

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ГАЗОВЗВЕСЬЮ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОНЦЕНТРАЦИИ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Д. А. Тукмаков

Казанский научный центр РАН

Поступила в редакцию 11.02.2024 г.

Аннотация. В данной работе представлена численная модель распространения ударной волны в газовзвеси. Представлены одномерные и двухмерные математические модели динамики запыленных сред. Математические модели реализовывали континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред – для каждой из компонент смеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения. Несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый теплопроводный газ. Математическая модель учитывала обмен импульсом и теплообмен между компонентами смеси. Уравнения математической модели решались явным конечно-разностным методом Мак-Кормака для получения монотонного решения применялась схема нелинейной коррекции. Было выявлено, что в случае периодического распределение концентрации дисперсной компоненты, при прохождении ударной волны по газовзвеси происходит формирование физических полей несущей среды и дисперсной компоненты с периодической структурой.

Ключевые слова: метод конечных-разностей, нелинейная коррекция, уравнение Навье-Стокса, многофазные среды, ударные волны.

NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERACTION OF A SHOCK WAVE WITH A GAS SUSPENSION WITH A PERIODIC DISTRIBUTION OF THE DISPERSED PHASE CONCENTRATION

D. A. Tukmakov

Abstract. This paper presents a numerical model of shock wave propagation in a gas suspension. One-dimensional and two-dimensional mathematical models of the dynamics of dusty media are presented. Mathematical models implemented a continuum technique for modeling the dynamics of inhomogeneous media—for each component of the mixture, a complete hydrodynamic system of equations of motion was solved. The carrier medium was described as a viscous, compressible heat-conducting gas. The mathematical model took into account the exchange of momentum and heat exchange between the components of the mixture. The equations of the mathematical model were solved by the explicit finite-difference McCormack method; a nonlinear correction scheme was used to obtain a monotonic solution. It was found that in the case of a periodic distribution of the concentration of a dispersed component, when a shock wave passes through a gas suspension, the formation of physical fields of the carrier medium and a dispersed component with a periodic structure occurs.

Keywords: finite-difference method, nonlinear correction, Navier-Stokes equation, multiphase media, shock waves.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из приложений математики является моделирование динамики сплошных сред [1–22]. Так как часто задачи гидродинамики имеют нелинейный характер для интегрирования уравнений гидродинамики применяются численные методы. Частным случаем сплошных сред являются неоднородные среды. В отличие от классической гидродинамики [1] в гидродинамике неоднородных сред [2] течения определяются взаимодействием между компонентами смеси. В монографии [2] представлена общая теория динамики многофазных сред. В монографии [3] исследованы проблемы движения двухфазных сред – газожидкостных сред с большими скоростями. Изложены теоретические основы, расчетные методы и прикладные задачи. В монографии [4] изложены вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах. Получены уравнения и найдена структура ударной волны в смеси газов и двухфазной смеси. В монографии [5] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели и проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред. В монографии [6] разработаны математические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц. Исследование динамических процессов в неоднородных жидких средах имеет широкое применение в промышленности, например, в ядерной энергетике, в химической технологии, нефтяных и газовых хозяйствах [7–9]. В исследовании [10] численно моделируется взаимодействие ударной волны и пузырьков в сжимаемом многофазном потоке. Численная модель позволяла анализировать структуру потока и массоперенос компонент смеси. Другим видом течений неоднородных сред являются течения газокапельных и запыленных сред – газовзвесей. В работе [11] изучались физические механизмы образования областей повышенной концентрации частиц в турбулентных потоках, при обтекании двухфазными течениями тел, а также в свободных концентрированных вихрях. В исследовании [12] рассматривается турбулентное течение смеси газа и твердых частиц в канале с проницаемыми стенками, которое отражает основные особенности течений в камере сгорания ракетного двигателя на твердом топливе. В публикации [13] исследованы особенности распространения пламени в газообразных химически активных смесях, содержащих химически нейтральные микрочастицы. В случае равномерного распределения частиц в смеси поглощаемое вблизи фронта пламени излучение, повышая температуру перед фронтом, увеличивает скорость пламени, не изменяя режим горения. При неравномерном распределении частиц поглощение излучения в области высокой концентрации частиц может приводить к дистанционному воспламенению смеси и при определенных условиях — к возникновению детонации.

Анализ работ посвященных динамике газовзвесей демонстрирует, что в связи с проблемами промышленных технологий представляет интерес математическое моделирование течений газовзвесей с учетом эффектов межфазного взаимодействия. В данной работе моделировалось распространение ударной волны в неоднородной среде, где концентрация частиц имеет периодическое распределение. Математическая модель учитывала межфазный теплообмен и межфазный обмен импульсом. Исследовано влияние распределения концентрации дисперсной фазы на параметры динамики несущей среды.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В работе применяется континуальная математическая модель динамики газовзвеси для двухтемпературной двухскоростной монодисперсной смеси газа и частиц [14–18]. Система уравнений динамики газовзвеси включает в себя уравнения неразрывности для несущей сре-

ды (1):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Для описания сохранения импульса вязкого сжимаемого газа интегрировалось система уравнений пространственных компонент импульса газа (4),(5); учитывался обмен импульсом между несущей средой и дисперсной компонентой — F_x, F_y :

$$\frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial y} = -F_x + \alpha \partial p / \partial x \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = -F_y + \alpha \partial p / \partial y \quad (3)$$

В систему уравнений динамики несущей среды входит уравнение сохранения энергии для динамики вязкого газа (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \frac{\partial ((e_1 + p - \tau_{xx}) u_1 - \tau_{xy} v_1 + \lambda \partial T_1 / \partial x)}{\partial x} + \frac{\partial ((e_1 + p - \tau_{yy}) v_1 - \tau_{xy} u_1 + \lambda \partial T_1 / \partial y)}{\partial y} = \\ = -Q - |F_x| (u_1 - u_2) - |F_y| (v_1 - v_2) + \alpha \partial (p u_1) / \partial x + \alpha \partial (p v_1) / \partial y \end{aligned} \quad (4)$$

Тензоры вязких напряжений в двухмерном случае записываются, через составляющие вектора скорости следующим образом: $\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right)$, $\tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right)$, $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$, $D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$.

В континуальной методике моделирования динамики неоднородных сред динамика дисперсной фазы описывается как динамика однородной среды, для чего вводится понятие средней плотности [2] $\rho_2 = \alpha_2 \rho_{20}$, где $\rho_2(t, x, y) = \alpha_2(t, x, y) \rho_{20}$, $\rho_{20} = \text{const}$ — физическая плотность материала дисперсной компоненты смеси. Для средней плотности записывались уравнения сохранения (5):

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Также для течения газозвеси записываются уравнения сохранения импульса дисперсной фазы (6), (7):

$$\frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_2 u_2 v_2)}{\partial y} = F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2 v_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_2 v_2^2)}{\partial y} = F_y - \alpha \partial p / \partial y \quad (7)$$

Для дисперсной фазы также решаются уравнения сохранения энергии (8):

$$\frac{\partial (e_2)}{\partial t} + \frac{\partial (e_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (e_2 v_2)}{\partial y} = Q \quad (8)$$

Составляющие вектора межкомпонентного обмена импульсом в двухмерном случае — F_x, F_y :

$$F_x = F_{xad} + F_{xA} + F_{xam}, \quad F_{xad} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2),$$

$$F_{xA} = \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{xam} = 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right),$$

$$F_y = F_{yad} + F_{yA} + F_{yam}, F_{yad} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(d)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2),$$

$$F_{yA} = \alpha_i \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{yam} = 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right),$$

Здесь индексы *ad*, *A*, *am* — обозначают соответственно силы аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс [2]. Здесь p , ρ_1 , u_1 , v_1 — давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y соответственно; T_1 , e_1 — температура и полная энергия газа; ρ_2 , T_2 , e_2 , u_2 , v_2 — средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы в направлении осей x , y ; μ , λ — вязкость и теплопроводность газа. Температуры и давление несущей среды определяются выражениями $T_1 = (\gamma - 1)(e_1/\rho_1 - 0.5(u_1^2 + v_1^2)/R)$, где R — газовая постоянная несущей фазы, $p = (\gamma - 1)(e_1 - 0.5\rho_1(u_1^2 + v_1^2))$. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$, где C_{p2} — удельная теплоемкость единицы массы вещества i -ой фракции дисперсной фазы. Теплообмен между несущей и дисперсной фазой описывается выражением $-Q = 6\alpha\lambda Nu_1(T_1 - T_2)/d^2$. Здесь Nu_1 — относительное число Нуссельта [6], d — диаметр частицы. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительного числа Маха — M_1 , относительного числа Рейнольдса — Re_1 и числа Прандтля — Pr [5]:

$$M_1 = |V_1 - V_2|/c, V_i = [u_i, v_i], Pr = C_p \mu \lambda^{-1}, Nu_1 = 2 \exp(-M_1) + 0.459 Re_1^{0.55} Pr^{0.33}$$

Полученные системы дифференциальных уравнений в частных производных — (1)–(8) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [18, 19] с расщеплением по пространственным направлениям [18, 20] и схемой нелинейной коррекции [21, 22].

Монотонность решения достигалась с помощью применения алгоритма нелинейной коррекции [21, 22] к вектору искомых функций — $U = (\rho_1, u_1, v_1, e_1, \rho_2, u_2, v_2, e_2)^T$ системы уравнений после перехода на новый временной слой при $t = t^{n+1}$. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты x , а затем вдоль координаты y в расчетной области [21, 22]. Нижний индекс обозначает номер узла сетки соответственно вдоль x или y : $U_j = \tilde{U}_j + k(\delta\Phi_{j+1/2} - \delta\Phi_{j-1/2})$, где $\delta\Phi_{j+1/2} = \delta\tilde{U}_{j+1/2}$, если $(\delta\tilde{U}_{j-1/2} \cdot \delta\tilde{U}_{j+1/2}) < 0$, или $(\delta\tilde{U}_{j+1/2} \cdot \delta\tilde{U}_{j+3/2}) < 0$, и $\delta\Phi_{j+1/2} = 0$ в любом другом случае. Здесь использованы обозначения: $\delta\tilde{U}_{j-1/2} = \tilde{U}_j - \tilde{U}_{j-1}$, $\delta\tilde{U}_{j+1/2} = \tilde{U}_{j+1} - \tilde{U}_j$, $\delta\tilde{U}_{j+3/2} = \tilde{U}_{j+2} - \tilde{U}_{j+1}$, где $\tilde{U}_j$ — значение функции после перехода на $(n+1)$ -ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент $k = 0.125$.

Сопоставление расчетов ударно-волновой динамики газовзвеси с известными из литературы результатами численных расчетов проведено в работе [14]. Сопоставление физического эксперимента ударно-волновой динамики газовзвеси с численными расчетами проведенными описанной в работе численной моделью проведено в работе [15]. Сопоставление результатов численных расчетов акустических колебаний газовзвеси с результатами физического эксперимента проведено в работе [16]. Исследование сеточной сходимости численного алгоритма проведено в работе [17].

В двухмерной конечно-разностной аппроксимации на границах расчетной области для газа и дисперсной фазы задавались граничные условия:

$$u_1(t, 1, j) = 0, u_2(t, 1, j) = 0, v_1(t, 1, j) = 0, v_2(t, 1, j) = 0, u_1(t, N_x, j) = 0, u_2(t, N_x, j) = 0, \\ v_1(t, N_x, j) = 0, v_2(t, N_x, j) = 0, u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), u_2(t, i, 1) = u_2(t, i, 2),$$

$$\begin{aligned}
v_1(t, i, 1) &= v_1(t, i, 2), v_2(t, i, 1) = v_2(t, i, 2), \\
u_1(t, i, N_y) &= u_1(t, i, N_y - 1), u_2(t, i, N_y) = u_2(t, i, N_y - 1), \\
v_1(t, i, N_y) &= v_1(t, i, N_y - 1), v_2(t, i, N_y) = v_2(t, i, N_y - 1), \\
\rho_1(t, 1, j) &= \rho_1(t, 2, j), \rho_2(t, 1, j) = \rho_2(t, 2, j), \\
\rho_1(t, N_x, j) &= \rho_1(t, N_x - 1, j), \rho_2(t, N_x, j) = \rho_2(t, N_x - 1, j), \\
\rho_1(t, i, 1) &= \rho_1(t, i, 2), \rho_2(t, i, 1) = \rho_2(t, i, 2), \\
\rho_1(t, i, N_y) &= \rho_1(t, i, N_y - 1), \rho_2(t, i, N_y) = \rho_2(t, i, N_y - 1), \\
e_1(t, 1, j) &= e_1(t, 2, j), e_2(t, 1, j) = e_2(t, 2, j), \\
e_1(t, N_x, j) &= e_1(t, N_x - 1, j), e_2(t, N_x, j) = e_2(t, N_x - 1, j), \\
e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), e_2(t, i, 1) = e_2(t, i, 2), \\
e_1(t, i, N_y) &= e_1(t, i, N_y - 1), e_2(t, i, N_y) = e_2(t, i, N_y - 1), \\
p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j), \\
p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), p(t, i, N_y) = p(t, i, N_y - 1).
\end{aligned}$$

Здесь N_x и N_y количество узлов в x и y направлениях соответственно.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве газозвеси рассматривался воздух со взвешенными в нем частицами кварцевого песка. Физическая плотность кварцевого песка $\rho_{20} = 2500 \text{ кг/м}^3$, диаметр частиц — $d = 2 \text{ мкм}$, объемное содержание частиц $\alpha_0 = 0.001$. При моделировании задавались следующие параметры несущей фазы газозвеси: $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной — $\lambda = 0.02553 \text{ Вт/(м·К)}$, динамическая вязкость несущей среды — $\mu = 1,7210^{-5} \text{ Па·с}$, $\gamma = 1.4$, $R = 8.31 \text{ Дж/(моль·К)}$. Область представляла собой трубу, разделенную на две части диафрагмой. В левой части трубы задавалось повышенное давление. Поперечная составляющая скорости газа и дисперсной фазы приравнивались нулю — $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, таким образом двухмерная математическая модель динамики газозвеси редуцировалась до одномерной. В серии проведенных численных расчетов предполагалось, что распределение дисперсной фазы в камере низкого давления отличается от её распределения в камере высокого давления. Моделируется следующий процесс: в камере высокого давления — $p_1 = 98 \text{ кПа}$, в камере низкого давления — $p_2 = 9.8 \text{ кПа}$. Распределение средней плотности дисперсной фазы вдоль оси x описывается периодическим законом: $\rho_2(x) = \rho_{20}\alpha_0(1 + \sin(20\pi(x - L/2)))$, $x > L/2$, $\rho_2(x) = \rho_{20}\alpha_0$, $x \leq L/2$, на рисунке 1 представлено пространственное распределение средней плотности дисперсной фазы в начальный момент времени — $t = 0$. Рассмотрим влияние периодического распределения дисперсной фазы на параметры динамики газозвеси при прохождении прямого скачка уплотнения через область периодически распределенной дисперсной фазы.

На рис. 2 (а, б) представлены распределения параметров динамики несущей и дисперсной фазы, при распространении ударной волны по газозвеси с периодическим распределением средней плотности дисперсной фазы формируется периодическая структура характеристик динамики компонент газозвеси — скорости дисперсной фазы и плотности несущей среды.

Явление связано с тем, что при прохождении спутным потоком газа локальных максимумов плотности дисперсной фазы, газ из-за межфазного взаимодействия с дисперсной фазой, теряет свою скорость. При этом происходит переход кинетической энергии газа в потенциальную, за счет чего происходит локальный рост давления — рис. 3. Следовательно, чередование

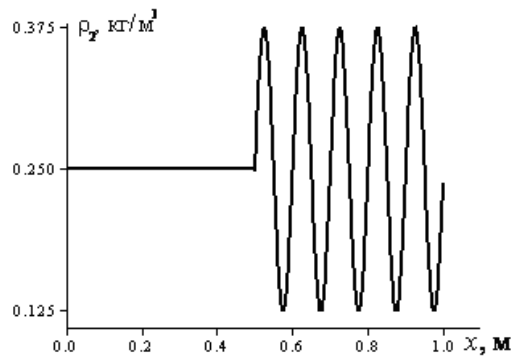
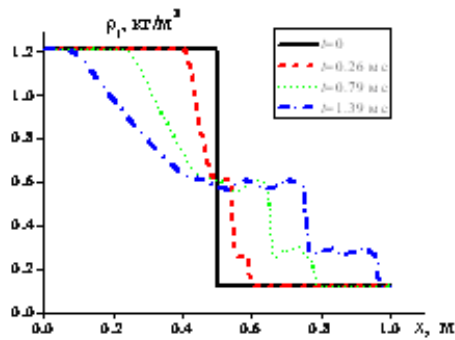
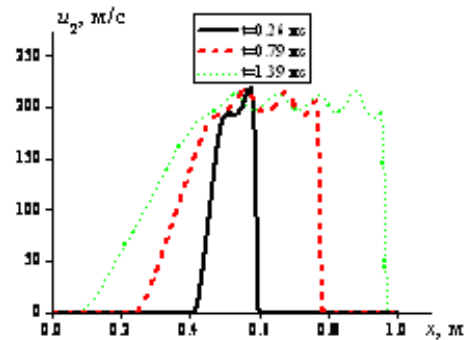


Рис. 1. Начальное распределение средней плотности дисперсной фазы.



а



б

Рис. 2. Распределения плотности и несущей среды — рис. 2 а и скорости дисперсной фазы — рис. 2 б в различные моменты времени.

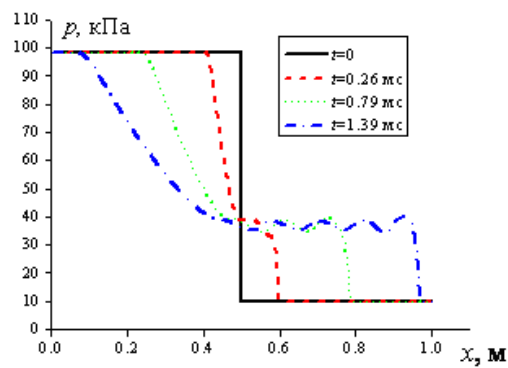


Рис. 3. Распределения давления газа в различные моменты времени.

локальных максимумов и минимумов средней плотности дисперсной фазы приводит к формированию периодической структуры в возмущении движущемся по неоднородной среде.

Для моделирования ударно-волновых течений двухмерной математической моделью используются параметры несущей среды и дисперсной фазы аналогичные течению в одномерном приближении. На рисунке 3 представлено распределение средней плотности дисперсной фазы в начальный момент времени, распределение средней плотности дисперсной фазы в двухмерной области описывается периодическим законом: $\rho_2(x,y) = \rho_{20}\alpha_0(1 + \sin(20\pi(x - L/2)))$, $x > L/2$, $\rho_2(x,y) = \rho_{20}\alpha_0$, $x \leq L/2 - t = 0$.

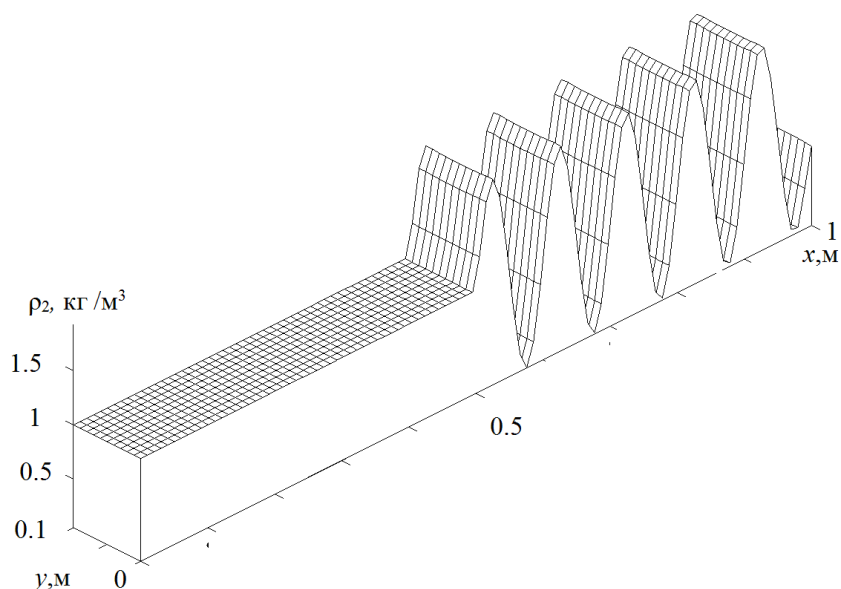


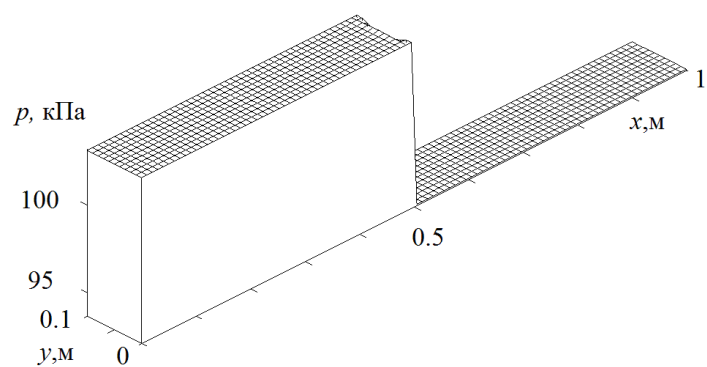
Рис. 4. Пространственное распределение давления газа и плотности дисперсной фазы в двухмерном случае.

Предполагалось, что в камере высокого давления давление газа составляет $p_2 = 103$ кПа, в камере низкого давления давление газа составляет $p_1 = 94$ кПа. — рис. 4,а; в камеру низкого давления распространяется волна сжатия, в камеру высокого давления волна разрежения [1]; по мере прохождения ударной волны по газозвеси с периодическим распределением средней плотности дисперсной фазы формируется неравномерная поверхность давления газа — рис. 4,б–г. На поверхности давления газа между передним краем волны сжатия и передним краем волны разрежения, наблюдаются участки с повышением и понижением значений давления газа.

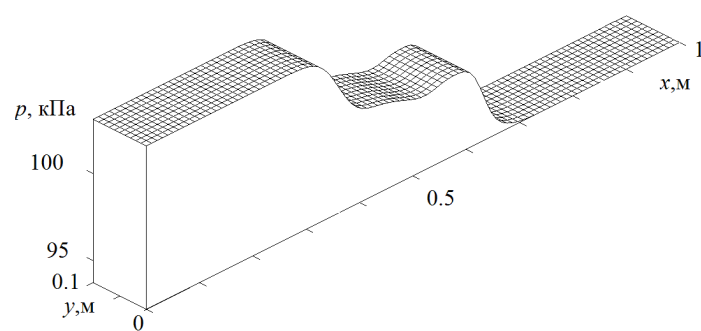
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численно моделировалось движения ударной волны по газозвеси с большой массовой долей дисперсной фазы и периодическим распределением концентрации дисперсных включений. Выявлено, что при движении возмущения давления газа в газозвеси с периодическим распределением средней плотности дисперсной фазы, за счет межфазного взаимодействия, газодинамические функции несущей среды и дисперсной фазы приобретают периодическую структуру. Выявленные закономерности возможно использовать как при моделировании течений газозвесей с большим объемным содержанием дисперсной фазы так и при расчетах аппаратов и технологических процессов связанных с динамикой неоднородных сред.

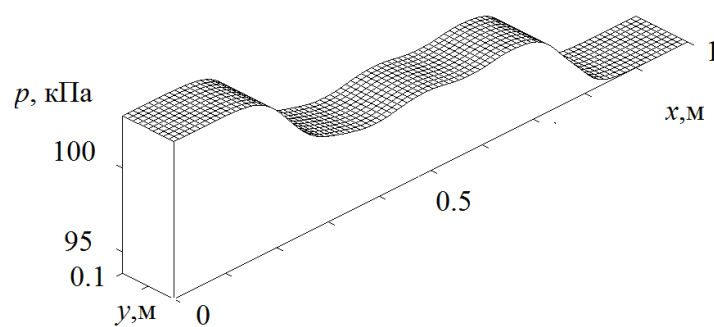
Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского



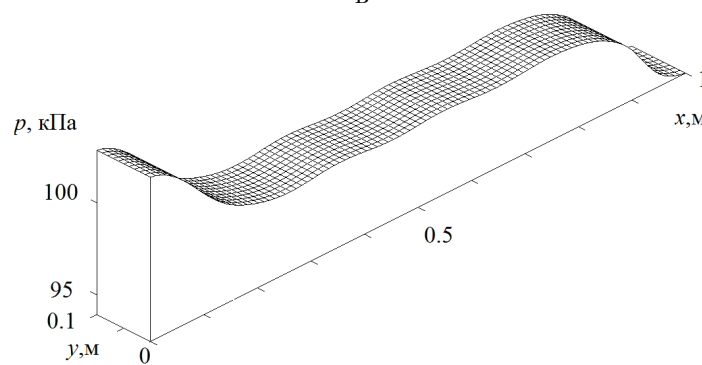
а



б



в



г

Рис. 5. Пространственное распределение давления в ударной трубе в различные моменты времени: а — $t = 0$, б — $t = 0.000731$ с; в — $t = 0.00146$ с; г — $t = 0.00219$ с.

центра Казанского научного центра Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лоицянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лоицянский. — М. : Дрофа, 2003. — 784 с.
2. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. — М. : Наука, 1978. — 336 с.
3. Дейч, М. Е. Газодинамика двухфазных сред / М. Е. Дейч, Г. А. Филиппов. — М. : Энергоиздат, 1981. — 472 с.
4. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. П. Киселев и др. — Новосибирск: "Наука", 1992. — 261 с.
5. Кутушев, А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А. Г. Кутушев. — Санкт-Петербург : Недра, 2003. — 284 с.
6. Федоров, А. В. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов / А. В. Федоров, В. М. Фомин, Т. А. Хмель. — Новосибирск : Параллель, 2015. — 301 с.
7. Шагапов, В. Ш. К теории процесса вымывания газа из гидрата в реакторе непрерывного действия / В. Ш. Шагапов, А. С. Чиглинцева, Г. А. Кунсбаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 46–55.
8. Коледин, В. В. О неустойчивости парового пузырька для некоторых щелочных металлов на линии насыщения / В. В. Коледин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 1. — С. 5–13.
9. Русинов, А. А. Математическая модель процесса всплытия одиночного пузырька газа в водной среде / А. А. Русинов, Е. В. Александров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 2. — С. 54–62.
10. Lin Yoo, Y. Numerical investigation of an interaction between shock waves and bubble in a compressible multiphase flow using a diffuse interface method / Y. Lin Yoo, S. Hong-Gye // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2018. — V. 127. — P. 210–221.
11. Вараксин, А. Ю. Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках / А. Ю. Вараксин // Теплофизика высоких температур. — 2014. — Т. 52, № 5. — С. 777–796.
12. Волков, К. Н. Нестационарное турбулентное течение газовзвеси в канале при наличии вдува в условиях вынужденных колебаний давления / К. Н. Волков // Прикладная механика и техническая физика. — 2013. — Т. 54, № 2. — С. 65–80.
13. Иванов, М. Ф. Аномальное распространение пламени в горючих газовзвесах / М. Ф. Иванов, А. Д. Киверин, С. Г. Пиневич // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. : Естественные науки. — 2015. — Т. 62, № 5. — С. 51–68.
14. Губайдуллин, Д. А. Численное исследование эволюции ударной волны в газовзвеси с учетом неравномерного распределения частиц / Д. А. Губайдуллин, Д. А. Тукмаков // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 10. — С. 109–119.
15. Нигматулин, Р. И. Ударно-волновой раздет газовзвесей / Р. И. Нигматулин, Д. А. Губайдуллин, Д. А. Тукмаков // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 418–421.
16. Тукмаков, Д. А. Сопоставление численных расчетов континуальной математической модели динамики монодисперсного аэрозоля в акустическом резонаторе – закрытой трубе с физическим экспериментом / Д. А. Тукмаков // Вестник Омского университета. — 2022. — Т. 27, № 2. — С. 40–46.
17. Тукмаков, Д. А. Исследование сеточной сходимости явного метода Мак-Кормака, применённого к моделированию течения электрически заряженного аэрозоля, вызванного движением дисперсных частиц под действием внутреннего электрического поля / Д. А. Тук-

маков // Вестник Московского государственного областного университета. Сер. : Физика-математика. — 2021. — № 1. — С. 39–53.

18. Тукмаков, Д. А. Численное исследование влияния внутреннего электрического поля дисперсной компоненты на распространение плоской ударной волны из двухфазной запыленной среды в чистый газ / Д. А. Тукмаков, Н. А. Тукмакова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2020. — № 4. — С. 112–123.

19. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. — М. : Мир, 1991. — 551 с.

20. Ковеня, В. М. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. — Новосибирск : Наука, 1990. — 247 с.

21. Музафаров, И. Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И. Ф. Музафаров, С. В. Утюжников // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 3. — С. 74–83.

22. Тукмаков, А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе / А. Л. Тукмаков // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2006. — № 4. — С. 33–36.

REFERENCES

1. Loicyanskij L.G. Mechanics of liquid and gas. [Loicyanskij L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza]. Moscow: Drofa, 2003, 784 p.

2. Nigmatulin R.I. Fundamentals of mechanics of heterogeneous media. [Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennyh sred]. Moscow: Nauka, 1978, 336 p.

3. Dejch M.E., Filippov G.A. Gas dynamics of two-phase media. [Dejch M.E., Filippov G.A. Gazodinamika dvuhfaznyh sred]. Moscow: Energoizdat, 1981, 472 p.

4. Kiselev C.P., Ruev G.A., Trunev A.P., Fomin V.M., Shavaleev M.S. Shock-wave processes in two-component and two-phase media. [Kiselev C.P., Ruev G.A., Trunev A.P., Fomin V.M., Shavaleev M.S. Udarно-volnovye processy v dvuhkomponentnyh i dvuhfaznyh sredah]. Novosibirsk: "Nauka", 1992, 261 p.

5. Kutushev A.G. Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media. [Kutushev A.G. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah]. Sankt-Peterburg: Nedra, 2003, 284 p.

6. Fedorov A.V., Fomin V.M., Hmel T.A. Volnovye processy v gazovzvesyakh chastic metallov. [Fedorov A.V., Fomin V.M., Hmel T.A. Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk: Parallel, 2015, 301 p.

7. Shagapov V.S., Chiglinceva A.S., Kunsbaeva G.A. On the theory of the process of gas leaching from hydrate in a continuous reactor. [Shagapov V.S., Chiglinceva A.S., Kunsbaeva G.A. K teorii processa vymyvaniya gaza iz gidrata v reaktore nepreryvnogo dejstviya]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 1, pp. 46–55.

8. Koledin V.V. On the instability of a vapor bubble for some alkali metals on the saturation line. [Koledin V.V. O neustojchivosti parovogo puzyr'ka dlya nekotoryh shchelochnyh metallov na linii nasyshcheniya]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2016, no. 1, pp. 5–13.

9. Rusinov A.A., Alexandrov E.V. Mathematical model of the process of ascent of a single gas bubble in an aquatic environment. [Rusinov A.A., Alexandrov E.V. Matematicheskaya model' processa vsplytiya odinochnogo puzyr'ka gaza v vodnoj srede]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2017, no. 2, pp. 54–62.

10. Lin Yoo Y., Hong-Gye S. Numerical investigation of an interaction between shock waves and

bubble in a compressible multiphase flow using a diffuse interface method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 127, pp. 210–221.

11. Varaksin A.Y. Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows. [Varaksin A.YU. Klasterizaciya chastic v turbulentnyh i vihrevykh dvuhfaznyh potokah]. *Teplofizika vysokih temperatur — High Temperature*, 2014, vol. 52, no. 5, pp. C. 777–796.

12. Volkov K.N. Unsteady turbulent flow of a gas suspension in a channel in the presence of injection under conditions of forced pressure fluctuations. [Volkov K.N. Nestacionarnoe turbulentnoe techenie gazovzvesi v kanale pri nalichii vduva v usloviyah vyzvannykh kolebaniy davleniya]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied mechanics and technical physics*, 2013, no. 2, pp. 65–80.

13. Ivanov M.F., Kiverin A.D., Pinevich S.G. Abnormal flame propagation in flammable gas suspensions. [Ivanov M.F., Kiverin A.D., Pinevich S.G. Anomal'noe rasprostranenie plameni v goryuchih gazovzvesyakh]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Bauman. Seriya: Estestvennye nauki — Bulletin of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman. Series: Natural Sciences*, 2015, no. 5, pp. 51–68.

14. Gubajdullin D.A., Tukmakov D.A. Numerical investigation of the evolution of a shock wave in a gas suspension with consideration for the nonuniform distribution of the particles. [Gubajdullin D.A., Tukmakov D.A. Chislennoe issledovanie evolyucii udarnoj volny v gazovzvesi s uchetom neravnomernogo raspredeleniya chastic]. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical modeling*, 2014, vol. 26, no. 10, C. 109–119.

15. Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A. Shock Wave Dispersion of Gas-Particle Mixtures. [Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A. Udarno-volnovoy razdet gazovzvesej]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 466, no. 4, pp. 418–421.

16. Tukmakov D.A. Comparison of numerical calculations continuum mathematical model of the dynamics of a monodisperse aerosol in an acoustic resonator – a closed pipe with a physical experiment. [Tukmakov D.A. Sopostavlenie chislennykh raschetov kontinual'noj matematicheskoy modeli dinamiki monodispersnogo aerolya v akusticheskom rezonatore – zakrytoj trube s fizicheskim eksperimentom]. *Vestnik Omskogo universiteta — Bulletin of Omsk University*, 2022, vol. 27, no. 2, pp. 40–46.

17. Tukmakov D.A. Study of the grid convergence of the explicit McCormack method applied to modeling the flow of an electrically charged aerosol caused by the movement of dispersed particles under the action of an internal electric field. [Tukmakov D.A. Issledovanie setochnoy skhodimosti yavnogo metoda Mak-Kormaka, primenyonnogo k modelirovaniyu techeniya elektricheskii zaryazhennogo aerolya, vyzvannogo dvizheniem dispersnykh chastic pod dejstviem vnutrennego elektricheskogo polya]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika — Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 39–53.

18. Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Numerical study of the influence of the internal electric field of a dispersed component on the propagation of a plane shock wave from a two-phase dusty medium into a pure gas. [Tukmakov D.A., Tukmakova N.A. Chislennoe issledovanie vliyaniya vnutrennego elektricheskogo polya dispersnoj komponenty na rasprostranenie ploskoj udarnoj volny iz dvuhfaznoj zapylennoy sredy v chistyj gaz]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2020, no. 4, pp. 112–123.

19. Fletcher C.A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. [Fletcher K. Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. T. 2]. Moscow: Mir, 1991, 551 p.

20. Kovenya V.M., Tarnavskij G.A., Chernyj S.G. Application of the splitting method in aerodynamics problems. [Kovenya V.M., Tarnavskij G.A., Chernyj S.G. Primenenie metoda rasshchepleniya v zadachah aerodinamiki]. Novosibirsk: Nauka, 1990, 247 p.

21. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of compressible gas. [Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Primenenie kompaktnykh raznostnykh skhem k issledovaniyu nestacionarnykh techenij szhimaemogo gaza]. *Mathematical modeling — Matematicheskoe modelirovanie*, 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74–83.

22. Tukmakov A.L. Numerical modeling of acoustic flows during resonant gas oscillations in a closed pipe. [Tukmakov A.L. Chislennoe modelirovanie akusticheskikh techenij pri rezonansnykh kolebaniyakh gaza v zakrytoj trube]. *News of higher educational institutions. Aviation technology — Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika*, 2006, no. 4, pp. 33–36.

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред Федерального научного центра “Казанский научный центр Российской академии наук”, Казань, Россия
E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Tukmakov Dmitry Alekseevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory of Continuum Mechanics, Federal Scientific Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russia
E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru