{h^2}{2} d[Q^*] + \\ &+ ((pu'_{0\mu})(l) + \gamma_2 u_0(l) - f_2)h(l) + (- (pu'_{0\mu})(0) + \gamma_1 u_0(0) - f_1)h(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2. Если решение задачи (1.2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения задачи (1.2). Тогда $u(x) = u_2(x) - u_1(x)$ — решение однородного уравнения (2.4). Предположим, что функция $u(x)$ отлична от нулевой. Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения задачи (1.2), то $|u_1(0)| \leq m_1$, $|u_2(0)| \leq m_1$ и

$$(p(0)u'_{1\mu}(0) - \gamma_1 u_1(0) + f_1)(c - u_1(0)) \leq 0, \quad (4.4)$$

$$(p(0)u'_{2\mu}(0) - \gamma_1 u_2(0) + f_1)(c - u_2(0)) \leq 0 \quad (4.5)$$

для всех $c \in [-m_1, m_1]$. Полагая в (4.4) $c = u_2(0)$ и в (4.5) $c = u_1(0)$, получим

$$(p(0)u'_{1\mu}(0) - \gamma_1 u_1(0) + f_1)(u_2(0) - u_1(0)) \leq 0,$$

$$(p(0)u'_{2\mu}(0) - \gamma_1 u_2(0) + f_1)(u_1(0) - u_2(0)) \leq 0.$$

Таким образом, имеем

$$(p(0)u'_\mu(0) - \gamma_1 u(0))u(0) \geq 0. \quad (4.6)$$

Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения задачи (1.2), то $|u_1(l)| \leq m_2$, $|u_2(l)| \leq m_2$ и

$$(-p(l)u'_{1\mu}(l) - \gamma_2 u_1(l) + f_2)(c - u_1(l)) \leq 0, \quad (4.7)$$

$$(-p(l)u'_{2\mu}(l) - \gamma_2 u_2(l) + f_2)(c - u_2(l)) \leq 0 \quad (4.8)$$

для всех $c \in [-m_2, m_2]$. Полагая в (4.7) $c = u_2(l)$ и в (4.8) $c = u_1(l)$, получим

$$(-p(l)u'_{1\mu}(l) - \gamma_2 u_1(l) + f_2)(u_2(l) - u_1(l)) \leq 0,$$

$$(-p(l)u'_{2\mu}(l) - \gamma_2 u_2(l) + f_2)(u_1(l) - u_2(l)) \leq 0.$$

Таким образом, верно неравенство

$$(p(l)u'_\mu(l) + \gamma_2 u(l))u(l) \leq 0. \quad (4.9)$$

Заметим, что по теореме 2.2 функция $u(x)$ имеет не более одной нулевой точки на $[0, l]$. Предположим $u(x) > 0$ для всех $x \in [0, l]$. Тогда $u(0) > 0$ и согласно (4.6)

$$p(0)u'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) \geq 0,$$

т.е.

$$p(0)u'_\mu(0) \geq \gamma_1 u(0) > 0.$$

Из уравнения (2.4) имеем $p(x)u'_\mu(x) > 0$. Таким образом,

$$(p(l)u'_\mu(l) + \gamma_2 u(l))u(l) > 0,$$

что противоречит (4.9).

Пусть ξ — нулевая точка функции $u(x)$. Предположим, что $\xi = 0$, т.е. $u(0) = 0$. Тогда функция $u(x)$ не имеет других нулевых точек, кроме $x = 0$. Предположим, что $u(x) > 0$ для всех $x \in (0, l]$. Тогда $u'_\mu(0) > 0$, и из уравнения (2.4) получим $p(x)u'_\mu(x) > 0$. Таким образом,

$$(p(l)u'_\mu(l) + \gamma_2 u(l))u(l) > 0,$$

что противоречит (4.9).

Предположим, что $u(l) = 0$, и $u(x) > 0$ для всех $x \in [0, l]$. Тогда $u'_\mu(l) < 0$. Поскольку

$$(pu'_\mu)(x) = (pu'_\mu)(l) - \int_x^l u d[Q] < 0,$$

то $(pu'_\mu)(0) < 0$, что противоречит (4.6).

Предположим $\xi \in (0, l)$. Рассмотрим случай, когда функция $u(x)$ непрерывна в точке ξ . Тогда $u(\xi) = 0$. Предположим $u(x) > 0$ для всех $x \in [0, \xi]$. Согласно (4.6)

$$p(0)u'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) \geq 0,$$

т.е.

$$p(0)u'_\mu(0) \geq \gamma_1 u(0) > 0.$$

Из уравнения (2.4) получим $p(x)u'_\mu(x) > 0$, где $x \in [0, \xi)$. Таким образом, функция $u(x)$ возрастает на $[0, \xi)$. Так как $u(x)$ непрерывна в точке ξ , получим $u(\xi) > u(0) > 0$, но это противоречит $u(\xi) = 0$. Предположим, что в точке ξ функция $u(x)$ разрывна. Тогда $\Delta u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) \neq 0$, и $u(\xi - 0)u(\xi + 0) \leq 0$. Пусть $u(\xi - 0) > 0$. Таким образом, $u(x) > 0$ для всех $x < \xi$, $u(\xi + 0) \leq 0$ и $\Delta u(\xi) < 0$.

Применив (2.2), получим

$$p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0) = p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) < 0.$$

Так как $u(x)$ — решение однородного уравнения (2.4), имеем

$$(pu'_\mu)(x) = (pu'_\mu)(\xi - 0) - \int_x^{\xi-0} u d[Q] < 0.$$

Значит, $((pu'_\mu)(0) - \gamma_1 u(0))u(0) < 0$, что противоречит (4.6).

Другие случаи могут быть рассмотрены аналогично. Таким образом, $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

REFERENCES

1. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. — Texts and Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988. — 452 p.
2. Anikin, A. Yu. On Expansions in the Exact and Asymptotic Eigenfunctions of the One-Dimensional Schrodinger Operator / A. Yu. Anikin, S. Yu. Dobrokhotov, A. A. Shkalikov // Math. Notes. — 2022. — V. 112, iss. 5. — P. 623–641.
3. Atkinson, F. V. Discrete and continuous boundary problems / F. V. Atkinson. — Math. Sci. Eng., Academic Press, New York, London, 1964. — 570 p.
4. Baev, A. D. Stieltjes differential in nonlinear momentum problems / A. D. Baev, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Doklady Mathematics. — 2014. — V. 90, iss. 2. — P. 613–615.
5. Baev, A. D. Stieltjes differential in impulse nonlinear problems / A. D. Baev, D. A. Chechin, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Doklady Mathematics. — 2020. — V. 101, iss. 1. — P. 5–8.
6. Djakov, P. Spectra of 1-D periodic Dirac operators and smoothness of potentials / P. Djakov, B. Mityagin // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. — 2003. — V. 25, iss. 4. — P. 121–125.
7. Feller, W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions / W. Feller // Ill. J. Math. — 1957. — V. 1. — P. 459–504.
8. Hryniv, R. O. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials / R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk // Inverse Problems. — 2003. — V. 19, iss. 3. — P. 665–684.
9. Ivanov, A. S. Trace of order (-1) for a string with singular weight / A. S. Ivanov, A. M. Savchuk // Math. Notes. — 2017. — V. 102, iss. 2. — P. 164–180.
10. The influence function properties for a problem with discontinuous solutions / M. Kamenskii, Ch-F. Wen, Zh. Zalukaeva, M. Zvereva // Appl. Anal. Optim. — 2017. — V. 1, iss. 2. — P. 259–281.
11. Kamenskii, M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end / M. Kamenskii, Ch-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2020. — V. 69, iss. 9. — P. 1935–1959.
12. Kostenko, A. One-dimensional Schrödinger operator with delta-type interactions / A. Kostenko, M. Malamud // Funct. Anal. Appl. — 2010. — V. 44, iss. 2. — P. 151–155.
13. Kurzweil, J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1958. — V. 8. — P. 360–388.

14. Mikhailets, V. A. A discreteness criterion for the spectrum of a one - dimensional Schrödinger operator with N-interactions / V. A. Mikhailets // *Funct. Anal. Appl.* — 1994. — V. 28, iss. 4. — P. 290–292.
15. Mikhailets, V. A. On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle / V. A. Mikhailets, V. M. Molyboga // *Math. Notes.* — 2012. — V. 91, iss. 4. — P. 588–591.
16. Pokornyi, Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations / Yu. V. Pokornyi // *Doklady Math.* — 1999. — V. 59, iss. 1. — P. 34–37.
17. Stieltjes differential in impulsive problems with discontinuous solutions / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, M. B. Davydova // *Doklady Math.* — 2009. — V. 80, iss. 2. — P. 743–745.
18. Pokornyi, Yu. V. Sturm-Liouville oscillation theory for impulsive problems / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // *Russian Mathematical Surveys.* — 2008. — V. 63, iss. 1. — P. 109–153.
19. Pokornyi, Yu. V. On Stieltjes differentials on geometric graphs / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina // *Doklady Mathematics.* — 2008. — V. 78, iss. 3. — P. 877–879.
20. On the Euler and Jacobi differential equations for variational problems with impulse parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina, A. S. Ischenko // *Differential Equations.* — 2011. — V. 47, iss. 5. — P. 656–670.
21. Pokornyi, Yu. V. Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina // *Differential Equations.* — 2012. — V. 48, iss. 8. — P. 1103–1111.
22. A model of deformations of a discontinuous Stieltjes string with a nonlinear boundary condition / P. Raynaud de Fitte, M. Kamenskii, N.-Ch. Wong, M. Zvereva // *Journal of Nonlinear and Variational Analysis.* — 2021. — V. 5, iss. 5. — P. 737–759.
23. Savchuk, A. M. Operator group generated by a one-dimensional Dirac system / A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya // *Dokl. Math.* — 2023. — V. 108, iss. 3. — P. 490–492.
24. Savchuk, A. M. Equiconvergence of spectral decompositions for Sturm–Liouville operators with a distributional potential in scales of spaces / A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya // *Dokl. Math.* — 2021. — V. 103, iss. 1. — P. 47–49.
25. Savchuk, A. M. On the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of a one-dimensional Dirac operator / A. M. Savchuk // *Izv. Math.* — 2018. — V. 82, iss. 2. — P. 351–376.
26. Slavova, A. Modeling Natural Phenomena via Cellular Nonlinear Networks / A. Slavova, P. Zecca. — Cambridge Scholars Publishing, 2018. — 200 p.
27. Tverdy, M. Generalized differential equations in the space of regulated functions (Boundary value problems and controllability) / M. Tverdy // *Math. Bohem.* — 1991. — V. 116, iss. 3. — P. 225–244.
28. Tverdy, M. Differential and integral equations in the space of regulated functions / M. Tverdy // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.* — 2002. — V. 25. — P. 1–104.
29. Vladikina, V. E. Asymptotics of the solutions of the Sturm-Liouville equation with singular coefficients / V. E. Vladikina, A. A. Shkalikov // *Math. Notes.* — 2015. — V. 98, iss. 6. — P. 891–899.
30. Zavalishchin, S. T. Dynamic impulse systems. Theory and applications / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin // *Math. Appl., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht*, 1997. — 260 p.
31. Zvereva, M. A two-dimensional model of string deformations with a nonlinear boundary condition / M. Zvereva // *Journal of nonlinear and convex analysis.* — 2022. — V. 23, iss. 12. —

P. 2775–2793.

32. The deformations problem for the Stieltjes strings system with a nonlinear condition / M. Zvereva, M. Kamenskii, P. Raynaud de Fritte, Ch.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2023. — V. 7, iss. 2. — P. 291–308.

33. Zvereva, M. The problem of deformations of a singular string with a nonlinear boundary condition / M. Zvereva // Lobachevski Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45, iss. 1. — P. 555–568.

Зверева Маргарита Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: margz@rambler.ru

Тел.: +7(473)220-86-90

Zvereva Margarita Borisovna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of mathematical analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: margz@rambler.ru

Tel.: +7(473)220-86-90