

УДК 517.927.4

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА С СИММЕТРИЧНЫМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 30.09.2024 г.

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с симметричными граничными условиями. С помощью функции Грина краевая задача сводится к равносильному интегральному уравнению. Далее, установив необходимые для последующего исследования соответствующие свойства функции Грина, используя теорему Красносельского о растяжении (сжатии) конуса в полуупорядоченных пространствах, доказывается существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, растяжение конуса.

POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR ONE NONLINEAR FOURTH-ORDER ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATION WITH SYMMETRIC
BOUNDARY CONDITIONS

G. E. Abduragimov

Abstract. The article considers a boundary value problem for one nonlinear fourth-order ordinary differential equation with symmetric boundary conditions. Using the Green's function, the boundary value problem is reduced to an equivalent integral equation. Further, having established the corresponding properties of the Green's function necessary for subsequent research, using Krasnoselsky's theorem on the stretching (compression) of a cone in semi-ordered spaces, the existence of at least one positive solution to the problem under consideration is proved.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, dilation of the cone.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для обыкновенных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка часто встречаются в механике твердых тел. Получены условия существования и единственности положительных решений уравнения колебаний упругой балки.

© Абдурагимов Г. Э., 2024

Большая часть этих результатов получена путем понижения порядка рассматриваемых задач до краевых задач для ОДУ второго порядка и последующим сведением к эквивалентному интегральному уравнению. Дальнейшее исследование проводится различными топологическими приемами, основанные главным образом, на принципе неподвижной точки оператора и его модификациях в пространствах с конусом. Среди последних публикаций, посвященным краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с симметричными граничными условиями отметим, в частности, работы [1,2]. В постановке задачи близкой к данной статье соответствующие результаты были получены в работах [3-5]. Заметим, что достаточно эффективным инструментом исследования вопросов существования положительных решений краевых задач для нелинейных ОДУ является теорема Красносельского [6, с.362] о неподвижной точке конусного расширения (сжатия).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведем некоторые определения, предложения и утверждения, используемые в работе.

Определение 1. [6, с.256] *Замкнутое выпуклое множество K банахова пространства E назовем конусом, если из $x \in K$ и $x \neq 0$ следует, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $\alpha x \notin K$ при $\alpha < 0$.*

Каждый конус K определяет в банаховом пространстве E *полуупорядоченность*: пишут $x \leq y$ или $y \leq x$, если $y - x \in K$.

Определение 2. [6, с.256] *Нелинейный оператор $A : E \rightarrow E$ называется положительным на множестве M банахова пространства E , если $AM \subset K$, где K – конус в E .*

Пусть заданы множества: $K(0, r_1) = \{x \in K : \|x\| \leq r_1\}$ и $K(r_2, \infty) = \{x \in K : \|x\| \geq r_2\}$, где r_1 и r_2 – положительные числа. Рассмотрим теперь положительный вполне непрерывный оператор A , определенный на всем конусе K (кроме, может быть, нулевой точки).

Определение 3. [6, с.362] *Пусть существуют такие положительные числа r_1 и r_2 , что $Ax \nless x$ при $x \in K(0, r_1)$ ($x \neq 0$) и $Ax \nless x$ при $x \in K(r_2, \infty)$, тогда будем называть оператор A растяжением конуса K . Аналогично, A является сжатием конуса K , если $Ax \nless x$ при $x \in K(0, r_1)$ ($x \neq 0$) и $Ax \nless x$ при $x \in K(r_2, \infty)$.*

Теорема 1. [6, с.362] *Пусть положительный и вполне непрерывный оператор A является растяжением или сжатием конуса K . Тогда A имеет в конусе по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x''(0) = x'''(0), \quad (2)$$

$$x(1) = 0, \quad x''(1) = x'''(1), \quad (3)$$

где функция $f(t, u)$ предполагается неотрицательной и непрерывной на отрезке $[0, 1] \times [0, \infty)$, причем $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 1. *Под положительным решением задачи (1)–(3) будем подразумевать функцию $x \in C_{[0,1]}^4$ положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2), (3).*

Несложно показать, что

$$G(t, s) = \frac{1}{6} \begin{cases} [(1-s)^3 + s(1-t)(4+t)]t, & 0 \leq t \leq s, \\ [s^3 + (1+s)(t+t^2)](1-t), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

является функцией Грина оператора $\frac{d^4}{dt^4}$ с краевыми условиями (2), (3), которая, очевидно, положительна в области $(0,1) \times (0,1)$, а на границе $G(0,s) = G(1,s) = 0$.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Продифференцировав (4), получим

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s,x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s,x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (6)$$

где соответственно

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{6} \begin{cases} (1-s)^3 - s[3(1+t)^2 - 7], & 0 \leq t \leq s, \\ (1+s)(1-3t^2) - s^3, & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} = \begin{cases} -s(t+1), & 0 \leq t \leq s, \\ -t(s+1), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Очевидно, что $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} < 0$. Тогда из (6) следует, что $x''(t) < 0$ при $t \in [0,1]$. Заметим, что в силу (5) $x'(0) > 0$ и $x'(1) < 0$. Следовательно, функция $x'(t)$ строго убывает на $[0,1]$ и найдется единственная точка t_* на этом отрезке такая, что $x'(t_*) = 0$, при этом

$$x'(t) > 0, \quad t \in [0, t_*]$$

и

$$x'(t) < 0, \quad t \in (t_*, 1].$$

Таким образом, $\|x\|_{\mathbb{C}[0,1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} x(t)$ достигается в точке t_* . В дальнейшем условимся опускать нижний индекс в обозначении соответствующей нормы. Кроме того, из выпуклости $x(t)$ на $[0,1]$ следует неравенство

$$x(t) \geq \varphi(t)\|x\|, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

где $\varphi(t) = \min \left\{ \frac{t}{t_*}, \frac{1-t}{1-t_*} \right\}$.

Запишем интегральное уравнение (4) в операторной форме

$$x = Ax,$$

где A – оператор действующий на подмножестве неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}[0,1]$, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Несложно показать, что для функции Грина справедливы оценки

$$s(1-s)^3\psi(t) \leq G(t,s) \leq \psi(t), \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1], \quad (8)$$

где $\psi(t) = 5(t-t^2)$.

Обозначим через K конус неотрицательных и строго выпуклых на отрезке $[0,1]$ функций $u \in \mathbb{C}_{[0,1]}^4$ таких, что $\max_{0 \leq t \leq 1} u(t)$ достигается в точке t_* и $u(0) = u(1) = 0$, $u''(0) = u'''(0)$, $u''(1) = u'''(1)$. Полуупорядоченность в конусе K определим следующим образом: будем считать $u < v$, если $u(t) \leq v(t)$ при $t \in [0,1]$.

Пусть $x \in K$. Как было выше установлено $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} < 0$ при $t \in [0,1]$, поэтому

$$(Ax)''(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s, x(s)) ds < 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Следовательно, неотрицательная функция $u = Ax$ строго выпукла и $u(0) = u(1) = 0$, $u''(0) = u'''(0)$, $u''(1) = u'''(1)$. Кроме того, как легко видеть $u(t)$ достигает максимума в той же точке, что и $x(t)$, т.е. при $t = t_*$. Это означает, что A – положительный оператор на K .

Лемма 1. *Оператор $A : K \rightarrow K$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $D \subset K$ – ограниченное множество. Тогда можно указать число $M_1 > 0$ такое, что $\|x\| \leq M_1$ для любого $x \in D$. Обозначим через M_2 величину $\max_{(t,u) \in [0,1] \times [0,M_1]} f(t,u)$. Воспользовавшись (8), имеем

$$\|Ax\| \leq \frac{5}{4} M_2, \quad t \in [0,1].$$

Последнее влечет равномерную ограниченность $A(D)$.

Покажем теперь, что $A(D)$ компактное множество. Так как $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ строго убывает по t , максимум этой функции по абсолютной величине, очевидно, возможен только на концах отрезка $[0,1]$. Для всех $s \in [0,1]$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \right| &= \\ &= \max \left\{ \left| \frac{\partial G(0,s)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial G(1,s)}{\partial t} \right| \right\} = \max \{ (1-s)^3 + 4s, \quad s^3 + 2(1+s) \} \\ &= s^3 + 2(1+s) \leq 5. \end{aligned}$$

Для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ и любого $x \in D$ имеем

$$|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |(Ax)'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 \left| \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \right| f(s, x(s)) ds \leq 5M_2 |t_2 - t_1|.$$

Таким образом, $A(D)$ является равномерно непрерывным. Тогда из теоремы Арцела-Асколи следует, что $A(D)$ компактное множество, а A компактный оператор. Следовательно, интегральный оператор A с непрерывным ядром $G(t,s)$ вполне непрерывен.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия*

1. $\lim_{u \rightarrow 0+} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t,u)}{u} = 0;$
2. $\lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t,u)}{u} = \infty.$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Покажем, что оператор A растягивает конус. Из условия 1 теоремы следует существование числа $H > 0$, такого что

$$f(t,u) \leq \mu u, \quad t \in [0,1], \quad 0 < u \leq H, \quad (9)$$

где $0 < \mu < \frac{4}{5}\varphi(\frac{1}{2})$.

В силу (8) и (9) при $x \in K(0, r)$, положив $r = H$, имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s)) ds \leq \mu\psi(t) \int_0^1 x(s) ds \leq \frac{5}{4}\mu\|x\|, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (10)$$

Далее, из (7) следует, что $x(\frac{1}{2}) \geq \varphi(\frac{1}{2})\|x\|$. Откуда $\|x\| \leq \frac{x(\frac{1}{2})}{\varphi(\frac{1}{2})}$. С учетом выбора μ из (10) окончательно получим

$$(Ax)\left(\frac{1}{2}\right) < x\left(\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, $Ax - x \notin K$ при $x \in K(0, r)$.

Несложно видеть, что условие 2 теоремы для любого $\xi > \frac{48}{t_*^5}$ гарантирует существование числа $L > 0$, такого что

$$f(t, u) \geq \xi u, \quad t \in [0, 1], \quad u \geq L. \quad (11)$$

Пусть $[a, b]$ – произвольный непустой сегмент отрезка $[0, 1]$ содержащий точку $\frac{1}{2}$, где $a, b \in (0, 1)$. В силу (7) для $x \in K(R, \infty)$ имеем

$$x(t) \geq \varphi(t)\|x\| \geq \gamma R, \quad a \leq t \leq b,$$

где $\gamma = \min_{a \leq t \leq b} \varphi(t) > 0$. Выбрав $R = \max\{\frac{L}{\gamma}, 2r\}$, в силу (8) и (11) имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &\geq \xi\psi(t) \int_0^1 s(1-s)^3 x(s) ds \geq \xi\psi(t) \int_0^1 s(1-s)^3 \varphi(s) ds \cdot \|x\| \\ &\geq \xi\psi(t) \int_0^{t_*} s(t_* - s)^3 \varphi(s) ds \cdot x(t) = \frac{t_*^5}{60} \xi \psi(t) x(t), \quad a \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(Ax)(\frac{1}{2}) \geq \frac{t_*^5}{48} \xi x(\frac{1}{2})$. Ввиду выбора ξ окончательно получим $(Ax)(\frac{1}{2}) > x(\frac{1}{2})$. Следовательно, $x - Ax \notin K$ при $x \in K(R, \infty)$.

Таким образом, при разумном выборе r и R положительный вполне непрерывный оператор A растягивает конус K . Тогда, по теореме 1, уравнение (4) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3). Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0^+} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{u} &= \infty; \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{u} &= 0. \end{aligned}$$

применяя теорему 1 (сжатие конуса), можно по аналогичной схеме доказать наличие по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены достаточные условия существования по крайней мере одного положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с симметричными граничными условиями.

Доказательство основывается на применении теоремы Красносельского о растяжении (сжатии) конуса. Теорема существования позволяет охватить достаточно широкий класс нелинейных функций f , обращающихся в нуль по второму аргументу, например, x^α ($\alpha > 0, \alpha \neq 1$), $\ln(1+x)$, $e^x - 1$ и их различные вариации. Приведенные в статье результаты дополняют исследования автора поданной тематике и могут представлять определенный теоретический интерес для специалистов, занимающихся вопросами существования положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang, Y. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem / Y. Zhang, L. Chen // AIMS Math. — 2023. — V. 8. — P. 1014–1021.
2. Chen, H. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives / H. Chen, Y. Cui // J. Inequal. Appl. — 2023. — V. 2023. — P. 1–13.
3. Абдурагимов, Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка / Э. И. Абдурагимов // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. — 2014. — Т. 10, № 121. — С. 9–16.
4. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Вестник Российских университетов. Математика. — 2021. — Т. 136, № 25. — С. 341–347.
5. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Математические заметки СВФУ. — 2022. — Т. 4, № 29. — С. 3–10.
6. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

REFERENCES

1. Zhang Y., Chen L. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem. AIMS Math., 2023, vol. 8, pp. 1014–1021.
2. Chen H., Cui Y. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives. J. Inequal. Appl., 2023, vol. 2023, pp. 1–13.
3. Abduragimov E.I. Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE. [Abduragimov E.I. Sushchestvovaniye polozhitel'nogo resheniya dvukhtocheynoy krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka]. Vestn. SamU. Yestestvennonauchn. ser. — Vestn. SamU. Natural science ser., 2014, vol. 10, no. 121, pp. 9–16.
4. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order. [Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i yedinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya chetnogo poryadka]. Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika — Bulletin of Russian Universities. Mathematics, 2021, vol. 136, no. 25, pp. 341–347.
5. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation. [Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M.

О сущестvовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка]. *Matematicheskiye zametki SVFU — NEFU Mathematical Notes*, 2022, vol. 4, no. 29, pp. 3–10.

6. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric methods of nonlinear analysis. [Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskiye metody nelineynogo analiza]. Moscow: Nauka, 1975, 512 p.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderkhanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru