

О ПРИЛОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛТЬЕСА С «РАСЩЕПЛЕННЫМИ» МЕРАМИ К КРАЕВЫХ ЗАДАЧАМ

И. А. Х. Ал-Гарайхоли

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.

Аннотация. В работе дается определение расширенного интеграла Стильтьеса по «расщепленным» мерам и рассматривается одно из приложений введенного интеграла: вывод поточечно заданного дифференциального уравнения с подобными мерами. Полученная поточечная трактовка уравнения, предложенная Ю. В. Покорным, позволяет применять к анализу решений краевых задач качественные методы.

Ключевые слова: интеграл Стильтьеса, мера, разрывное решение, краевая задача, «расщепленная» мера.

ON THE APPLICATION OF STILTJES INTEGRALS WITH SPLIT MEASURES TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS

E. A. H. Al-Garayholi

Abstract. The paper defines the extended Stieltjes integral over "split" measures and considers one of the applications of the introduced integral: derivation of a pointwise given differential equation with similar measures. The resulting pointwise interpretation of the equation, proposed by Yu. V. Pokorny, allows one to apply qualitative methods to the analysis of solutions to boundary value problems.

Keywords: Stieltjes integral, measure, discontinuous solution, boundary value problem, «split» measure.

В работе изучается возможность дифференцирования и восстановления (с точностью до произвольной постоянной) разрывных функций, собственное значение которых отлично от предельных и в интересах приложений нельзя игнорировать. При этом исследование осуществляется не с помощью теории обобщенных функций, а позиции поточечного подхода, предложенным Ю. В. Покорным в 1999 году [1], и показавшим свою эффективность при построении качественной теории краевых задач второго и четвертого порядков [2]–[8].

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция, определенная в каждой точке отрезка $[0; \ell]$. При этом мы предполагаем, что множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ непусто, т. е. $S(\mu) \neq \emptyset$, и $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ хотя бы для одной точки ξ , принадлежащей множеству $S(\mu)$. Здесь и далее, через $\Delta^-\mu(\xi)$ и $\Delta^+\mu(\xi)$ обозначены левый и правый скачки функции $\mu(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta^-\mu(\xi) = \mu(\xi) - \mu(\xi - 0)$ и $\Delta^+\mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi)$. Таким образом, мера точка $\xi \in S(\mu)$, в которой $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ «расщеплена» на два значения.

Нам удобней считать, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов (см., напр., [3]). Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны. Поэтому, производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в точке ξ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ (см.

рисунок 1) в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Обозначать мы будем через τ_1^ξ и τ_2^ξ , причем

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_1^\xi) = \frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)} = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)}, \quad (1)$$

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_2^\xi) = \frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}. \quad (2)$$

Пусть на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ определена функция $\sigma(x)$, которая порождает на нем меру. При дифференцировании функции $v(x) = u'_{[\mu]_2}(x)$ по мере σ необходимо «помнить» уже три значения в точке $\xi \in S(\mu)$. Поэтому производная $v'_{[\sigma]_3}(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma^{(3)}$ в котором каждая точка разрыва заменена на тройку собственных значений $\hat{\tau}_1^\xi$, $\hat{\tau}_2^\xi$ и $\hat{\tau}_3^\xi$ (см. рисунок 2). При этом $[\sigma]_3$ -производная функции $v(x)$ в точках $\hat{\tau}_j^\xi$ ($j = 1, 2, 3$) определяется следующим образом

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^\xi) = \frac{v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)}, \quad (3)$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_2^\xi) = \frac{v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)}, \quad (4)$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\hat{\tau}_3^\xi) = \frac{v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)}. \quad (5)$$

На рисунках 1 и 2 показана структура множеств $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ и $\overline{[0; \ell]}_\sigma^{(3)}$ соответственно. При этом естественно считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$ для всех точек разрыва функции $\mu(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всюду далее мы будем предполагать, что концевые точки отрезка $[0; \ell]$ являются точками непрерывности функции $\mu(x)$, а, следовательно, и функций $u(x)$ и $v(x)$.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma^{(3)}$, а вторая — на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0; \ell]}_\sigma^{(3)}$ и $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом

$$v_s(0) = 0;$$

если x не совпадает ни с одной из точек τ_i^ξ ни при каком $\xi \in S(v)$ и $i = 1, 2$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0));$$

если $x = \tau_1^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0);$$

если $x = \tau_2^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau_2^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $[\overline{0}; \ell]_\mu^{(2)}$.

Положим

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u d[v]_2 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[u(\hat{\tau}_1^\xi) (v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0)) + \right. \\ \left. + u(\hat{\tau}_2^\xi) (v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi)) + u(\hat{\tau}_3^\xi) (v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi)) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (6) понимается по Лебегу–Стилтьеса (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана–Стилтьеса). Интеграл, определенный равенством (6), мы назовем интегралом Покорного–Стилтьеса, или π_2 -интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v d[u]_2^* = uv \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u d[v]_2, \quad (7)$$

где $uv \Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть π_2^* -интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0; \ell]$ введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана–Стилтьеса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ — функция скачков функции $u(x)$, построенная также, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ — непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v d[u]_2^* = \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[v(\xi - 0) (u(\hat{\tau}_1^\xi) - u(\xi - 0)) + \right. \\ \left. + v(\tau_1^\xi) (u(\hat{\tau}_2^\xi) - u(\hat{\tau}_1^\xi)) + v(\tau_2^\xi) (u(\hat{\tau}_3^\xi) - u(\hat{\tau}_2^\xi)) + \right. \\ \left. + v(\xi + 0) (u(\xi + 0) - u(\hat{\tau}_2^\xi)) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $S(u) = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Определим следующие функции

$$u_s^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \xi_k; \\ u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0), & \text{если } x = \hat{\tau}_1^{\xi_k}; \\ u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0), & \text{если } x = \hat{\tau}_2^{\xi_k}; \\ u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0), & \text{если } x = \hat{\tau}_3^{\xi_k}; \\ u(\xi + 0) - u(\xi_k - 0), & \text{если } x > \xi_k. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$u_s(x) = \sum_k u_s^{(k)}(x).$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v d[u_0]_2^* &= u_0 v \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_0 d[v]_2 = u_0 v \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_0 dv_0 - \\ &\quad - \sum_k \left[u_0 \left(\hat{\tau}_1^\xi \right) \left(v \left(\tau_1^\xi \right) - v(\xi - 0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_0 \left(\hat{\tau}_2^\xi \right) \left(v \left(\tau_2^\xi \right) - v \left(\tau_1^\xi \right) \right) + u_0 \left(\hat{\tau}_3^\xi \right) \left(v \left(\xi + 0 \right) - v \left(\tau_2^\xi \right) \right) \right] = \\ &= u_0 v \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_0 dv_0 - \sum_k u_0(\xi_k) (v(\xi_k + 0) - v(\xi_k - 0)), \quad (9) \end{aligned}$$

что возможно в силу непрерывности $u_0(x)$. Тогда, равенство (9) можно записать в следующем виде

$$\int_0^\ell v d[u_0]_2^* = u_0 v \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_0 dv, \quad (10)$$

причем последний интеграл понимается по Риману–Стилтьеса, а для него законно интегрирование по частям, т. е. (10) принимает вид

$$\int_0^\ell v d[u_0]_2^* = u_0 v \Big|_0^\ell - u_0 v \Big|_0^\ell + \int_0^\ell v du_0,$$

или

$$\int_0^\ell v d[u_0]_2^* = \int_0^\ell v du_0. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2^*$. По определению π_2^* -интеграла имеем

$$\int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2^* = u_s^{(k)} v \Big|_0^\ell - \int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2. \quad (12)$$

Отсюда, по определению π_2 -интеграла,

$$\int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2^* = v(\ell) (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) - \int_0^\ell u_s^{(k)} dv_0 -$$

$$\begin{aligned}
 & - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \left(v(\tau_1^{\xi_k}) - v(\xi_k - 0) \right) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \left(v(\tau_2^{\xi_k}) - v(\tau_1^{\xi_k}) \right) - \\
 & \quad - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \left(v(\xi_k + 0) - v(\tau_2^{\xi_k}) \right) - \\
 & - \sum_{\xi \neq \xi_k} \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi}) \left(v(\tau_1^{\xi}) - v(\xi - 0) \right) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi}) \left(v(\tau_2^{\xi}) - v(\tau_1^{\xi}) \right) - \right. \\
 & \quad \left. - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi}) \left(v(\xi + 0) - v(\tau_2^{\xi}) \right) \right) = \\
 & \quad v(\ell) (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) - \int_0^{\ell} u_s^{(k)} dv_0 - \\
 & - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \left(v(\tau_1^{\xi_k}) - v(\xi_k - 0) \right) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \left(v(\tau_2^{\xi_k}) - v(\tau_1^{\xi_k}) \right) - \\
 & \quad - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \left(v(\xi_k + 0) - v(\tau_2^{\xi_k}) \right) - \\
 & \quad - \sum_{\xi > \xi_k} (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)), \quad (13)
 \end{aligned}$$

так как $u_s^{(k)}(0) = 0$, $u_s^{(k)}(\ell) = u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)$, $u_s^{(k)}(x) = 0$ при $x < \xi_k$, и $u_s^{(k)}(x) = u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)$ при $x > \xi_k$.

Нетрудно видеть, что интеграл в правой части равенства (13) существует по Риману–Стилтьеса, и равен

$$(u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v_0(\ell) - v_0(\xi_k)).$$

Тогда, равенство (13) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ell} v d[u_s^{(k)}]_2^* &= v(\ell) (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) - \\
 & - (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v_0(\ell) - v_0(\xi_k)) + \\
 & + v(\xi_k - 0) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\xi_k - 0) \right) + \\
 & + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + \\
 & + v(\xi_k + 0) \left(u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) - \\
 & - v(\xi_k + 0) u_s^{(k)}(\xi_k + 0) + v(\xi_k - 0) u_s^{(k)}(\xi_k - 0) - \\
 & - \sum_{\xi > \xi_k} (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть равенства (14) следующим образом

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ell} v d[u_s^{(k)}]_2^* &= v(\ell) \Delta u(\xi_k) - \Delta u(\xi_k) v_0(\ell) + \Delta u(\xi_k) v_0(\xi) + \\
 & + v(\xi_k - 0) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\xi_k - 0) \right) + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + \\
 & + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + v(\xi + 0) \left(u_s^{(k)}(\xi + 0) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right) - \\
 & - v(\xi_k + 0) u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - \sum_{\xi > \xi_k} (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) =
 \end{aligned}$$

$$= v(\xi_k - 0) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\xi_k - 0) \right) + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + \\ + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + v(\xi_k + 0) \left(u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right), \quad (15)$$

так как

$$v(\ell) \Delta u(\xi_k) - \Delta u(\xi_k) v_0(\ell) + \Delta u(\xi_k) v_0(\xi_k) - v(\xi_k + 0) u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - \\ - \sum_{\xi > \xi_k} (u(\xi_k + 0) - u(\xi_k - 0)) (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) = \\ = \Delta u(\xi_k) \Delta v(\xi_k) + \Delta u(\xi_k) \Delta v(\xi_k - 0) - v(\xi_k + 0) \Delta u(\xi_k) = \\ = \Delta u(\xi_k) (\Delta v(\xi_k) + v(\xi_k - 0) - v(\xi_k + 0)) = 0. \quad (16)$$

Таким образом

$$\int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2^* = v(\xi_k - 0) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\xi_k - 0) \right) + \\ + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + \\ + v(\xi_k + 0) \left(u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right), \quad (17)$$

а так как

$$u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\xi_k - 0) = u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0), \\ u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) = u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}), \\ u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) = u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}), \\ u_s^{(k)}(\xi_k + 0) - u_s^{(k)}(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) = u(\xi_k + 0) - u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}),$$

то получим

$$\int_0^\ell v d[u_s^{(k)}]_2^* = v(\xi_k - 0) \left(u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0) \right) + \\ + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + \\ + v(\xi_k + 0) \left(u(\xi_k + 0) - u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right). \quad (18)$$

Суммируя равенства (17) по k от 1 до n , добавляя равенство (11), будем иметь

$$\int_0^\ell v d \left[u_0 + \sum_{k=1}^n u_s^{(k)} \right]_2^* = \int_0^\ell v du_0 + \\ + \sum_{k=1}^n \left[v(\xi_k - 0) \left(u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0) \right) + \right. \\ \left. + v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + \right.$$

$$+ v(\xi_k + 0) \left(u(\xi_k + 0) - u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right) \Big]. \quad (19)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (19), будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\ell v d \left[u_0 + \sum_{k=1}^n u_s^{(k)} \right]_2^* &= \int_0^\ell v du_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left[v(\xi_k - 0) \left(u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) - u(\xi_k - 0) \right) + \right. \\ &+ v(\tau_1^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_1^{\xi_k}) \right) + v(\tau_2^{\xi_k}) \left(u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) - u(\hat{\tau}_2^{\xi_k}) \right) + \\ &\left. + v(\xi_k + 0) \left(u(\xi_k + 0) - u(\hat{\tau}_3^{\xi_k}) \right) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Остается доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\ell v d \left[u_0 + \sum_{k=1}^n u_s^{(k)} \right]_2^* = \int_0^\ell v d[u]_2^*. \quad (21)$$

Очевидно, что последовательность $u_n(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n u_s^{(k)}(x)$ сходится поточечно к функции $u(x)$ и существует постоянная M такая, что $|u_n(x)| \leq M$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu^{(3)}$. Тогда, для последовательности $\int_0^\ell u_n dv_0$ справедливы все условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см., например, [9]), а сумма $\sum_{k=1}^n u_s^{(k)}(x)$ является частичной суммой ряда $\sum_{k=1}^\infty u_s^{(k)}(x)$, который сходится в силу условий теоремы. Теорема доказана. $\square$

Также вводятся π_1 - и π_1^* -интегралы.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$, а вторая — на $\overline{[0; \ell]}_\mu$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ и $\overline{[0; \ell]}_\mu$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом

$$v_s(0) = 0;$$

если x не совпадает ни с одной из точек τ^ξ ни при каком $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0));$$

если $x = \tau^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_\mu$.

Положим

$$\int_0^\ell u d[v]_1 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[u(\tau_1^\xi) (v(\tau^\xi) - v(\xi - 0)) + u(\tau_2^\xi) (v(\xi + 0) - v(\tau^\xi)) \right]. \quad (22)$$

Первый интеграл в правой части (22) понимается по Лебегу–Стилтьеса (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана–Стилтьеса). Интеграл, определенный равенством (22), мы назовем интегралом Покорного–Стилтьеса, или π_1 -интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v d[u]_1^* = uv \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u d[v]_1, \quad (23)$$

где $uv \Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть π_1^* -интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0; \ell]$ введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана–Стилтьеса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ — функция скачков функции $u(x)$, построенная также, как $u_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ — непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v d[u]_1^* &= \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[v(\xi - 0) (u(\tau_1^\xi) - u(\xi - 0)) + \right. \\ &\quad \left. + v(\tau^\xi) (u(\tau_2^\xi) - u(\tau_1^\xi)) + v(\xi + 0) (u(\xi + 0) - u(\tau_2^\xi)) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство абсолютно аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что введенные π_1^* - и π_2^* -интегралы невозможно свести к обычному интегралу Лебега–Стилтьеса по некоторому вспомогательному заряду. ввиду того, что мера точек разрыва функции $\mu(x)$ «расщеплена» на несколько частей, и мера крайних частей умножается на значение, ранее бывшее предельным.

Как уже говорилось ранее, для восстановления $[\mu]_2$ и $[\sigma]_3$ -абсолютных функций (на соответствующих множествах), необходимо «помнить» все скачки функций, но также требуется использовать интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть $z(x)$ функция определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$. На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$ определим функцию $Z(x)$ следующим образом

$$Z(x) = \int_0^x z(s) d[\mu(s)]_2 = \int_0^x z(s) ds + \sum_{\xi \in S(\mu): 0 < \xi < x} \left(z(\tau_1^\xi) \Delta^- \mu(\xi) + z(\tau_2^\xi) \Delta^+ \mu(\xi) \right), \quad (25)$$

если $x \notin S(\mu)$ или $x = \eta + 0$ при некотором $\eta \in S(\mu)$;

$$Z(x) = \int_0^x z(s) d[\mu(s)]_2 = \int_0^x z(s) ds +$$

$$+ \sum_{\xi \in S(\mu): 0 < \xi < x} \left(z(\tau_1^\xi) \Delta^- \mu(\xi) + z(\tau_2^\xi) \Delta^+ \mu(\xi) \right) + z(\tau_1^x) \Delta^- \mu(x), \quad (26)$$

если $x \in S(\mu)$.

Из определения вытекает, что естественно считать $x < \tau_1^\xi < \tau_2^\xi < y$ для всех x, ξ, y для которых ранее было справедливо двойное неравенство $x < \xi < y$.

Непосредственно из определения вытекает, что

$$Z'_{[\mu]_2}(x) = z(x) \quad (27)$$

для всех $x \notin S(\mu)$; если $x \in S(\mu)$, то

$$Z'_{[\mu]_2}(\tau_1^x) = \frac{Z(x) - Z(x-0)}{\mu(x) - \mu(x-0)} = z(\tau_1^x) \quad (28)$$

и

$$Z'_{[\mu]_2}(\tau_2^x) = \frac{Z(x+0) - Z(x)}{\mu(x+0) - \mu(x)} = z(\tau_2^x). \quad (29)$$

Равенства (27), (28) и (29) позволяют записать равенства

$$\frac{d}{d[\mu]_2} \int_0^x z(s) d[\mu(s)]_2 = z(x) \quad (30)$$

для всех $x \in \overline{[0; \ell]_\mu^{(2)}}$, и

$$\int_\alpha^\beta Z'_{[\mu]_2}(s) d[\mu(s)]_2 = Z(\beta) - Z(\alpha) \quad (31)$$

для всех $\alpha, \beta \in \overline{[0; \ell]_\mu}$.

Соотношение (31) естественно назвать аналогом классической формулы Ньютона–Лейбница.

Аналогично, если $w(x)$ функция определена на множестве $\overline{[0; \ell]_\sigma^{(3)}}$. На множестве $\overline{[0; \ell]_\mu^{(2)}}$ определим функцию $W(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned} W(x) &= \int_0^x w(s) d[\sigma(s)]_3 = \\ &= \int_0^x w(s) ds + \sum_{\xi \in S(\sigma): 0 < \xi < x} \left[w(\hat{\tau}_1^\xi) \left(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi-0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + w(\hat{\tau}_2^\xi) \left(\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi) \right) + w(\hat{\tau}_3^\xi) \left(\sigma(\xi+0) - \sigma(\tau_2^\xi) \right) \right], \quad (32) \end{aligned}$$

если $x \notin S(\sigma)$ или $x = \eta + 0$ при некотором $\eta \in S(\sigma)$;

$$\begin{aligned} W(x) &= \int_0^x w(s) d[\sigma(s)]_3 = \\ &= \int_0^x w(s) ds + \sum_{\xi \in S(\sigma): 0 < \xi < x} \left[w(\hat{\tau}_1^\xi) \left(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi-0) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ w(\hat{\tau}_2^\xi) \left(\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi) \right) + w(\hat{\tau}_3^\xi) \left(\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi) \right) \Big] + \\ + w(\hat{\tau}_1^\eta) \left(\sigma(\tau_1^\eta) - \sigma(\eta - 0) \right), \quad (33)$$

если $x = \tau_1^\eta$ при некотором $\eta \in S(\sigma)$;

$$W(x) = \int_0^x w(s) d[\sigma(s)]_3 = \\ = \int_0^x w(s) ds + \sum_{\xi \in S(\sigma): 0 < \xi < x} \left[w(\hat{\tau}_1^\xi) \left(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0) \right) + \right. \\ + w(\hat{\tau}_2^\xi) \left(\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi) \right) + w(\hat{\tau}_3^\xi) \left(\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi) \right) \Big] + \\ + w(\hat{\tau}_1^\eta) \left(\sigma(\tau_1^\eta) - \sigma(\eta - 0) \right) + w(\hat{\tau}_2^\eta) \left(\sigma(\tau_2^\eta) - \sigma(\tau_1^\eta) \right), \quad (34)$$

если $x = \tau_2^\eta$ при некотором $\eta \in S(\sigma)$.

Из определения вытекает, что естественно считать $x < \hat{\tau}_1^\xi < \hat{\tau}_2^\xi < \hat{\tau}_3^\xi < y$ для всех x, ξ, y для которых ранее было справедливо двойное неравенство $x < \xi < y$.

Непосредственно из определения вытекает, что

$$W'_{[\sigma]_3}(x) = w(x) \quad (35)$$

для всех $x \notin S(\sigma)$; если $x \in S(\sigma)$, то

$$W'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_1^x) = \frac{W(\tau_1^x) - W(x - 0)}{\sigma(x) - \sigma(x - 0)} = z(\hat{\tau}_1^x), \quad (36)$$

$$W'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_2^x) = \frac{W(\tau_2^x) - W(\tau_1^x)}{\sigma(\tau_2^x) - \mu(\tau_1^x)} = z(\hat{\tau}_2^x) \quad (37)$$

и

$$W'_{[\sigma]_3}(\hat{\tau}_3^x) = \frac{W(x + 0) - W(\tau_2^x)}{\sigma(x + 0) - \sigma(\tau_2^x)} = z(\hat{\tau}_3^x). \quad (38)$$

Равенства (35), (36), (37) и (38) позволяют записать равенства

$$\frac{d}{d[\sigma]_3} \int_0^x w(s) d[\sigma(s)]_3 = w(x) \quad (39)$$

для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\sigma^{(3)}$, и

$$\int_\alpha^\beta W'_{[\sigma]_3}(s) d[\sigma(s)]_3 = W(\beta) - W(\alpha) \quad (40)$$

для всех $\alpha, \beta \in \overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$.

Соотношение (40), как и выше, естественно назвать аналогом классической формулы Ньютона–Лейбница.

Замечание 1. Выше мы рассмотрели случай, когда $\mu(x)$ равна $x + \sum_k \gamma_k \theta(x - \xi_k)$, где $\xi_k \in (0; \ell)$, $\gamma_k > 0$ для всех k и $\sum_k \gamma_k < \infty$. Все сказанное справедливо для произвольной возрастающей функции $\mu(x)$, определенной на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Аналогично утверждение справедливо для произвольной возрастающей $\sigma(x)$, определенной на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Одним из приложений введенных интегралов является математическое моделирование процессов в объектах с разрывными средами.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell p u_{[\mu]_2}'^2 d[\mu] + \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2 d[Q]_2^* - \int_0^\ell u d[F]_2^*, \quad (41)$$

определенного на множестве E — $[\mu]$ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций, $[\mu]$ -производная которых $[\mu]$ -суммируема с квадратом на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$, принимающие нулевые значения на концах отрезка $[0; \ell]$. Отметим, что $[\mu]$ -суммируемость с квадратом означает следующее: интеграл $\int_0^\ell |u_{[\mu]_2}'(x)|^2 d[\mu(x)]$ конечен.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 1) функция $p(x)$ имеет конечное на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ изменение;
- 2) $\min_{\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}} p(x) > 0$, это по сути дела означает, что функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля;
- 3) функции $Q(x)$ и $F(x)$ имеют ограниченную на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ вариацию;
- 4) множества $S(\mu)$, $S(p)$, $S(Q)$ и $S(F)$ совпадают.

Последнее требование выдвинуто с целью, чтобы не затенять сути дела.

Изучим вначале вопрос о необходимом условии минимума функционала (41) на множестве E .

Пусть $u_0(x) \in E$ дает минимум функционала $\Phi(u)$ на множестве E , т. е. $u_0 \rightarrow \min_E \Phi(u)$.

Тогда у функции $\varphi(\vartheta) = \Phi(u_0 + \vartheta h)$, где ϑ — действительное число и h — произвольная фиксированная функция, принадлежащая множеству E , в точке $\vartheta = 0$ минимум. Более того, функция $\varphi(\vartheta)$ относительно ϑ квадратичная, следовательно, в нуле производная существует и равна нулю: $\varphi'_{\vartheta}(0) = 0$. С другой стороны, ее непосредственное вычисление приводит к равенству

$$\varphi'_{\vartheta}(0) = \int_0^\ell p u_{0[\mu]_2}' h_{[\mu]_2}' d[\mu] + \int_0^\ell u_0 h d[Q]_2^* - \int_0^\ell h d[F]_2^*. \quad (42)$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\int_0^\ell p u_{0[\mu]_2}' h_{[\mu]_2}' d[\mu] + \int_0^\ell u_0 h d[Q]_2^* - \int_0^\ell h d[F]_2^* = 0. \quad (43)$$

На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ определим функцию $\alpha(x)$ следующим образом. Если $x \notin S(\mu)$, то положим

$$\alpha(x) = u_0(x)Q(x) - u_0(0)Q(0) - \int_0^x Q d[u_0]; \quad (44)$$

если $x = \tau_1^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$, то

$$\alpha(\tau_1^\eta) = u_0(\eta)Q(\tau_1^\eta) - u_0(0)Q(0) - \int_0^{\eta-0} Q d[u_0] - Q(\tau_1^\eta)(u_0(\eta) - u_0(\eta - 0)); \quad (45)$$

если $x = \tau_2^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$, то

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_2^\eta) = u_0(\eta + 0)Q(\tau_2^\eta) - u_0(0)Q(0) - \int_0^{\eta-0} Q d[u_0] - \\ - Q(\tau_1^\eta)(u_0(\eta) - u_0(\eta - 0)) - Q(\tau_2^\eta)(u_0(\eta + 0) - u_0(\eta)). \end{aligned} \quad (46)$$

Лемма 1. При выполнении условий 1–4 справедливо равенство

$$\int_0^\ell u_0 h d[Q]_2^* = \int_0^\ell h d[\alpha]_2^* \quad (47)$$

для всякой $h \in E$.

Доказательство. Из равенств (44), (45) и (46) непосредственно находим

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_1^\eta) - \alpha(\eta - 0) = u_0(\eta)Q(\tau_1^\eta) - u_0(0)Q(0) - \int_0^{\eta-0} Q d[u_0] - \\ - Q(\tau_1^\eta)(u_0(\eta) - u_0(\eta - 0)) - u_0(\eta - 0)Q(\eta - 0) + u_0(0)Q(0) + \int_0^{\eta-0} Q d[u_0] = \\ = u_0(\eta - 0)(Q(\tau_1^\eta) - Q(\eta - 0)), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_2^\eta) - \alpha(\tau_1^\eta) = u_0(\eta + 0)Q(\tau_2^\eta) - u_0(0)Q(0) - \\ - Q(\tau_2^\eta)(u_0(\eta + 0) - u_0(\eta)) - \int_0^\eta Q d[u_0] - u_0(\eta)Q(\tau_1^\eta) + \\ + u_0(0)Q(0) + \int_0^\eta Q d[u_0] = u_0(\eta)(Q(\tau_2^\eta) - Q(\tau_1^\eta)); \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\eta + 0) - \alpha(\tau_2^\eta) = u_0(\eta + 0)Q(\eta + 0) - u_0(0)Q(0) - \int_0^{\eta+0} Q d[u_0] - \\ - u_0(\eta + 0)Q(\tau_2^\eta) + u_0(0)Q(0) + \int_0^{\eta+0} Q d[u_0] = u_0(\eta + 0)(Q(\eta + 0) - Q(\tau_2^\eta)). \end{aligned} \quad (50)$$

Для точек $x \notin S(\mu)$ мы получаем, что равенство $d\alpha = u_0 dQ$, справедливо почти всюду относительно $[\mu]$ -меры.

Тогда, последовательно находим

$$\int_0^\ell h d[\alpha]_2^* = \int_0^\ell h d\alpha_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left(h(\xi - 0)(\alpha(\tau_1^\xi) - \alpha(\xi - 0)) + \right.$$

$$+ h(\xi)(\alpha(\tau_2^\xi) - \alpha(\tau_1^\xi)) + h(\xi + 0)(\alpha(\xi + 0) - \alpha(\tau_2^\xi)) \Big), \quad (51)$$

где $\alpha_0(x)$ — непрерывная составляющая функции $\alpha(x)$. С учетом (48), (49) и (50), равенство (51) допускает переписать

$$\begin{aligned} \int_0^\ell h d[\alpha]_2^* &= \int_0^\ell h d\alpha_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left(h(\xi - 0)u_0(\eta - 0)(Q(\tau_1^\eta) - Q(\eta - 0)) + \right. \\ &\quad \left. + h(\xi)u_0(\eta)(Q(\tau_2^\eta) - Q(\tau_1^\eta)) + h(\xi + 0)u_0(\eta + 0)(Q(\eta + 0) - Q(\tau_2^\eta)) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Но правая часть равенства (52) есть нечто иное как значение интеграла $\int_0^\ell u_0 h d[Q]_2^*$, и лемма доказана. $\square$

Соотношение (43), с учетом леммы 1, принимает вид

$$\int_0^\ell p u_{0[\mu]_2}' h_{[\mu]_2}' d[\mu] + \int_0^\ell h d[\alpha - F]_2^* = 0. \quad (53)$$

Вспоминая определение π_2^* -интеграла, равенство (53) допускает переписать

$$\int_0^\ell p u_{0[\mu]_2}' h_{[\mu]_2}' d[\mu] - \int_0^\ell (\alpha - F) d[h] = 0. \quad (54)$$

Внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $h(0) = h(\ell) = 0$.

Так как h — $[\mu]$ -абсолютная на $[\overline{0; \ell}]_\sigma$ функция, то из (54) вытекает

$$\int_0^\ell (p u_{0[\mu]_2}' - \alpha + F) h_{[\mu]_2}' d[\mu] = 0. \quad (55)$$

Лемма 2 (Аналог леммы Дюбуа–Реймона). Пусть $A(x)$ имеет конечное на $[\overline{0; \ell}]_\mu^{(2)}$ изменение, равенство

$$\int_0^\ell A(x) h_{[\mu]_2}' d[\mu] = 0 \quad (56)$$

для всякой функции $h(x)$, принадлежащей множеству E , удовлетворяющих условиям $h(0) = h(\ell) = 0$. Тогда $A(x)$ принимает постоянное значение на $[\overline{0; \ell}]_\mu^{(2)} \setminus \{0; \ell\}$.

Доказательство. Для произвольной константы имеем

$$\int_0^\ell C \cdot h_{[\mu]_2}' d[\mu] = C \cdot (h(\ell) - h(0)) = 0. \quad (57)$$

Тогда равенство (56) можем записать следующим образом

$$\int_0^\ell (A(x) - C) h_{[\mu]_2}' d[\mu] = 0. \quad (58)$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\hat{h}(x) = \int_0^x (A(s) - \hat{C}) d[\mu(s)], \quad (59)$$

определенную на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, где $\hat{C} = \int_0^\ell A(s) d[\mu(s)]$. Нетрудно видеть, что $\hat{h} \in E$.

Подставляя число $\hat{C}$ и функцию $\hat{h}$ в равенство (58), получим

$$\int_0^\ell (A(x) - \hat{C})^2 d[\mu] = 0. \quad (60)$$

Отсюда следует справедливость равенства $A(x) - \hat{C} = 0$ почти всюду относительно $[\mu]$ -меры. А так как $A(x)$, по условию, имеет конечное на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ изменение, то для всех внутренних точек множества $\overline{[0; \ell]}_\mu$ выполнено $A(x-0) = A(x+0)$, что и доказывает лемму. $\square$

Из равенства (55), на основании леммы 2, вытекает равенство

$$(pu'_{0[\mu]_2})(x) - \alpha(x) + F(x) = C, \quad (61)$$

где C — некоторая константа. Равенство (61) справедливо для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$, или, вспоминая определение $\alpha(x)$,

$$(pu'_{0[\mu]_2})(x) - \left(u_0(x)Q(x) - u_0(0)Q(0) - \int_0^x Q d[u_0] \right) + F(x) = C \quad (62)$$

для всех $x \notin S(\mu)$;

$$(pu'_{0[\mu]_2})(\tau_1^\eta) - \left(u_0(\eta)Q(\tau_1^\eta) - u_0(0)Q(0) - \int_0^\eta Q d[u_0] \right) + F(\tau_1^\eta) = C, \quad (63)$$

если $x = \tau_1^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$;

$$(pu'_{0[\mu]_2})(\tau_2^\eta) - \left(u_0(\eta+0)Q(\tau_2^\eta) - u_0(0)Q(0) - \int_0^{\eta+0} Q d[u_0] \right) + F(\tau_2^\eta) = C, \quad (64)$$

если $x = \tau_2^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$.

Как известно, что функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух возрастающих функций (см. [9]), т. е. функции $Q(x)$ и $F(x)$ представимы в виде $Q(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ и $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$, где $Q_i(x)$ и $F_i(x)$ ($i = 1, 2$) возрастающие функции.

На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ определим функцию $\sigma(x)$ следующим образом. Если $x \notin S(\mu)$, то $\sigma(x) = \mu(x) + Q_1(x) + Q_2(x) + F_1(x) + F_2(x)$; если $x = \tau_1^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$, то $\sigma(\tau_1^\eta) = \frac{\mu(\eta-0) + \mu(\eta)}{2} + Q_1(\tau_1^\eta) + Q_2(\tau_1^\eta) + F_1(\tau_1^\eta) + F_2(\tau_1^\eta)$; если $x = \tau_2^\eta$ при некотором $\eta \in S(\mu)$, то $\sigma(\tau_2^\eta) = \frac{\mu(\eta) + \mu(\eta+0)}{2} + Q_1(\tau_2^\eta) + Q_2(\tau_2^\eta) + F_1(\tau_2^\eta) + F_2(\tau_2^\eta)$. Введенная функция является возрастающей и порождает на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ $[\sigma]$ -аддитивную функцию множества, если определить функцию сегмента $\sigma(\overline{[\alpha; \beta]}_\mu^{(2)}) = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ для всякого множества $\overline{[\alpha; \beta]}_\mu^{(2)} \subset \overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$.

Из равенств (62), (63), (64) и определение $\sigma(x)$ вытекает возможность $[\sigma]_2$ -дифференцирования, при этом мы получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du_0}{d[\mu]_2} \right) + u_0 \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \frac{dF}{d[\sigma]_3}, \quad (65)$$

которое в точках разрыва функции $\mu(x)$ понимается как три равенства

$$\begin{aligned} - \left[\left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\tau_1^\xi) - \left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\xi - 0) \right] + \\ + u_0(\xi - 0) \left[Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0) \right] = F(\tau_1^\xi) - F(\xi - 0), \end{aligned} \quad (66)$$

$$- \left[\left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\tau_2^\xi) - \left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\tau_1^\xi) \right] + u_0(\xi) \left[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi) \right] = F(\tau_2^\xi) - F(\tau_1^\xi), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} - \left[\left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\xi + 0) - \left(pu_{0[\mu]_2}' \right) (\tau_2^\xi) \right] + \\ + u_0(\xi + 0) \left[Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi) \right] = F(\xi + 0) - F(\tau_2^\xi). \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3. Если $u_0(x)$ дает минимум функционалу (41) на множестве E , то существует такая строго возрастающая функция $\sigma(x)$, что функции $\mu(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются $[\sigma]$ -абсолютно непрерывными функциями на $[0; \ell]_\mu^{(2)}$, и $u_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du_0}{d[\mu]_2} \right) + u_0 \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \frac{dF}{d[\sigma]_3}; \\ u_0(0) = u_0(\ell) = 0. \end{cases} \quad (69)$$

В заключение мы отметим, что [10] — одна из первых работ в которой изучение подобной задачи начато с позиций поточечного подхода Ю. В. Покорного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.
6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.
7. Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С. А. Шабров. — Saarbrücken, 2015. — 162 с.

8. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

9. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

10. Ткаченко, А. А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стильтьеса / А. А. Ткаченко, С. А. Шабров // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 36–39.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornij Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennykh differencial'nykh uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornij Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornij Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma-Liuvillya dlya impul'snykh zadach]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornij Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nykh zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornij Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Shabrov S.A. Qualitative methods of analysis of boundary value problems of the fourth order. [SHabrov S.A. Kachestvennye metody analiza granichnykh zadach chetvertogo poriyadka]. Saarbrücken, 2015, 162 p.

8. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoy modeli malyx deformatsij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkciy i funkcional'nogo analiza]. Moscow, 1976, 543 p.

10. Tkachenko A.A., Shabrov S.A. On the solvability of an integro-differential equation with an extended Stieltjes integral. [Tkachenko A.A., SHabrov S.A. O razreshimosti integro-differencial'nogo uravneniya s rasshirennym integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo*

universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 36–39.

*Ал-Гарайхоли Иван Абдулкарим Хузам,
аспирант, кафедра математического ана-
лиза, математический факультет, Воро-
нежский государственный университет,
Воронеж, Россия
E-mail: evan.abd3@gmail.com*

*Al-Garayholi Evan Abdulkareem Huzam,
postgraduate student, Department of
Mathematical Analysis, Faculty of
Mathematics, Voronezh State University,
Voronezh, Russia
E-mail: evan.abd3@gmail.com*