УДК 511

О ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА РЕШЕТА БРУНА К ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.06.2023 г.

Аннотация. В работе с помощью метода решета Бруна получены оценка снизу и оценка сверху для числа элементов в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента с некоторыми условиями на аргумент. Доказаны теоремы 1 и 2 и получены оценки некоторых сумм, которые являются аналогами теорем, полученных А. А. Бухштабом для последовательности чисел вида $p + 2$, где p – простое число, $p \neq 2$.

Ключевые слова: последовательность, число, решето, полином, оценка.

ON THE APPLICATION OF THE BRUN SIEVE METHOD TO A POLYNOMIAL SEQUENCE

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. Using the Brun's sieve method, we obtain a lower bound and an upper bound for the number of elements in a finite sequence of values of an irreducible polynomial in a natural argument with some conditions on the argument. Theorems 1 and 2 are proved and estimates are obtained for some sums, which are analogs of the theorems obtained by A. A. Bukhshtab for the sequence of numbers of the form $p + 2$, p is prime number, $p \neq 2$.

Keywords: sequence, number, sieve, polynomial, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Решение классических задач теории чисел привело к созданию новых методов в теории чисел: аналитический метод, метод тригонометрических сумм, круговой метод, метод решета и другие. Метод решета Эратосфена (276 – 196 гг. до нашей эры) усовершенствовал в 1918 г. Вигго Брун (1885 – 1978). Он заменил процесс полного высеивания другим, неполным. При этом высеивании остаются не только простые числа, но и составные числа с ограниченным количеством простых делителей. Такие числа называют почти простыми числами (r-почти простое число, $r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$).

В настоящей работе метод решета Бруна применяется к полиномиальной последовательности для получения оценок снизу и сверху числа элементов в конечной последовательности значений неприводимого полинома от натурального аргумента с некоторыми условиями на аргумент. Доказаны теоремы 1 и 2 и получены оценки некоторых сумм, которые являются аналогами теорем, полученных А. А. Бухштабом (1905 – 1990) для последовательности чисел вида $p + 2$, где p – простое число, $p \neq 2$.

Определим последовательность A следующим образом:

$$A := \{\Phi(n)|\ n \leqslant x\}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}$, $x > 1$, $\Phi(n)$ – неприводимый полином натуральной степени g с целыми коэффициентами; последовательность A_d определена таким образом:

$$A_d := \{\Phi(n) |\ \Phi(n) \in A, \Phi(n) \equiv 0 \pmod d\}, \tag{2}$$

где $d,n \in \mathbf{N}$, d – свободно от квадратов, то есть $\mu(d) \neq 0$, $\mu(d)$ – функция Мебиуса,

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, \textit{ если } \quad n = 1, \\ (-1)^s, \textit{ если } \quad n = p_1 p_2 ... p_s, \\ 0, \textit{ если } n \vdots p^2, \end{cases}$$

$n,s \in \mathbf{N}, p_1,p_2,..p_3$ – попарно различные положительные простые числа, p – положительное простое число. Число элементов последовательности A_d обозначим через $|A_d|$. При $d = 1$ получим, что $|A_1| = |A|$. Число элементов последовательности A_d, не имеющих простых делителей, меньших z, обозначим через $S(A_d; z)$:

$$S(A_d; z) := \Big|\{\Phi(n) \in A_d |\ p_n \geqslant z\}\Big|, \tag{3}$$

где p_n – наименьший простой делитель $\Phi(n)$.

Получим оценку снизу и оценку сверху величины $S(A_d; z)$. Оценки такого типа ранее были получены А. А. Бухштабом в работе [1] (теоремы В, Г) для случая, когда последовательность представляет собой последовательность чисел вида $p + 2$ (p – простое число, $p \neq 2$). Будем применять метод решета Бруна, рассмотренный в работе [2].

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $\rho(d)$ число различных по mod d решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (\text{mod } d)$. Относительно функции ρ известно, что она является мультипликативной, поэтому $\rho(d) = \prod_{p|d} \rho(p)$, где $\mu(d) \neq 0$. Кроме того, по теореме Лагранжа $\rho(d) \leqslant g$ или $\rho(p) = p$. Предположим, что $\Phi(n)$ не имеет фиксированных простых делителей, то есть $\rho(p) < p$ для всех p. Пусть X – приближение к $|A|$, $\frac{\omega(d)}{d}X$ – приближение к $|A_d|$, где $\omega(d)$ – некоторая мультипликативная функция, $|R(X,d)| := |\,|A_d| - \frac{\omega(d)}{d}X|$. Тогда

$$|A_d| = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Phi(n) \equiv 0 \pmod d}} 1 = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ \Phi(m) \equiv 0 \pmod d}} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv m \pmod d}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ \Phi(m) \equiv 0 \pmod d}} \left(\frac{x}{d} + \theta\right) = \rho(d) \left(\frac{x}{d} + \theta\right), \ |\theta| \leqslant 1.$$

Следовательно, выберем $X = x$, $\omega(d) = \rho(d)$. Поэтому $|R(X,d)| = |\theta\rho(d)| = |\theta|\rho(d) \leqslant \omega(d)$.

Теорема 1. Пусть последовательности A, A_d определены равенствами (1), (2) и $S(A_d,z)$ – равенством (3). Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$S\left(A_q; \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) > \frac{\rho(q)}{q} K \lambda(\alpha') \frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln q} - x^{1-\varepsilon},$$

где

$$K = \frac{\bar{e}^{\,\gamma}}{2} \prod_{p < \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}} \frac{1 - (\rho(p)/p)}{1 - (1/p)} \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p - 1}\right), \tag{4}$$

$$\lambda(\alpha') = \alpha'\{1 - \ln h_0 - \frac{5}{24}h_0 \ln^4 h_0 - \frac{e^2(e^2-5)h_0^2 \ln^6 h_0}{8(4 - e^2 h_0 \ln^2 h_0)}\},$$

$$q < x^{\nu g}; \varepsilon > 0; \nu g = 1 - \varepsilon, 0 < \nu < 1, 1 < h < h_0 < e, \alpha' = \frac{h+1}{h-1} \geqslant 3.$$

Теорема 2. Пусть последовательности A, A_d определены равенствами (1), (2) и $S(A_d,z)$ – равенством (3). Тогда имеет место следующая оценка сверху:

$$S\left(A_q; \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) < \frac{\rho(q)}{q} K\Lambda(\alpha') \frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln q} + x^{1-\varepsilon},$$

где K определено равенством (4), $\varepsilon > 0$, $\nu g \leqslant 1 - \varepsilon$.

$$\Lambda(\alpha') := \alpha' \left\{1 + \ln h_0 + \frac{5}{24}h_0 \ln^4 h_0 + \frac{e^2(e^2-5)h_0^2 \ln^6 h_0}{8(4 - e^2 h_0 \ln^2 h_0)}\right\},$$

$$0 < \nu < 1, \ 1 < h < h_0 < e, \ \alpha' = \frac{h+1}{h-1} \geqslant 3, \ q < x^{\nu g}.$$

Отметим, что $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$ – функции в методе решета.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем условие для некоторой мультипликативной функции $\omega(n)$, $\omega(n) = O(1)$: существуют постоянная $C_2' \geqslant 1$ и параметр $L \geqslant 1$, такие, что

$$-L \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leqslant C_2', \tag{5}$$

где L не зависит от u и v ($2 \leqslant u \leqslant v$).

Лемма 1. *Пусть p – простое, $\omega(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условию (5), $\omega(p) < p$ для всех p, $z \geqslant 2$. Тогда имеет место оценка:*

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B_1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

где B_1 – некоторая постоянная.

Следствие 1.

$$\sum_{z<p\leqslant z^h} \frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right), \quad \prod_{z<p\leqslant z^h}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{c}{h}\left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, C – постоянная.

Следствие 2.

$$\sum_{p\leqslant z,\, p\,\|q} \frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B_1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right), \quad \sum_{\substack{z<p\leqslant z^h \\ p\,\|q}} \frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

$$\prod_{\substack{z<p\leqslant z^h \\ p\,\|q}}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{C_1}{h}\left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, $q < z$, B_1, C_1 *– постоянные.*

Следствие 3. *При* $2 \leqslant u \leqslant v$

$$\sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \leqslant \ln \frac{\ln v}{\ln u} + \frac{C_2'}{\ln w}.$$

Доказательство леммы 1 и следствий 1–3 приведено в работе [3] (гл. 1, лемма 1.2.1).

Лемма 2.

$$\prod_{p \leqslant z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln z} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right),$$

где $z \geqslant 2$, γ *– постоянная Эйлера,* p *–простое число.*

Доказательство. Введем обозначение: $Y := \prod_{p \leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Применяя основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов, получим для Y :

$$Y = e^{\ln Y} = \exp\left(\ln \prod_{p \leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \exp\left(\sum_{p \leqslant z}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)\right).$$

Преобразуем теперь показатель, разложив $\ln(1 - 1/p)$ по формуле:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots, \quad x < 1.$$

При $x = 1/p$ получим, что

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \ldots.$$

Поэтому будем иметь:

$$\sum_{p \leqslant z}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \sum_{p \leqslant z}\left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \ldots\right) = -\left(\sum_{p \leqslant z}\frac{1}{p} + \sum_{p \leqslant z}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)\right) =$$

$$= -\left(\sum_{p \leqslant z}\frac{1}{p} + \sum_{p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right) - \sum_{p > z}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)\right).$$

Учитывая теперь, что

$$\sum_{p > z}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right) = O\left(\sum_{p > z}\frac{1}{p^2}\right) = O\left(\sum_{n > z}\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

получим:

$$\sum_{p \leqslant z}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = -\left(\sum_{p \leqslant z}\frac{1}{p} + \sum_{p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)\right) + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Применим теперь оценку:

$$\sum_{p \leqslant z}\frac{1}{p} = \ln\ln z + B + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{6}$$

Учитывая, что

$$O\left(\frac{1}{z}\right) + O\left(\frac{1}{\ln z}\right) = O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

получим:

$$\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=-\left(\ln\ln z+B+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)+O\left(\frac{1}{\ln z}\right).$$

Следовательно,

$$Y=\exp\left(\sum_{p\leqslant z}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\right)=\exp\left(-\ln\ln z\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\left(B+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\,...\right)\right)\right)\cdot\exp\left(O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right).$$

Но

$$\exp\left(-\ln\ln z\right)=\exp\left(\ln(\ln z)^{-1}\right)=(\ln z)^{-1}=\frac{1}{\ln z}.$$

Запись вида $f=O(g)$ означает, что существует постоянная $C>0$, такая, что $(|f|\leqslant C\,|g|)$. Кроме того, имеет место разложение:

$$e^x=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+...,$$

отсюда при $x=1/\ln z$ получим разложение:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{\ln z}+\frac{1}{2\,!\ln^2 z}+...=1+\frac{1}{\ln z}+O\left(\frac{1}{\ln z}\right)=1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

поэтому

$$\exp\left(O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right)=1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right).$$

Заметим еще, что постоянная B оценки (6) и постоянная Эйлера γ связаны между собой равенством ([4], с. 35):

$$B=\gamma+\sum_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right),$$

а отсюда получим, что

$$\gamma=B-\sum_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)=B+\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\right).$$

Таким образом, получим окончательно для Y, $Y:=\prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)$:

$$Y=\frac{1}{\ln z}\cdot e^{-\gamma}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right).$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Имеем:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0\pmod q\\ p_n\geqslant p_{r+1}}}1=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0\pmod q\\ p_n\geqslant p_r}}1-\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0\pmod{p_{r+1}}\\ p_n\geqslant p_r}}1,$$

где $p_i \mid q$, $i = 1, 2, ..., r$, $r \in \mathbf{N}$,

$$p_1, ..., p_r < \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}, \ \ p_{r+1} \geqslant \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}.$$

Пусть $r_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, ..., n$, $r = r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n \geqslant 1$, $a, b, c, \delta, \dots, \lambda, \mu \in \mathbf{N}$, $a > b > c > \delta > ... > \lambda > \mu$, тогда

$$S\left(A_q; \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) > \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod q}} 1 - \sum_{a\leqslant r} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_a}}} 1 +$$

$$+ \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_ap_b}}} - \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{c<r_1} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_ap_bp_c}}} 1 +$$

$$+ \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{c<r_1} \sum_{\delta\leqslant r_2} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_ap_bp_cp_\delta}}} 1 - \cdots$$

$$\cdots + \overbrace{\sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \cdots \sum_{\lambda\leqslant r_n}}^{2n} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_ap_b...p_\lambda}}} 1 -$$

$$- \overbrace{\sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \cdots \sum_{\lambda\leqslant r_n} \sum_{\mu<r_n}}^{2n+1} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod {qp_ap_b...p_\lambda p_\mu}}} 1.$$

Следуя примеру 3 из работы [5], получим теперь, что

$$x \ - \textit{приближение} \sum_{n\leqslant x} 1, \quad \frac{\rho(d)}{d} x \ - \ \textit{приближение} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Phi(n)\equiv 0 \pmod d}} 1,$$

где $d \in \mathbf{N}$, $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ – функция Мебиуса).

Следовательно,

$$S\left(A_q; \left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) > \frac{\rho(q)}{q} xE - R,$$

где

$$E = 1 - \sum_{a\leqslant r} \frac{\rho(p_a)}{p_a} + \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \frac{\rho(p_ap_b)}{p_ap_b} - \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{c<r_1} \frac{\rho(p_ap_bp_c)}{p_ap_bp_c} +$$

$$+ \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{c<r_1} \sum_{\delta\leqslant r_2} \frac{\rho(p_ap_bp_cp_\delta)}{p_ap_bp_cp_\delta} - \cdots + \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \cdots \sum_{\lambda\leqslant r_n} \frac{\rho(p_ap_b\cdots p_\lambda)}{p_ap_b\cdots p_\lambda} -$$

$$- \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \cdots \sum_{\lambda\leqslant r_n} \sum_{\mu<r_n} \frac{\rho(p_ap_b\cdots p_\lambda p_\mu)}{p_ap_b\cdots p_\lambda p_\mu},$$

а R удовлетворяет неравенству

$$R < q \left\{ 1 + \sum_{a\leqslant r} \rho(p_a) + \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \rho(p_ap_b) + \sum_{a\leqslant r} \sum_{b\leqslant r_1} \sum_{c<r_1} \rho(p_ap_bp_c) + \right.$$

$$+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r_1}\sum_{c<r_1}\sum_{\delta\leqslant r_2}\rho(p_ap_bp_cp_\delta)+\cdots$$

$$\left.\cdots+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r_1}\cdots\sum_{\lambda\leqslant r_n}\rho(p_ap_b\cdots p_\lambda)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r_1}\cdots\sum_{\lambda\leqslant r_n}\sum_{\mu<r_n}\rho(p_ap_b\cdots p_\lambda p_\mu)\right\}.$$

1. Получим оценку для R.

$$R<q\left(1+\sum_{a\leqslant r}\rho(p_a)\right)\left(1+\sum_{b\leqslant r_1}\rho(p_b)\right)\left(1+\sum_{c\leqslant r_1-1}\rho(p_c)\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1+\sum_{\lambda\leqslant r_n}\rho(p_\lambda)\right)\left(1+\sum_{\mu\leqslant r_n-1}\rho(p_\mu)\right)\leqslant$$

$$\leqslant q\left(1+\sum_{a\leqslant r}g\right)\left(1+\sum_{b\leqslant r_1}g\right)\left(1+\sum_{c\leqslant r_1-1}g\right)\cdots\left(1+\sum_{\lambda\leqslant r_n}g\right)\left(1+\sum_{\mu\leqslant r_n-1}g\right)\leqslant$$

$$\leqslant q(1+gr)(1+gr_1)(1+g(r_1-1))\cdots(1+gr_n)(1+g(r_n-1))\leqslant$$

$$\leqslant q(1+gr)(1+gr_1)^2(1+gr_2)^2\cdots(1+gr_n)^2\leqslant qp_rp_{r_1}^2p_{r_2}^2\cdots p_{r_n}^2.$$

Здесь воспользовались тем, что по теореме Лагранжа $\rho(p)\leqslant g$ и по теореме Чебышева $p_r>Cr\ln r$, $C=\mathrm{const}$.

По следствию 1 леммы 1, согласно которому

$$\sum_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|\,q}}\frac{\rho(p)}{p}=\ln h+O\left(\frac{L}{\ln z}\right),\qquad \sum_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|\,q}}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)=\frac{C}{h}\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

$h>1$, $C=\mathrm{const}$, получим, что при $1<h<h_0<e$ существует $z_0\leqslant\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}$, начиная с которого

$$\sum_{\substack{z_0<p\leqslant z_0^h\\ p\,\|\,q}}\frac{\rho(p)}{p}<\ln h_0,\qquad \prod_{\substack{z_0<p\leqslant z_0^h\\ p\,\|\,q}}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)>\frac{1}{h_0}.$$

Пусть p_{r_1} – наибольшее простое число, такое, что $z_0\leqslant p_{r_1}\leqslant p_r^{1/h}$, p_{r_2} – наибольшее простое число с условием $z_0\leqslant p_{r_2}\leqslant p_r^{1/h^2}$, ...
Если p_{r_k} –наименьшее простое число, для которого $z_0\leqslant p_{r_k}\leqslant p_r^{1/h_k}$, то получим

$$0<\sigma_1=\sum_{r_1+1\leqslant\nu\leqslant r}\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}<\ln h_0,\qquad \pi_1=\prod_{r_1+1\leqslant\nu\leqslant r}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right)>\frac{1}{h_0},$$

$$0<\sigma_2=\sum_{r_2+1\leqslant\nu\leqslant r_1}\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}<\ln h_0,\qquad \pi_2=\prod_{r_2+1\leqslant\nu\leqslant r_1}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right)>\frac{1}{h_0},$$

$$\ldots,\qquad\qquad \ldots,$$

$$0<\sigma_k=\sum_{r_k+1\leqslant\nu\leqslant r_{k-1}}\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}<\ln h_0,\quad \pi_k=\prod_{r_k+1\leqslant\nu\leqslant r_{k-1}}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right)>\frac{1}{h_0}.$$

Обозначим через $p_{r_{k+1}}$ наибольшее простое число $<z_0$, тогда

$$0<\sigma_{k+1}=\sum_{r_{k+1}+1\leqslant\nu\leqslant r_k}\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}<\ln h_0,$$

$$\pi_{k+1} = \prod_{r_{k+1}+1\leqslant\nu\leqslant r_k} \left(1 - \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0}.$$

Продолжим систему индексов уже независимо от p_r, подбирая их так, чтобы выполнялись неравенства:

$$0 < \sigma_{k+2} = \sum_{r_{k+2}+1\leqslant\nu\leqslant r_{k+1}} \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu} < \ln h_0,$$

$$\pi_{k+2} = \prod_{r_{k+2}+1\leqslant\nu\leqslant r_{k+1}} \left(1 - \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0},$$

$$\cdots, \qquad\qquad \cdots,$$

$$0 < \sigma_n = \sum_{r_n+1\leqslant\nu\leqslant r_{n-1}} \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu} < \ln h_0, \qquad \pi_n = \prod_{r_n+1\leqslant\nu\leqslant r_{n-1}} \left(1 - \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0},$$

$$0 < \sigma_{n+1} = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant r_n} \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu} < \ln h_0, \qquad \pi_{n+1} = \prod_{1\leqslant\nu\leqslant r_n} \left(1 - \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0},$$

где $r_{n+1} = 0$.
Следовательно, простые числа удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\rho(p)}{p} < \ln h_0, \quad 1 - \frac{\rho(p)}{p} > \frac{1}{h_0}.$$

Простые числа $p_{r_{k+1}}, p_{r_{k+2}}, \dots, p_{r_n}$ не зависят от p_r, а только от констант h и h_0.

Таким образом,

$$R < q\, p_r\, p_r^{\frac{2}{h}}\, p_r^{\frac{2}{h^2}} \cdots p_r^{\frac{2}{h^2}}\, p_{r_{k+1}}^2\, p_{r_{k+2}}^2 \cdots p_{r_n}^2 \leqslant$$

$$\leqslant q\, p_r\, p_r^{\frac{2/h}{1-1/h}} = q\, p_r^{\frac{h+1}{h-1}} < q\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha'}\cdot\frac{h+1}{h-1}} = q\frac{x^{\nu g}}{q} = x^{\nu g} \leqslant x^{1-\varepsilon},$$

так как $\alpha' = (h+1)/(h-1)$ и $0 < \nu < 1$ по условию теоремы.

Поэтому для R получим оценку:

$$R << x^{1-\varepsilon}.$$

2. Получим оценку для E.

Отдельные слагаемые из E объединим в группы в зависимости от числа своих сомножителей. Обозначим через $E^{(i)}$ i –тую сумму в E, тогда получим

$$E = 1 - E^{(1)} + E^{(2)} - \cdots + E^{(2n)} - E^{(2n+1)}.$$

Пусть E_m – сумма всех членов в E, простые множители которых $> p_m$, тогда

$$E_m = 1 - E_m^{(1)} + E_m^{(2)} - \cdots + E_m^{(2m-2)} - E_m^{(2m-1)}.$$

Слагаемые из $E_m^{(i)}$ все встречаются в $E^{(i)}$; $E_{n+1} = E$.

Для перехода от E_m к E_{m+1} введем элементарно- симметрические функции величин

$$\frac{\rho(p_{r_{m+1}+1})}{p_{r_{m+1}+1}}, \frac{\rho(p_{r_{m+1}+2})}{p_{r_{m+1}+2}}, \dots, \frac{\rho(p_{r_m-1})}{p_{r_m-1}}, \frac{\rho(p_{r_m})}{p_{r_m}};$$

обозначим их $S_{m+1}^{(1)}, S_{m+1}^{(2)}, \dots, S_{m+1}^{(i)}, \dots$, так что $S_{m+1}^{(i)}$ содержит те члены E, которые содержат i простых множителей, но все они заключены в интервале $(p_{r_{m+1}}, p_{r_m})$,

$$E_{m+1} = 1 - E_{m+1}^{(1)} + E_{m+1}^{(2)} - \cdots + E_{m+1}^{(2m)} - E_{m+1}^{(2m+1)}.$$

Для образования E_{m+1} надо учесть следующие возможности:
1) все индексы $i \leqslant r_m$, сумма таких членов есть $S_{m+1}^{(i)}$;
2) только первый индекс больше r_m, сумма будет $E_m^{(1)} S_{m+1}^{(i-1)}$;
3) первые два индекса $> r_m$, получим сумму $E_m^{(2)} S_{m+1}^{(i-2)}$;
... ;
$i+1$) все индексы $i > r_m$, получим сумму $E_m^{(i)}$.

Если есть $i > 2m-1$, то встретятся возможности $1) - 2m)$.

$$E_{m+1}^{(i)} = S_{m+1}^{(i)} + E_m^{(i)} S_{m+1}^{(i-1)} + E_m^{(2)} S_{m+1}^{(i-2)} + \cdots + E_m^{(i)},$$

где в правой части после $(2m)$ – го члена сумма обрывается.

$$\begin{gathered}E_{m+1} = 1 - \left(S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(1)}\right) + \left(S_{m+1}^{(2)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(2)}\right) - \cdots \\ \cdots - \\ - \left(S_{m+1}^{(2m-1)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m-2)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(2m-1)}\right) + \\ + \left(S_{m+1}^{(2m)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m-1)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(2)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(1)}\right) - \\ - \left(S_{m+1}^{(2m+1)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(3)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(2)}\right).\end{gathered}$$

Сравним E_{m+1} с произведением

$$\begin{gathered}E_m \cdot \prod_{r_{m+1}+1 \leqslant \nu \leqslant r_m} \left(1 - \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) = \\ = \left(1 - E_m^{(1)} + E_m^{(2)} - \cdots + E_m^{(2m-2)} - E_m^{(2m-1)}\right) \times \\ \times \left(1 - S_{m+1}^{(1)} + S_{m+1}^{(2)} - \cdots\right) = \\ = \left\{1 - \left(S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(1)}\right) + \left(S_{m+1}^{(2)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(2)}\right) - \cdots \right. \\ \cdots - \\ - \left(S_{m+1}^{(2m-1)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m-2)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(1)} + E_m^{(2m-1)}\right) + \\ + \left(S_{m+1}^{(2m)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m-1)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(2)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(1)}\right) - \\ \left. - \left(S_{m+1}^{(2m+1)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(3)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(2)}\right)\right\} + \\ + \left(S_{m+1}^{(2m+2)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m+1)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(4)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(3)}\right) - \\ - \cdots = E_{m+1} + \\ + \left(S_{m+1}^{(2m+2)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m+1)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(4)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(3)}\right) - \cdots; \\ E_m \cdot \pi_{m+1} = E_{m+1} + \Phi_{m+1} - \cdots,\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_{m+1} = S_{m+1}^{(2m+2)} + E_m^{(1)} S_{m+1}^{(2m+1)} + \cdots + E_m^{(2m-2)} S_{m+1}^{(4)} + E_m^{(2m-1)} S_{m+1}^{(3)}; \\ E_{m+1} = E_m \pi_{m+1} - \Phi_{m+1} + \cdots,\end{gathered}$$

следовательно, $E_{m+1} > E_m\pi_{m+1} - \Phi_{m+1}$, в предположении, что

$$1 > S^{(1)}_{m+1} > S^{(2)}_{m+1} > \cdots > S^{(i)}_{m+1} > S^{(i+1)}_{m+1}.$$

Для элементарных симметрических функций $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... $S(t)$ от t различных положительных величин имеют место неравенства

$$\frac{S^{(1)}}{t} > \frac{2S^{(2)}}{(t-1)S^{(1)}} > \frac{3S^{(3)}}{(t-2)S^{(2)}} > \cdots > \frac{tS^{(t)}}{1\cdot S^{(t-1)}}.$$

(Их можно получить, вводя полином $f(x) = x^t - S^{(1)}x^{t-1} + S^{(2)}x^{t-2} - \cdots \pm S^{(t)}$
и применяя к нему и его производным теорему Ролля, согласно которой $(\exists\, c)(f'(c) = 0)$).

Из этих неравенств следует, что

$$S^{(1)} > \frac{S^{(2)}}{S^{(1)}} > \frac{S^{(3)}}{S^{(2)}} > \cdots > \frac{S^{(t)}}{S^{(t-1)}},$$

а если $S^{(1)} < 1$, то $1 > S^{(1)} > S^{(2)} > \cdots > S^{(t)}$;
кроме того,

$$S^{(i)} < \frac{(S^{(1)})^i}{i!},\ \ i \geqslant 2$$

(действительно, если $i = 2$, то

$$S^{(2)} < \frac{(S^{(1)})^2(t-1)}{2t} < \frac{(S^{(1)})^2}{2};$$

пусть верно для $i = 1:$

$$S^{(i-1)} < \frac{(S^{(1)})^{i-1}}{(i-1)!},$$

тогда из неравенства

$$\frac{S^{(1)}}{t} > \frac{tS^{(t)}}{1\cdot S^{(t-1)}}$$

получим

$$S^{(t)} < \frac{S^{(1)}S^{(t-1)}}{t^2} < \frac{S^{(1)}S^{(t-1)}}{t}, \quad S^{(i)} < \frac{S^{(1)}S^{(i-1)}}{i} < \frac{S^{(1)}(S^{(1)})^{i-1}}{i(i-1)!} = \frac{(S^{(1)})^i}{i!},$$

следовательно, неравенство справедливо для всех $i \geqslant 2$).

Условие $S^{(1)} < 1$ выполнено, так как нами выбраны индексы r_m так, что для каждого m будет $\sigma_m < 1$.

Теперь из неравенства $E_{m+1} > E_m\pi_{m+1} - \Phi_{m+1}$ получим

$$E_2 > E_1\pi_2 - \Phi_2 = \pi_2\left(E_1 - \frac{\Phi_2}{\pi_2}\right) > \pi_2(E_1 - h_0\Phi_2);$$

$$\pi_1 < 1,\ \ E_2 > \pi_1\pi_2(E_1 - h_0\Phi_2);$$

$$E_3 > E_2\pi_3 - \Phi_3 > \pi_3(E_2 - h_0\Phi_3) > \pi_3\Big(\pi_2(E_1 -$$

$$-h_0\Phi_2) - h_o\Phi_3\Big) > \pi_2\pi_3(E_1 - h_o\Phi_2 - h_0^2\Phi_3) > \pi_1\pi_2\pi_3(E_1 - h_0\Phi_2 - h_0^2\Phi_3);$$

...

$$E = E_{n+1} > \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1}(E_1 - h_0\Phi_2 - h_0^2\Phi_3 - \cdots - h_0^n\Phi_{n+1}).$$

Оценим Φ_{m+1}. Пусть $\tau = \ln h_0$.

$$S_{m+1}^{(1)} = \sum_{r_{m+1}+1\leqslant\nu\leqslant r_m} \frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu} < \ln h_0 = \tau; \quad S_{m+1}^{(1)} < \tau; \quad S_{m+1}^{(i)} < \frac{\tau^i}{i!};$$

$$\Phi_{m+1} < \frac{\tau^{2m+2}}{(2m+2)!} + E_m^{(1)}\frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots + E_m^{(2m-2)}\frac{\tau^4}{4!} + E_m^{(2m-1)}\frac{\tau^3}{3!};$$

$$E_{m+1}^{(i)} < \frac{\tau^i}{i!} + E_m^{(1)}\frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + E_m^{(i-1)}\frac{\tau}{1!} + E_m^{(i)};$$

$$i=1,\, E_{m+1}^{(1)} < \tau + E_m^{(1)}; \quad E_1^{(1)} < \tau; \quad E_2^{(1)} < 2\tau, \ldots, E_m^{(1)} < m\tau.$$

$$m=1,\, \Phi_2 < \frac{\tau^4}{4!} + E_1^{(1)}\frac{\tau^3}{3!} < \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^4}{3!} = \frac{5\tau^4}{4!}; \;\; \Phi_2 < \frac{5\tau^4}{4!}.$$

Для фиксированного m_0 выбираем c_0 и k так, чтобы было выполнено неравенство:

$$E_{m_0}^{(i)} < c_0(\tau k)^i, \;\; i = 1,2,\ldots,(2m_0-1).$$

$$E_{m_0+1}^{(i)} < \frac{\tau^i}{i!} + E_{m_0}^{(1)}\frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + E_{m_0}^{(i-1)}\frac{\tau}{1!} + E_{m_0}^{(i)} <$$

$$< \frac{\tau^i}{i!} + c_0(\tau k)^i\left\{\frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!(\tau k)^{i-1}} + \cdots + \frac{\tau}{1!(\tau k)} + 1\right\} =$$

$$= \frac{\tau^i}{i!} + c_0(\tau k)^i\left\{\frac{(1/k)^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + \frac{1/k}{1!} + 1\right\};$$

$$E_{m_0+1}^{(i)} < c_0(\tau k)^i e^{1/k};$$

$$E_m^{(i)} < c_0(\tau k)^i e^{\frac{m-m_0}{k}},\, m \geqslant m_0.$$

$$\Phi_{m+1} < \frac{\tau^{2m+2}}{(2m+2)!} + c_0(\tau k)^{2m+2}e^{\frac{m-m_0}{k}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!(\tau k)^{2m+1}} + \cdots + \frac{\tau^3}{3!(\tau k)^3}\right\} =$$

$$= \frac{\tau^{2m+2}}{(2m+2)!} + c_0(\tau k)^{2m+2}e^{\frac{m-m_0}{k}}\left\{\frac{(1/k)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots + \frac{(1/k)^3}{3!}\right\} <$$

$$< c_0(\tau k)^{2m+2}e^{\frac{m-m_0}{k}}\left\{e^{1/k} - \frac{(1/k)^2}{2!} - \frac{1/k}{1!} - 1\right\}.$$

$$\Phi_{m+1} < c_0(\tau k)^{2m+2}e^{\frac{m-m_0}{k}}\left\{e^{1/k} - \frac{(1/k)^2}{2} - \frac{1}{k} - 1\right\}.$$

Таким образом, при $k = 1/2$

$$E = E_{n+1} > \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1}\Bigg(E_1 - h_0\Phi_2 - h_0^2\Phi_3 - \cdots$$

$$\cdots - h_0^{m_0}\Phi_{m_0+1} - \frac{h_0^{m_0+1}c_0\left(\dfrac{\ln h_0}{2}\right)^{2m_0+1}e^2(e^2-5)}{1 - \left(\dfrac{\ln h_0\cdot e}{2}\right)^2 h_0}.$$

Пусть $c_0 = 2$, $m_0 = 1$, тогда

$$E > \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1}\left(E_1 - h_0\Phi_2 - \frac{2h_0\left(\frac{\ln h_0}{2}\right)^6 e^2(e^2-5)}{1-\left(\frac{\ln h_0\cdot e}{2}\right)^2 h_0}\right);$$

$$E_1 = 1 - E_1^{(1)} > 1 - \ln h_0;\quad \Phi_2 < \frac{5(\ln h_0)^4}{4!};$$

$$E_1 - h\Phi_2 > 1 - \ln h_0 - \frac{5}{24}h_0(\ln h_0)^4;$$

$$E > \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1}\left(1 - \ln h_0 - \frac{5}{24}h_0(\ln h_0)^4 - \frac{e^2(e^2-5)h_0^2(\ln h_0)^6}{8(4-e^2h_0(\ln h_0)^2)}\right).$$

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1} = \prod_{r_1+1\leqslant\nu\leqslant r}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right)\prod_{r_2+1\leqslant\nu\leqslant r_1}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right)\cdots$$

$$\cdots\prod_{1\leqslant\nu\leqslant r_n}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) = \prod_{1\leqslant\nu\leqslant r}\left(1-\frac{\rho(p_\nu)}{p_\nu}\right) = \prod_{\substack{2<p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\\ p\,\|\,q}}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right) =$$

$$= \prod_{\substack{2<p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\\ p\,\|\,q}}\frac{1-(\rho(p)/p)}{1-(1/p)}\prod_{\substack{2<p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\\ p\,\|\,q}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Но по лемме 2

$$\prod_{p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln\frac{x^{\nu g}}{q}}\right)\right),$$

поэтому

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1} \geqslant \prod_{\substack{p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\\ p\,\|\,q}}\frac{1-(\rho(p)/p)}{1-(1/p)}\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\frac{\alpha'\cdot e^{-\gamma}\cdot(1/2)}{\ln\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)} =$$

$$= K\frac{\alpha'}{\ln x^{\nu g} - \ln q},$$

следовательно,

$$E > K\lambda(\alpha')\frac{1}{\ln x^{\nu g} - \ln q}.$$

Таким образом,

$$S\left(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) > \frac{\rho(q)}{q}K\lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln q} - x^{1-\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие.

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ p_n\geqslant x^{1/\alpha'}}} 1 > K_0\lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x} - x^{1-\varepsilon},$$

где

$$K_0 := \frac{e^{-\gamma}}{2}\prod_{p<x^{1/\alpha'}} \frac{1-\dfrac{\rho(p)}{p}}{1-\dfrac{1}{p}}. \tag{7}$$

Доказательство этого следствия непосредственно следует из теоремы 1 при $q = 1$, $\nu = (1-\varepsilon)/g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Следуя доказательству теоремы 1 и сохраняя обозначения, получим

$$S\left(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) < \frac{\rho(q)}{q}xE_1 + R_1,$$

где

$$E_1 = 1 - \sum_{a\leqslant r}\frac{\rho(p_a)}{p_a} + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\frac{\rho(p_ap_b)}{p_ap_b} -$$

$$-\sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\sum_{c\leqslant r_1}\frac{\rho(p_ap_bp_c)}{p_ap_bp_c} + \cdots + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\cdots\sum_{t\leqslant r_n}\frac{\rho(p_ap_b\cdots p_t)}{p_ap_b\cdots p_t},$$

а R_1 удовлетворяет неравенству:

$$R_1 < q\left\{1 + \sum_{a\leqslant r}\rho(p_a) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\rho(p_ap_b) + \right.$$

$$\left. + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\sum_{c\leqslant r_1}\rho(p_ap_bp_c) + \cdots + \sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant r}\cdots\sum_{t\leqslant r_n}\rho(p_ap_b\cdots p_t)\right\}.$$

Далее получим оценки для E_1 и R_1 :

$$E_1 < \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1}\times$$

$$\times\left(1 + \ln h_0 + \frac{5}{24}h_0(\ln h_0)^4 + \frac{e^2(e^2-5)h_0^2\ln^6 h_0}{8(4-e^2 h_0 \ln^2 h_0)}\right),$$

$$R_1 << x^{1-\varepsilon}.$$

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n+1} = \prod_{\substack{p<\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'} \\ p\,\|\, q}}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right) = K\frac{\alpha'}{\ln x^{\nu g} - \ln q}$$

при $x \geqslant x_0$, следовательно,

$$E_1 < K\cdot\Lambda(\alpha')\frac{1}{\ln x^{\nu g} - \ln q}.$$

Таким образом,

$$S\left(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\right) < \frac{\rho(q)}{q}K\Lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln q} + x^{1-\varepsilon}.$$

Теорема 2 доказана.

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ СУММ

Рассмотрим некоторые приложения. Получим оценки трех сумм для $S(A_d;z)$, две из которых являются аналогами лемм 3 и 4 работы [1], доказанных А. А. Бухштабом для последовательности чисел вида $p+2$ (p – простое число, $p\neq 2$).

Теорема 3. *Пусть последовательности A, A_d определены равенствами (1), (2) и $S(A_d,z)$ – равенством (3), K_0 определено равенством (7). Тогда*

$$Y_1 := \sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p< x^{\nu g/\mu}} S\left(A_p; x^{\nu g/\delta}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_0\delta}{\nu g}\,\frac{x}{\ln x}\int\limits_{\delta(1-1/\mu)}^{\delta(1-1/\beta)}\frac{\Lambda(z)dz}{z(\delta-z)}+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Теорема 3 является аналогом леммы 3 работы [1].

Доказательство. Имеем:

$$x^{\nu g/\beta}\leqslant p\Longrightarrow\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{\ln p}{\nu g\ln x};\;\; p<x^{\nu g/\mu}\Longrightarrow\frac{\ln p}{\nu g\ln x}\leqslant\frac{1}{\mu};$$

$$0<\delta\left(1-\frac{1}{\mu}\right)<\delta\left(1-\frac{\ln p}{\nu g\ln x}\right)<\delta\left(1-\frac{1}{\beta}\right).$$

Применяя теорему 2, согласно которой

$$S\Bigg(A_q;\left(\frac{x^{\nu g}}{q}\right)^{1/\alpha'}\Bigg)<\frac{\rho(q)}{q}K\Lambda(\alpha')\frac{x}{\ln x^{\nu g}-\ln q}+x^{1-\varepsilon},$$

получим, заменяя $x^{\nu g/\delta}$ через

$$\left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{\dfrac{\nu g\ln x}{\delta(\ln x^{\nu g}-\ln p)}}:$$

$$S\Bigg(A_p;\left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{\dfrac{\nu g\ln x}{\delta\ln\frac{x^{\nu g}}{p}}}\Bigg)<\frac{\rho(p)}{p}K_0\Lambda\Bigg(\frac{\delta\ln\frac{x^{\nu g}}{p}}{\nu g\ln x}\Bigg)\frac{x}{\ln\frac{x^{\nu g}}{p}}+x^{1-\varepsilon},$$

$$Y_1<\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}1\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(p)}{p}K_0\Lambda\Bigg(\delta\bigg(1-\frac{\ln p}{\nu g\ln x}\bigg)\Bigg)\frac{x}{\ln x^{\nu g}-\ln p}+x^{1-\varepsilon}\right\}.$$

Рассмотрим величины

$$u_s=\mu+\frac{\beta-\mu}{u}s-1,\;\; s=0,1,\dots,n,\quad n=[\ln x],$$

$$s=0,\;u_0=\mu-1,\;\frac{\nu g}{u_s+1}=\frac{\nu g}{\mu},\;s=n,\;u_n=\beta-1,\;\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}=\frac{\nu g}{\beta},$$

$$\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}f(p)=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant n-1}\;\sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}}}}f(p),$$

$$\delta\left(1-\frac{\ln p}{\nu g\ln x}\right)\leqslant\delta\left(1-\frac{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}\ln x}{\nu g\ln x}\right)=\delta\left(1-\frac{1}{u_{s+1}+1}\right),$$
$$\frac{1}{\ln\frac{x^{\nu g}}{p}}<\frac{1}{\ln x^{\nu g}-\ln^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}=\frac{1}{\ln x^{\nu g}\left(1-\frac{1}{u_s+1}\right)}=\frac{1}{\nu g\ln x}\frac{u_s+1}{u_s};$$

тогда получим

$$Y_1\leqslant\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\ \sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}\left\{\frac{\rho(p)}{p}K_0\Lambda\left(\delta\left(1-\frac{1}{u_{s+1}+1}\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{x}{\nu g\ln x}\frac{u_s+1}{u_s}\right\}+\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}x^{1-\varepsilon}=$$
$$=K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\sum_{0\leqslant s\leqslant n+1}\frac{u_{s+1}}{u_s}\Lambda\left(\delta\left(1-\frac{1}{u_{s+1}+1}\right)\right)\times$$
$$\times\sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}\frac{\rho(p)}{p}+x^{1-\varepsilon}\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}1.$$

По лемме 1, согласно которой

$$\sum_{p\leqslant z}\frac{\rho(p)}{p}=\ln\ln z+B_1+O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

будем иметь

$$\sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p<x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}\frac{\rho(p)}{p}=\ln\frac{\ln x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}{\ln x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)=\ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

следовательно,

$$Y_1\leqslant K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\frac{u_s+1}{u_s}\Lambda\left(\delta\left(1-\frac{1}{u_{s+1}+1}\right)\right)\times$$
$$\times\left\{\ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}+O\left(\frac{x^{1-\varepsilon+\frac{\nu g}{\mu}}}{\ln x}\right)=$$
$$=K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\frac{u_s+1}{u_s}\Lambda\left(\delta\left(1-\frac{1}{u_{s+1}+1}\right)\right)\ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1}+$$
$$+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{x^{1-\varepsilon+\frac{\nu g}{\mu}}}{\ln x}\right)\leqslant$$
$$\leqslant K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\int_{\mu-1}^{\beta-1}\Lambda\left(\delta\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\right)\frac{du}{u}+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right)+O\left(\frac{x^{1-\varepsilon'}}{\ln x}\right);$$
$$\varepsilon'=\varepsilon-\frac{\nu g}{\mu},\ \ \frac{x^{1-\varepsilon'}}{\ln x}<\frac{x}{\ln^{3/2}x}\quad\text{при}\quad\varepsilon'>\frac{\ln\ln x}{2\ln x};$$

тогда

$$O\left(\frac{x^{1-\varepsilon'}}{\ln x}\right)=O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right);$$

пусть

$$\delta\left(1-\frac{1}{u+1}\right)=z,\ u+1=\frac{\delta}{\delta-z},\ u=\frac{z}{\delta-z},$$

$$du=\delta\frac{dz}{(\delta-z)^2},\ u\Big|_{\mu-1}^{\beta-1}\longrightarrow z\Big|_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})},$$

тогда получим

$$Y_1\leqslant K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\int\limits_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})}\Lambda(z)\frac{\delta dz}{(\delta-z)^2}\frac{\delta-z}{z}+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right)+$$

$$+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right)==K_0\frac{\delta x}{\nu g\ln x}\int\limits_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})}\Lambda(z)\frac{dz}{z(\delta-z)}+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Таким образом, получим оценку:

$$\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}S\left(A_p;x^{\nu g/\delta}\right)\leqslant$$

$$\leqslant K_0\frac{\delta}{\nu g}\frac{x}{\ln x}\int\limits_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})}\frac{\Lambda(z)}{z(\delta-z)}dz+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие. *Пусть* $1<\mu\leqslant\beta\leqslant\delta$, K_0 *определено равенством (7). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta}\leqslant p<x^{1/\mu}}S\left(A_p;x^{1/\delta}\right)\leqslant K_0\frac{\delta x}{\ln x}\int\limits_{\delta(1-\frac{1}{\mu})}^{\delta(1-\frac{1}{\beta})}\frac{\Lambda(z)}{z(\delta-z)}dz+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Доказательство следствия получим из теоремы 3 при $\nu=(1-\varepsilon)/g$.

Теорема 4. *Пусть последовательности* A, A_d *определены равенствами (1), (2) и* $S(A_d,z)$ *– равенством (3),* K_0 *определено равенством (7),* $1<\mu\leqslant\beta, 0<\nu<1$. *Тогда*

$$Y_2:=\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p<x^{\nu g/\mu}}S(A_p;p)\leqslant$$

$$\leqslant K_0\frac{x}{\nu g\ln x}\int\limits_{\mu-1}^{\beta-1}\Lambda(z)\frac{dz}{z}+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right).$$

Теорема 4 является аналогом леммы 4 работы [1].

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 3, получим

$$p=\left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{\dfrac{\ln p}{\ln\frac{x^{\nu g}}{p}}},\qquad S\left(A_p;\left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{\frac{\ln p}{\ln x^{\nu g}-\ln p}}\right)<$$

$$< \frac{\rho(p)}{p} K_0 \Lambda\left(\frac{\ln x^{\nu g} - \ln p}{\ln p}\right) \frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln p} + x^{1-\varepsilon};$$

$$Y_2 < \sum_{x^{\nu g/\beta} \leqslant p < x^{\nu g/\mu}} 1 \times \left\{ \frac{\rho(p)}{p} K_0 \Lambda\left(\frac{\ln x^{\nu g}}{\ln p} - 1\right) \frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln p} + x^{1-\varepsilon} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant s \leqslant n-1} \sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}} \leqslant p < x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}} \left\{ \frac{\rho(p)}{p} K_0 \Lambda(u_{s+1}) \frac{x}{\nu g \ln x} \frac{u_s + 1}{u_s} \right\} +$$

$$+ \sum_{x^{\nu g/\beta} \leqslant p < x^{\nu g/\mu}} x^{1-\varepsilon} =$$

$$= K_0 \frac{x}{\nu g \ln x} \sum_{0 \leqslant s \leqslant n-1} \frac{u_s + 1}{u_s} \Lambda(u_{s+1}) \left\{ \ln \frac{u_{s+1} + 1}{u_s + 1} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right\} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right) =$$

$$= K_0 \frac{x}{\nu g \ln x} \sum_{0 \leqslant s \leqslant n-1} \frac{u_s + 1}{u_s} \Lambda(u_{s+1}) \ln \frac{u_{s+1} + 1}{u_s + 1} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_0 \frac{x}{\nu g \ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \Lambda(u) \frac{du}{u} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right);$$

$$Y_2 \leqslant K_0 \frac{x}{\nu g \ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \Lambda(z) \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Теорема 4 доказана.

Следствие. *Пусть* $1 < \mu \leqslant \beta$, K_0 *определено равенством (7). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta} \leqslant p < x^{1/\mu}} S(A_p; p) \leqslant K_0 \frac{x}{\ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \Lambda(z) \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Доказательство следствия получим из теоремы 4 при $\nu = (1-\varepsilon)/g$.

Теорема 5. *Пусть последовательности* A, A_d *определены равенствами (1), (2) и* $S(A_d,z)$ *– равенством (3),* K_0 *определено равенством (7),* $1 < \mu \leqslant \beta, 0 < \nu < 1$. *Тогда*

$$Y_3 := \sum_{x^{\nu g/\beta} \leqslant p < x^{\nu g/\mu}} S\left(A_p; \left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{1/\delta}\right) \leqslant K_0 \Lambda(\delta) \frac{x}{\nu g \ln x} \int\limits_{\mu-1}^{\beta-1} \frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Доказательство. Имеем:

$$S\left(A_p; \left(\frac{x^{\nu g}}{p}\right)^{1/\delta}\right) < \frac{\rho(p)}{p} K_0 \Lambda(\delta) \frac{x}{\ln x^{\nu g} - \ln p} + x^{1-\varepsilon}.$$

Аналогично теореме 4 получим

$$Y_3 \leqslant \sum_{0 \leqslant s \leqslant n-1} \sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}} \leqslant p < x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}} \left\{ \frac{\rho(p)}{p} K_0 \Lambda(\delta) \frac{x}{\nu g \ln x} \times \right.$$

$$\times\frac{u_s+1}{u_s}\Bigg\} + \sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p < x^{\nu g/\mu}} x^{1-\varepsilon} =$$

$$= K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\nu g\ln x}\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\frac{u_s+1}{u_s}\sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p < x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}\frac{\rho(p)}{p} +$$

$$+x^{1-\varepsilon}\sum_{x^{\nu g/\beta}\leqslant p < x^{\nu g/\mu}} 1.$$

По лемме 1:

$$\sum_{p\leqslant z}\frac{\rho(p)}{p} = \ln\ln z + B + O\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

$$\sum_{x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}\leqslant p < x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}\frac{\rho(p)}{p} = \ln\frac{\ln x^{\frac{\nu g}{u_s+1}}}{\ln x^{\frac{\nu g}{u_{s+1}+1}}} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

$$Y_3 \leqslant K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\nu g\ln x}\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\frac{u_s+1}{u_s}\Bigg\{\ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1} +$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg\} + O\left(\frac{x^{1-\varepsilon+\frac{\nu g}{\mu}}}{\ln x}\right) = K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\nu g\ln x}\times$$

$$\times\sum_{0\leqslant s\leqslant n-1}\frac{u_s+1}{u_s}\ln\frac{u_{s+1}+1}{u_s+1} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{x^{1-\varepsilon'}}{\ln x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\nu g\ln x}\int\limits_{\mu-1}^{\beta-1}\frac{du}{u} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right) + O\left(\frac{x^{1-\varepsilon'}}{\ln x}\right) =$$

$$= K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\nu g\ln x}\int\limits_{\mu-1}^{\beta-1}\frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Теорема 5 доказана.
Следствие. *Пусть* $1<\mu\leqslant\beta\leqslant\delta$, K_0 *определено равенством (7). Тогда*

$$\sum_{x^{1/\beta}\leqslant p<x^{1/\mu}} S\left(A_p;\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \leqslant K_0\Lambda(\delta)\frac{x}{\ln x}\int\limits_{\mu-1}^{\beta-1}\frac{dz}{z} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Доказательство следствия получим из теоремы 5 при $\nu = (1-\varepsilon)/g$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод решета Бруна усовершенствовал А. А. Бухштаб [6] в 1938 г., применив интегро-конечно-разностные уравнения. Позже, в 1967 г., А. А. Бухштаб [1] построил комбинаторное весовое решето со сложным набором весов. В 1985 г. А. А. Бухштаб [7] анонсировал новый тип весового решета.

В работах [8], [9], [3] исследованы веса Бухштаба нового типа, разработаны два метода весового решета: метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба, метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба, и рассмотрены их приложения.

Отметим, что метод решета Бруна имеет комбинаторную природу и является технически сложным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб, А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // УМН. — 1967. — Т. 22, № 3 (135). — С. 199–226.

2. Rademacher, H. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abhandlungen aus dem math. seminar der Hamb. univ. / H. Rademacher. — Leipzig, 1924. — P. 12–30.

3. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

4. Ингам, А. Е. Распределение простых чисел / А. Е. Ингам. — М. : М.–Л., ОНТИ, 1936. — 156 с.

5. Halberstam, H. Sieve methods / H. Halberstam, H.–E. Richert. — London : Acad. Press, 1974. — 364 p.

6. Бухштаб, А. А. Новые улучшения в методе эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // Матем. сб. — 1938. — Т. 4(46), № 2. — С. 375–387.

7. Бухштаб, А. А. Новый тип весового решета / А. А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

8. Вахитова, Е. В. О применении решета Бруна с весами Бухштаба нового типа к полиномиальной последовательности / Е. В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 22.06.95, № 1814–В95, 1995. — 52 с. (РЖ Матем. — 1995. — 10А47 Деп).

9. Вахитова, Е. В. О приложении функций Бухштаба / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1995. — Т. 57, № 1. — С. 121–125.

REFERENCES

1. Bukhstab A.A. Combinatorial enhancement of the sieve of eratosthenes method. [Buhshtab A.A. Kombinatornoe usilenie metoda eratosfenova resheta]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 3 (135), pp. 199–226.

2. Rademacher, H. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abhandlungen aus dem math. seminar der Hamb. univ., Leipzig, 1924, pp. 12–30.

3. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of a sieve with Buchstab weights and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Voronezh: VSU Publishing House, 2014, 332 p.

4. Ingam A.E. Distribution of prime numbers. [Ingam A.E. Raspredelenie prostyh chisel]. Moscow–Leningrad, 1936, 156 p.

5. Halberstam H., Richert H.–E. Sieve methods. London: Acad. Press, 1974, 364 p.

6. Bukhstab A.A. New improvements in the Eratosthenes sieve method. [Buhshtab A.A. Novye uluchsheniya v metode eratosfenova resheta]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1938, vol. 4(46), no. 2, pp. 375–387.

7. Bukhstab A.A. Number theory and its applications. [Buhshtab A.A. Novyj tip vesovogo resheta]. Number Theory and Its Applications: Abstract of the Report of the All-Union Conf. Tbilisi, 1985, pp. 22–24.

8. Vakhitova E.V. On the use of the Brun sieve with the weights of the Bushtab of a new type to polynomial sequence. [Vahitova E.V. O primenenii resheta Bruna s vesami Buhshtaba novogo tipa k polinomial'noj posledovatel'nosti]. Dep. VINITI 22.06.95, N. 1814-B95, 1995, 52 p. (RZH

Mathem, 1995, 10A47 Dep).

9. Vakhitova E.V. Application of Bukhstab functions. [Vahitova E.V. O prilozhenii funkcij Buhshtaba]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 1–2, pp. 85–87.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru