

УДК 532.59:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ КАПЛИ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

М. В. Кныш¹, В. В. Морозов², С. Н. Разиньков³¹ — Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны;² — Ярославский государственный аграрный университет;³ — Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Е. Н. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

Аннотация. На основе инверсного подхода при граничных и начальных условиях для потенциалов скоростей и электрического потенциала построена модель нелинейных осцилляций капли с поверхностным электрическим зарядом при движении под действием электростатических сил движение в идеальной несжимаемой диэлектрической среде. С использованием метода многих масштабов получены аналитические выражения для нелинейных осцилляций границы капли при аппроксимации рядами по степеням малого параметра амплитуды и рядами полиномов Лежандра. Определены условия взаимодействия мод капиллярных осцилляций, обуславливающего неустойчивость равновесной формы движущейся заряженной капли.

Ключевые слова: капля с электрическим зарядом, несжимаемая диэлектрическая среда, нелинейные осцилляции, потенциал скорости, электрический потенциал, метод многих масштабов.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF A DROP WITH ELECTRIC CHARGE WHEN MOVING IN A DIELECTRIC MEDIUM

M. V. Knysh, V. V. Morozov, S. N. Razin'kov

Abstract. On the basis of the inverse approach under boundary and initial conditions for velocity potentials and electric potential, a model of nonlinear oscillations of a drop with surface electric charge was built when moving under electrostatic forces in an ideal incompressible dielectric medium. Using the multi-mas-headquarters method, analytical expressions were obtained for nonlinear oscillations of the droplet boundary when approximated by series of degrees of small amplitude parameter and series of Legendre polynomials. Interaction conditions of capillary oscillation modes which causes instability of equilibrium form of moving charged drop are determined.

Keywords: drop with electric charge, incompressible dielectric medium, nonlinear oscillations, velocity potential, electric potential, multiple scale method.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования нелинейных осцилляций капель с электрическими зарядами, совершающих движение в диэлектрической среде, являются ключевым компонентом научных основ анализа закономерностей инициирования атмосферного электричества, спектроскопии термически нестабильных жидкостей и совершенствования технологий жидкометаллической эпитаксии и литографии, распыления лакокрасочных материалов, формирования аэрозольных завес для скрытия объектов от средств оптико-электронного мониторинга [1, 2].

В предлагаемой работе построена модель нелинейных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости при движении с постоянной скоростью и установлены условия возникновения взаимодействия мод капиллярных осцилляций [1], обуславливающих расширение спектра возбуждающихся мод относительно характеристики осцилляций неподвижной капли.

Цель работы — построение модели и установление закономерностей нелинейных осцилляций заряженной капли при движении в диэлектрической среде.

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

При построении модели нелинейных осцилляций капли с поверхностным зарядом Q , совершающей при взаимодействии с внешним электростатическим полем движение в идеальной несжимаемой диэлектрической среде по аналогии с [2, 3] используем инверсный подход.

Будем полагать, что однородная изотропная среда, заполняющая бесконечно протяженное пространство, с диэлектрической проницаемостью ε движется с начальной скоростью $\vec{U}_0$ относительно неподвижной капли единичного радиуса идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости в электростатическом поле. Для постановки задачи возбуждения и определения пространственно-временных параметров мод капиллярных осцилляций зададим сферическую систему координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с центром масс капли.

Базовые уравнения модели возбуждения нелинейных осцилляций находятся при следующих начальных условиях.

1. В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли [4] претерпевает центрально-симметричное (без вариаций по угловой координате φ) возмущение конечной амплитуды, абсолютное значение которой значительно меньше радиуса капли.

2. Возмущение поверхности капли, зависящее от величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела сред, пропорциональное нулевой моде капиллярных осцилляций, представляет капиллярным волновым движением при изменении радиуса капли на интервале времени $t > 0$ по закону [1, 2]

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t), \quad (1)$$

где $|\xi(\theta, t)| \ll 1$.

Как показано в [2], движение жидкости имеет потенциальный характер, поэтому поля скоростей в капле $\vec{V} = \nabla\psi(\vec{r}, t)$ и среде $\vec{U} = \nabla\varphi(\vec{r}, t)$ определяются функциями потенциалов скоростей в капле $\psi(\vec{r}, t)$ и среде $\varphi(\vec{r}, t)$.

Система уравнений для нахождения нелинейных осцилляций границы раздела сред включает в себя уравнения Лапласа [5] для потенциалов скоростей $\psi(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t)$ и электрического потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$:

$$\psi(\vec{r}, t) = 0, \quad \varphi(\vec{r}, t) = 0, \quad \Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

при граничных условиях:

а) для потенциала скорости $\vec{V}$ в центре капли ($r \rightarrow 0$)

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad (3)$$

б) для потенциала скорости $\vec{U}$ в среде и электрического потенциала на бесконечности ($r \rightarrow \infty$)

$$\nabla(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{U}_0, \quad \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad (4)$$

где $\vec{U} = \vec{U}_0$ в момент времени $t = 0$.

Взаимосвязи между потенциалами (2) устанавливаются на границе раздела сред (1) с применением:

а) кинематического равенства нормальных компонент скоростей жидкости в капле и в среде (на границе раздела, устанавливаемой выражением (1))

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta}, \quad (6)$$

б) динамического баланса давлений в капле и среде (при $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} [\nabla \psi(\vec{r}, t)]^2 + P_{in}(\vec{r}, t) + P_E(\vec{r}, t) - P_\sigma = \\ & = - \rho \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\rho}{2} [\nabla \varphi(\vec{r}, t)]^2 + P_{out}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $P_{in}(\vec{r}, t)$ и $P_{out}(\vec{r}, t)$ – входное (в капле) и выходное (в среде) давления,

$$P_E(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon}{8\pi} [\nabla \Phi(\vec{r}, t)]^2 \quad (8)$$

– давление электрического поля заряда капли на границу раздела сред [3],

$$P_\sigma = \text{div } \vec{n}, \quad (9)$$

– давление Лапласа [3], $\vec{n}$ – орт положительной нормали к поверхности капли, ρ – соотношение плотностей жидкости капли и диэлектрической среды;

в) постоянства электрического потенциала на поверхности капли

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_S(t). \quad (10)$$

Калибровка потенциалов (2) и мод капиллярных осцилляций выполняется за счет применения условий:

а) неизменности собственного электрического заряда капли (при $t \geq 0$)

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta, t)} (\vec{n} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, t)) r dr \cos \theta d\theta d\varphi = Q; \quad (11)$$

б) постоянства объема капли (при $t \geq 0$)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta, t)} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}. \quad (12)$$

Условие неподвижности центра масс капли при бесконечной протяженности внешней среды выполняется автоматически, поэтому расчет амплитуды первой (трансляционной) моды и мод более высоких порядков следует проводить при граничных гидродинамических условиях на границе раздела (1).

Начальные условия для поиска нелинейных осцилляций заряженной капли сформулируем, определяя в момент времени $t = 0$ деформацию ее сферической поверхности при начальной скорости движения границы раздела сред, равной нулю. С учетом требований, заданных выражениями (11), (12), они имеют вид

$$\xi(\theta, t = 0) = \xi_0 P_0(\cos \theta) + \tilde{\varepsilon} P_k(\cos \theta), \quad k \geq 2, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

где

$$\xi_0 = -\tilde{\varepsilon}^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\tilde{\varepsilon}^3) \quad (15)$$

– постоянная величина, найденная из условия постоянства объема капли (12), $\tilde{\varepsilon}$ – амплитуда начального возмущения поверхности заряженной капли, являющаяся малым параметром задачи возбуждения нелинейных осцилляций, $P_k(\cos \theta)$ – полином Лежандра k -го порядка ($k \geq 0$).

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Для нахождения нелинейных осцилляций границы раздела сред при решении уравнений (2) при условиях, заданных выражениями (3) – (15), в квадратичном по амплитуде осцилляций приближении используем метод многих масштабов [2].

В соответствии с ним искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ аппроксимируем рядами по степеням малого параметра $\tilde{\varepsilon}$ и рядами полиномов Лежандра при представлении зависимости от различных масштабов времени $T_m = \tilde{\varepsilon}^m t$, $m = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_m), & \psi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_m), \\ \varphi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi^{(m)}(r, \theta, T_m), & \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \theta, T_m). \end{aligned} \quad (16)$$

Производные по времени будем вычислять для полного набора различных масштабов по правилу $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2)$.

В результате подстановки рядов (13) в уравнения краевой задачи (2) – (11) и приравнивания в каждом из полученных выражений слагаемых одного порядка малости получим набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}(\theta, T_m)$, $\psi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $\varphi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $\Phi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $m = 1, 2, \dots$

В нулевом порядке малости задача (2)–(11) имеет вид:

$$\Delta \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0) = 0, \quad \Delta \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0) = 0, \quad (17)$$

где при $r \rightarrow \infty$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta, T_0) \rightarrow 0, \quad \nabla \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0) \rightarrow \vec{U}_0, \quad (18)$$

при $r = 1$

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r} = 0, \quad (19)$$

$$P_{in}(r, \theta, T_0) + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r} \right) - 2 = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial \theta} + P_{out}(r, \theta, T_0), \quad (20)$$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta, T_0) = \Phi_S(T_0), \quad (21)$$

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r} \sin \theta d\theta d\varphi = Q. \quad (22)$$

Решения (17) – (22) для равновесного состояния системы имеют вид:

$$\varphi^{(0)}(r, \theta, T_0) = U \left(r + \frac{1}{2r^2} \right) \cos \theta, \quad (23)$$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta, T_0) = \frac{Q}{\varepsilon r}, \quad (24)$$

В силу линейности уравнений (2) – (4) им должны удовлетворять функции $\psi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $\varphi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $\Phi^{(m)}(r, \theta, T_m)$, $m = 1, 2, \dots$, в (16). На этом основании представим указанные функции для $m \geq 1$ в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\psi^{(m)}(r, \theta, T_m) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(T_m) r^n P_n(\cos \theta); \quad (25)$$

$$\varphi^{(m)}(r, \theta, T_m) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(T_m) r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta); \quad (26)$$

$$\Phi^{(m)}(r, \theta, T_m) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_m) r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta). \quad (27)$$

В аналогичном виде будем искать последовательные поправки $\xi^{(m)}(\theta, T_m)$, $m \geq 1$, к выражению (1), определяющему форму поверхности капли:

$$\xi^{(m)}(\theta, T_m) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_m) P_n(\cos \theta). \quad (28)$$

В приближении первого порядка малости по $\tilde{\varepsilon}$ для определения коэффициентов $E_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $G_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $n \geq 0$, в (25) – (28) система граничных и начальных условий (5) – (12), с учетом (13) приобретает вид:

при $r = 1$:

$$\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} + \\ &+ \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \psi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{dr} \times \\
 & \times \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} + \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \frac{d^2 \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{dr^2} \right) + \\
 & + (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) = \rho \left\{ -\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_0} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right\}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где Δ_Ω – угловая часть оператора Лапласа;

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r} \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) = \Phi_S^{(1)}(T_0, T_1); \quad (32)$$

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0)}{\partial r} \right) \times \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \right] \sin \theta d\theta = 0; \quad (33)$$

при $t = 0$:

$$\xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) = P_1(\cos \theta); \quad (34)$$

$$\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} = 0; \quad (35)$$

$$\int_0^\pi \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \sin \theta d\theta = 0. \quad (36)$$

Заменяя соответствующие функции в (34) – (36) их представлениями из (29) – (33) с учетом (23), (24), формируем бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений, определяющих неизвестные коэффициенты $E_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $G_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $n \geq 0$:

$$M_0^{(1)}(T_0, T_m) = 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_m) = 0; \quad (37)$$

при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 & A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_m) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_m)}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_m)}{\partial T_0^2} + \\
 & + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_m) + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_m)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_m) = 0; \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$E_n^{(1)}(T_0, T_m) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0}; \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 G_n^{(1)}(T_0, T_m) = & -\frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} + \\
 & + \frac{2}{3} U \left[\frac{n}{(2n-1)} M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) - \frac{n}{(2n+3)} M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_m) \right]; \quad (40)
 \end{aligned}$$

где

$$A_n = \frac{9}{4} U^2 \rho \chi(n) \frac{n^2 (n-1) (n-2)}{(2n-3) (2n-1)}; \quad (41)$$

$$C_n = \frac{3}{2} U \rho \chi(n) \frac{n (2n+1)}{2n+3}; \quad (42)$$

$$D_n^{(1)} = \frac{9}{4} U^2 \rho \chi(n) \frac{n^2 (n+1) (n+2)}{(2n+3) (2n+5)}; \quad (43)$$

$$\omega_n^2 = \chi(n) \left(n (n-1) (n+2-W) - \frac{9}{2} U^2 \rho \frac{n^2 ((2n+1) (n^2-1) + 3)}{(2n-1) (2n+1) (2n+3)} \right); \quad (44)$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}; \quad \chi(n) = \left(1 + \rho \frac{n}{n+1} \right)^{-1}; \quad F_n^{(1)}(T_0, T_m) = \frac{Q}{\varepsilon_*} M_n^{(1)}(T_0, T_m);$$

$$\Phi_S^{(1)}(T_0) = 0; \quad U = |\vec{U}|.$$

Система, составленная из уравнений (37) – (42) позволяет найти зависимости аппроксимирующих коэффициентов от временного масштаба T_0 ; их представление при других временных масштабах определяются для следующих порядков малости.

В случае неподвижной среды, когда $U = 0$, линейное взаимодействие мод, согласно (41) – (43), отсутствует. Система связанных дифференциальных уравнений (37) – (40) разделяется на множество несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющих гармонические осцилляции отдельных мод [1, 4].

Таким образом, линейное по малому параметру $\tilde{\varepsilon}$ взаимодействие мод возникает вследствие движения внешней среды. При этом, из (37) – (40) можно установить, что n -ая мода взаимодействует с $(n-2)$ -й, $(n-1)$ -й, $(n+1)$ -й и $(n+2)$ -й модами по аналогии с вариантом взаимодействия мод при плоской границе раздела несмешивающихся идеальных несжимаемых сред, одна из которых поступательно движется параллельно границе раздела [6].

За счет ламинарного обтекания капли с идеальной жидкостью ее сферическая форма преобразуется в сфероид с эксцентриситетом, зависящим от скорости потока и величины заряда [3, 4]. Осцилляции поверхности капли происходят в окрестности равновесной сфероидальной формы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при граничных и начальных условиях для потенциалов скоростей движения в несмешивающихся средах и электрического потенциала получены уравнения и на основе их решения методом многих масштабов установлены закономерности нелинейных осцилляций капли с поверхностным электрическим зарядом в идеальной несжимаемой диэлектрической среде при воздействии электростатических сил. За счет аппроксимации рядами по степеням малого параметра амплитуды и рядами полиномов Лежандра выполнено аналитическое представление колебаний граница капли, позволяющее исследовать нелинейные колебания и оценивать условия равновесного состояния в зависимости от скорости ламинарного обтекающего потока и величины поверхностного заряда. Найдены характеристики взаимодействия мод капиллярных осцилляций, обуславливающего неустойчивость равновесной формы движущейся заряженной капли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коромыслов, В. А. Неустойчивость движущейся заряженной капли во внешнем электростатическом поле / В. А. Коромыслов, А. И. Григорьев, М. В. Рыбакова // Электронная обработка материалов. — 2002. — № 4. — С. 50–54.

2. Рыбакова, М. В. О внутреннем нелинейном резонансе капиллярных осцилляций заряженной капли в диэлектрической среде при многомодовой начальной деформации границы раздела сред / М. В. Рыбакова, С. О. Ширяева, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 2004. — Т. 74, вып. 1. — С. 24–31.
3. Мухина, Е. И. Равновесные формы и критические условия электрогидродинамической неустойчивости пары капель в электрическом поле / Е. И. Мухина, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 1992. — Т. 62, вып. 2. — С. 18–26.
4. Григорьев, А. И. О форме заряженной капли в скрещенных электрическом и гидродинамическом полях / А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, М. В. Рыбакова // Электронная обработка материалов. — 2002. — № 6. — С. 22–25.
5. Электродинамика и распространение радиоволн / В. А. Неганов, О. В. Осипов, С. Б. Раевский, Г. П. Яровой // Под ред. В. А. Неганова и С. Б. Раевского. — М. : Радиотехника, 2005. — 648 с.
6. Белоножко, Д. Ф. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред / Д. Ф. Белоножко, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 2004. — Т. 74, вып. 11. — С. 22–28.

REFERENCES

1. Koromyslov V.A., Grigoriev A.I., Rybakova M.V. Instability of a moving charged droplet in an external electrostatic field. [Koromyslov V.A., Grigor'ev A.I., Rybakova M.V. Neustoychivost' dvizhucheyasya zaryazhennoy kapli vo vneshnem elektrostaticheskoy pole]. *Elektronnaya obrabotka materialov — Electronic processing of materials*, 2002, no. 4, pp. 50–54.
2. Rybakova M.V., Shiryaeva S.O., Grigoriev A.I. On the internal nonlinear resonance of capillary oscillations of a charged drop in a dielectric medium at multimode initial deformation of the interface of media. [Rybakova M.V. Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. O vnutrennem nelineynom rezonanse kapillyarnykh oscillyatsiy zaryazhennoy kapli v dielektricheskoy srede pri mnogomodovoy nachal'noy deformatsii granicy razzdelas sred]. *Zhurnal tehnikheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 2004, vol. 74, no. 1, pp. 24–31.
3. Mukhina E.I., Grigoriev A.I. Equilibrium forms and critical conditions of electrohydrodynamic instability of a pair of droplets in an electric field. [Muhina E.I., Grigor'ev A.I. Ravnovesnye formy i kriticheskie usloviya elektrogidrodinamicheskoy neustoychivosti pary kapel' v elektricheskoy pole]. *Zhurnal tehnikheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1992, vol. 62, no. 2, pp. 18–26.
4. Grigoriev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. On the shape of a charged drop in crossed electric and hydrodynamic fields. [Grigor'ev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. O forme zaryazhennoy kapli v skreshennykh elektricheskoy i gidrodinamicheskoy polyah]. *Elektronnaya obrabotka materialov — Electronic processing of materials*, 2002, no. 6, pp. 22–25.
5. Neganov V.A., Osipov O.V., Raevskiy S.B., Yarovoy G.P. Electrodynamics and radio wave propagation. [Neganov V.A., Osipov O.V., Raevskiy S.B., Yarovoy G.P. Elektrodinamika i rasprostraneniye radiovoln]. Moscow: Radio engineering, 2005, 648 p.
6. Belonozhko D.F., Grigoriev A.I. On the correct form of recording the law of conservation of the amount of substance on the moving interface of two liquid media. [Belonozhko D.F., Grigor'ev A.I. O korrektnoy forme zapisi zakona sohraneniya kolichestva vechestva na dvizhucheyasya granice razdelas dvuh zhidkiy sred]. *Zhurnal tehnikheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 2004, vol. 74, no. 11, pp. 18–26.

Кныш Марина Владимировна, Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, доцент кафедры физики, Ярославль, Россия
E-mail: mariku2713@mail.ru

Knysh Marina V., Yaroslavl Higher Military School of Air Defense, Associate Professor of the Department of Physics, Yaroslavl, Russia
E-mail: mariku2713@mail.ru

Морозов Вадим Владимирович, Ярославский государственный аграрный университет, первый проректор — проректор по научной работе и цифровой трансформации, Ярославль, Россия
E-mail: info@yarcx.ru

Morozov Vadim V., Yaroslavl State Agricultural University, First Vice-Rector — Vice-Rector for Research and Digital Transformation, Yaroslavl, Russia
E-mail: info@yarcx.ru

Разиньков Сергей Николаевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина” (г. Воронеж), профессор кафедры электрооборудования (и оптико-электронных систем), Воронеж, Россия
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru

Razinkov Sergey N., Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin (Voronezh), Professor, Department of Electrical Equipment (and Optoelectronic Systems), Voronezh, Russia
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru