УДК 517.988.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В. С. Секованов[1], **Л. А. Секованова**[2]

— *Костромской государственный университет;*
[2] — *Костромская государственная сельскохозяйственная академия*

Поступила в редакцию 10.02.2024 г.

Аннотация. В статье представлены результаты исследования динамики семейства итерированных рациональных функций. Исследованы орбиты точек при различных значениях параметра, выявлена структура неподвижных точек данного семейства. Разработаны алгоритмы построения множеств Жюлиа и заполняющих множеств Жюлиа, представлена визуализация этих множеств при определенных значениях параметра. Разработан алгоритм построения множества Мандельброта, выявлено обрамление множества Мандельброта и алгоритм его построения.

Ключевые слова: неподвижная точка, структура неподвижных точек, множество Жюлиа, заполняющее множество Жюлиа, орбита точки, множество Мандельброта, обрамление множества Мандельброта.

STUDYING THE DYNAMICS OF A SOME FAMILY OF RATIONAL FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

V. S. Sekovanov, L. A. Sekovanova

Abstract. The article presents the results of a study of the dynamics of a family of iterated rational functions. The orbits of points at different values of the parameter were studied, and the structure of fixed points of this family was revealed. Algorithms for constructing Julia sets and filling Julia sets have been developed, and visualization of these sets is presented for certain parameter values. An algorithm for constructing the Mandelbrot set has been developed, the framing of the Mandelbrot set and the algorithm for its construction have been identified.

Keywords: Fixed point, structure of fixed points, Julia set, filling Julia set, orbit of a point, Mandelbrot set, framing of the Mandelbrot set.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развивается новое направление науки — дискретные динамические системы, одной из составляющих которого является голоморфная динамика. Важнейшими объектами изучения в голоморфной динамике являются множества Жюлиа, структура неподвижных точек, множества Мандельброта и их обрамления. Связана голоморфная динамика и с новой дисциплиной современной математики — фрактальной геометрией, так как множества Жюлиа во многих случаях являются фракталами. Граница множества Мандельброта также имеет фрактальную структуру. В настоящее время с помощью множеств Жюлиа и множеств Мандельброта разрабатываются математические модели в физике, экономике и других дисциплинах.

Изучению указанных объектов посвящены многочисленные исследования, среди которых укажем [1–26].

Отметим, что форма множества Жюлиа зависит от структуры неподвижных точек, порождающей его функции. Доминирующими фигурами множеств Мандельброта у полиномов являются их обрамления, которые исследовались Р. Кроновером, Д. Милнором, Х.-О. Пайтгеном и П. Х. Рихтером, а также авторами [21, 22].

Р. Кроновер отметил,что обрамлением множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^2 + cz$ являются области, ограниченные касающимися окружностями [3].

Х.-О. Пайтген и П. Х. Рихтер показали, что точки $c = -0.1226 \pm 0.7449i$ будут центрами самых больших точек множества Мандельброта функции $f_1(z) = z^2 + c$. Это такие множества,где каждая точка с обладает тем свойством, что третья итерация функции $f_1(z) = z^2 + c$ имеет неподвижную притягивающую точку [4].

Основоположник фрактальной геометрии Б. Мандельброт впервые рассмотрел пространство параметров на комплексной плоскости для семейства полиномов $\mu(z) = z^2 +$ [1] и рациональных функций $\alpha(z) = c\frac{(1+z^2)^2}{z(z^2-1)}$ [4].

В. С. Секованов выявил обрамления множеств Мандельброта четырех семейств полиномов второй степени [21].

Различные семейства рациональных функций представляют научный интерес с точки зрения особенностей их динамического поведения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной статье мы продолжим выше указанные исследования в следующих направлениях:

а) выявим структуру неподвижных точек семейства рациональных функций $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}, c \in \mathbb{C}$, построим при соответствующих значениях параметра c их множества Жюлиа и заполняющие множества Жюлиа;

б) исследуем множества Мандельброта и обрамления множеств Мандельброта для данного семейства функций, а также построим эти множества с помощью компьютерных программ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим семейство функций

$$f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}, c \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Данное семейство функций имеет три неподвижные точки:

$z_1 = 0$ и $z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$. Ненулевые неподвижные точки определяются из уравнения $z^2 + z - c = 0$. Критические точки определяются из условия $f_c(z))' = 0$, т. е. $\frac{3cz^2 - 2z^3}{(c-z)^2} = 0$, где $c \in \mathbb{C}$.

Таким образом, критическими точками являются $\check{z}_{1,2} = 0, \check{z}_3 = \frac{3}{2}c$.

Заметим, что нулевая критическая точка $z_1 = 0$ является также неподвижной притягивающей точкой при любом $c \in \mathbb{C}$.

Докажем несколько утверждений.

Утверждение 1. Если $|c| < 2$ и $|z| \geqslant 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty$.

Доказательство. $|f_c(z)| = \frac{|z|^3}{|c-z|} \geqslant \frac{|z|^3}{|c|+|z|} = |z|\frac{|z|^2}{|c|+|z|}$. Положим $|c| = 2 - 2\delta$ и $|z| = x$. Далее рассмотрим на промежутке $[2; \infty)$ функцию вещественной переменной $\varphi(x) = \frac{x^2}{|c|+x}$. Заметим, что $\varphi'(x) = \frac{x^2+2|c|x}{(|c|+x)^2} > 0$. Следовательно, на промежутке $[2; \infty)$ вещественная функция $\varphi(x)$ возрастает.

Таким образом, $\frac{x^2}{|c|+x} \geqslant \frac{4}{|c|+2} = \frac{4}{2-2\delta+2} = \frac{2}{2-\delta} > 1$. Следовательно, $|f_c(z)| \geqslant |z|\frac{|z|^2}{|c|+|z|} \geqslant \frac{2}{2-\delta}|z|$. Поскольку $|f_c(z)| > 2$, то $|f_c^{(2)}(z)| = |f_c(f_c(z))| \geqslant \frac{2}{2-\delta}|f_c(z)| \geqslant (\frac{2}{2-\delta})^2|z|$. Продолжая таким образом рассуждения, получим $|f_c^{(n)}(z)| \geqslant \left(\frac{2}{2-\delta}\right)^n |z|$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty$.

Утверждение 2. Если $|c| > 2$ и $|z| \geqslant |c|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty$.

Доказательство. Положим $|c| = 2 + \delta$:

$$|f_c(z)| = \frac{|z|^3}{|c-z|} \geqslant \frac{|z|^3}{|c|+|z|} = |z|\frac{|z|^2}{|c|+|z|} \geqslant \frac{|z|^3}{|z|+|z|} = \frac{|z|^2}{2} = |z|\frac{|c|}{2} \geqslant |z|(1+\frac{\delta}{2}).$$

Заметим, что $|f_c(z)| \geqslant |z| \geqslant |c|$. Следовательно, $|f_c^{(2)}(z)| = |f_c(f_c(z))| \geqslant \left(1+\frac{\delta}{2}\right)|f_c(z)| \geqslant (1+\frac{\delta}{2})^2|z|$. Продолжая рассуждения, получим $|f_c^{(n)}(z)| \geqslant (1+\frac{\delta}{2})^n|z|$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty$.

Отметим, что динамическое поведение комплексной функции f_c, определенной в окрестности бесконечно удаленной точки, исследуют с помощью замены переменной z на $\frac{1}{z}$. Поведение функции f_c в бесконечно удаленной точке эквивалентно поведению функции $F_c(z) = \frac{1}{f_c(\frac{1}{z})}$ в окрестности нуля. Причем бесконечно удаленная точка является притягивающей неподвижной точкой f_c, если точка 0 является притягивающей неподвижной точкой F_c. В нашем случае, $F_c(0) = 0$ и $(F_c(z))' = 0$.

Мы будем понимать под множеством Мандельброта M данного семейства множества функций множество, состоящее из точек $c \in \mathbb{C}$, для которых орбита критической точки $\check{z} = \frac{3}{2}c$ функции $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$

На рисунке 1 изображено множество Мандельброта семейства функции $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$, построенное с помощью компьютерной программы.

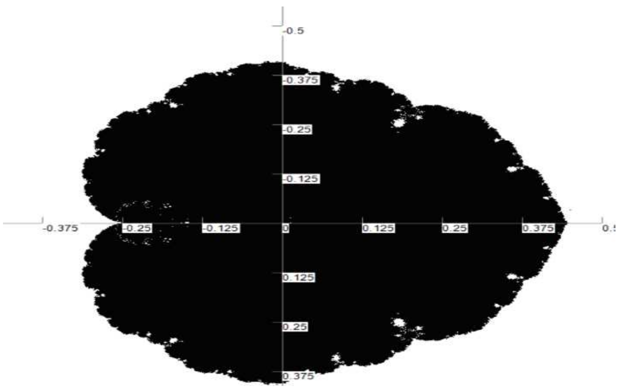


Рис. 1. *Множество Мандельброта семейства функций* $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$.

Основной модуль программы:

```
procedure drawM();
var
  z,z0,c: Complex;pers, t:real;
begin
  SetBrushColor(clWhite); Rectangle(0,0,count, count);
  LockDrawing();
  t := Milliseconds();
  pers :=0;
  for var j := count downto 1 do
```

```
    {$omp parallel for private(z,z,k,ii,jj,c)}
    for var i:= to count - 1 do
    c:=((min_x+i*step)/8),(min_y+(count-j-1)*step/8);
    z0:=1.5*c;
  ii:=Round((z0.Real-min_x)/step);
  jj:=Round(count+(min_y-z0.Imaginary)/step);
  z0:=(min_x+ii*step, min_y+(count-jj)*step);
  z:=z0;
  k:=0;
  repeat
  z:=f(z,c);
  try
  ii:=Round((z.Real-min_x)/step);
  jj:=Round(count+(min_y-z.Imaginary)/step);
  z:=(min_x+ii*step, min_y+(count-jj)*step);
  exept
  k:=iter;
  end;
  k+=1;
  until(k>=iter) or (ii=i) and (j=jj);
  if(iter>=k) then
   SetPixel(i,j,cBlack);
 if pers<Round(((count-j)*count+i)/count/count*100) then
  begin
    pers:=Round(((count-j)*count+i)/count/count*100);
    SetWindowCaption(pers+ '%');
  end;
 end;
 drawXY(8);
 SetWindowCaption(WindowCaption()+ ''+(Round(Milliseconds-t)/1000)+'sek');
 UnlockDrawing();
end;
```

Определение. Обрамлением множества Мандельборта M_c семейства функиций $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$, где $c \in \mathbb{C}$, будем называть подмножество множества Мандельборта, для каждой точки c которого функция $f_c(z)$ имеет притягивающую неподвижную точку.

Заметим, что для ненулевых неподвижных точек $f_c(z)$ справедливо равенство $\frac{z^2}{c-z} = 1$. Следовательно, $(f_c(z))' = \frac{3cz^2-2z^3}{(c-z)^2} = \frac{z^2}{c-z}\frac{3c-2z}{c-z} = \frac{3c-2z}{c-z} = 2 + \frac{c}{c-z}$. Поскольку $c = z + z^2$, то $(f_c(z))' = 3 + \frac{1}{z}$.

Для ненулевой неподвижной притягивающей точки необходимо выполнение условия $|(f_c(z))'| < 1$, т. е. $|3 + \frac{1}{z}| < 1$.

Граница неподвижных притягивающих точек будет описываться уравнением $3+\frac{1}{z} = e^{it}, t \in [0; 2\pi]$. Преобразуя данное уравнение, получим:

$$c = \frac{1}{e^{it}-3} + \frac{1}{(e^{it}-3)^2}. \tag{2}$$

Обрамление множества Мандельброта семейства функции (1), построенное с помощью компьютерной программы по уравнению (2), показано на рисунке 2.

Методами вычислительной математики с помощью компьютерного эксперимента получены константы $c_1 = -0.1875$ и $c_2 = -0.25$, которые лежат на границе обрамления Ман-

Рис. 2. *Обрамление множества Мандельброта семейства функций* $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$.

дельброта вдоль вещественной оси, поскольку при данных значениях c модуль производной $|(f_c(z))'| = 1$, т.е. $|3 + \frac{1}{z}| = 1$.

Далее исследуем структуру неподвижных точке семейства рациональных функций $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}, c \in C$.

Введем следующие обозначения:

Если функция $f_c(z)$, при определенном значении параметра c, имеет три неподвижные притягивающие точки, то будем записывать (**P P P**).

Если же одну неподвижную притягивающую точку и две нейтральные неподвижные точки, то (**P N N**).

Если три отталкивающие неподвижные точки, то (**O O O**).

Аналогично будем обозначать случаи (**P O O**), (**N N N**), (**N O O**) и другие.

Замечание 1. Мы считаем тождественными триады, имеющие равно число одинаковых неподвижных точек. Например, триады (**P O O**) и (**O P O**) мы не различаем.

Замечание 2. Если при некотором значении $c \in C$ функция $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$ имеет две неподвижные нейтральные точки и одну притягивающую, то будем говорить, что имеет место случай (**P N N**).

Совокупность возможных триад при определенных значениях параметра с будем считать структурой неподвижных точек рассматриваемого семейства функций.

Поскольку для семейства функций $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}, c \in C$, точка $z_1 = 0$ является притягивающей при каждом значении параметра с, то случаи (**N N N**), (**O O O**), (**N O O**),(**N N O**) невозможны.

Пусть $c = -0.25$. В данном случае $z_{2,3} = -\frac{1}{2}, |(f_{-0.25}(z_2,3))'| = |3 + \frac{1}{z_{2,3}} = 1$. Следовательно, налицо случай (**P N N**).

Пусть $c = -0.1875$. Из уравнения $z^2+z-c = 0$ находим неподвижные точки $z_2 = -0.25, z_3 = -0.75$. Нетрудно подсчитать, что $|(f_{-0.25}(z_2))'| = 1, |(f_{-0.75}(z_3))'| > 1$. Таким образом, имеет место случай (**P N O**).

Покажем, что случай (**P P N**) не имеет места.

Предположим противное. Пусть существуют неподвижные точки z_2,z_3, причем точка z_2 нейтральная, а точка z_3 притягивающая. Тогда имеет место $\left|3 + \frac{1}{z_2}\right| = 1$, то есть $3 + \frac{1}{z_2} = e^{it}, t \in [0; 2\pi]$.

Из последнего равенства получим $z_2 = \frac{1}{e^{it}-3}$. По формула Виета, применительно к уравнению $z^2 + z - c = 0$, получим $z_3 = -1 - z_2$, то есть $z_3 = \frac{2-e^{it}}{e^{it}-3}$. Далее имеем $|(f_c(z_3))`| = \left|3 + \frac{e^{it}-3}{2-e^{it}}\right| = \left|3 + (-1 - \frac{1}{2-e^{it}})\right| = \left|2 - \frac{1}{2-e^{it}}\right| \geqslant 2 - \frac{1}{|2-e^{it}|} \geqslant -1$. Действительно: $2 - e^{it} \geqslant 2 - \left|e^{it}\right| = 1, \frac{1}{|2-e^{it}| \leqslant 1, -\frac{1}{|2-e^{it}|} \geqslant -1}$. Следовательно, $|(f_c(z_3))'| = 2 - \frac{1}{|2-e^{it}|} \geqslant 1$. Мы пришли к противоречию, поскольку точка z_3 не может быть притягивающей точкой и случай (**P P N**) невозможен.

Так как $|(f_1(z_2))'| > 1$ и $|(f_1(z_3))'| > 1$, то имеет место случай (**P P O**).

Покажем, что случай (**P P O**) имеет место быть. Положим $c = -0.2$.

Тогда $z_2 = \frac{-1+\sqrt{0,2}}{2}, z_3 = \frac{-1-\sqrt{0,2}}{2}$

$|(f_{-0,2}(z_2))'| \approx \left|3 + \frac{2}{-1+\sqrt{0,2}}\right| < 1, |(f_{-0,2}(z_2))'| \approx \left|3 + \frac{2}{-1-\sqrt{0,2}}\right| > 1$. Следовательно, налицо случай (**P P O**).

Покажем, что случай (**P P P**) невозможен.

Установим сначала, что если точка z является неподвижной притягивающей точкой функции $f_c(z)$, то $Re\left(\frac{1}{1-(f_c(z))'}\right) > \frac{1}{2}$.

Положим $f_c(z)' = c$, тогда $|c| < 1$ и $c \in \mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ – единичный открытый круг радиуса единица с центром в начале координат.

Следовательно, $1 - c \in 1 + \mathbb{D}$. Рассмотрим отображение $f(z) = \frac{1}{z}$. Заметим, что круг $1 + \mathbb{D}$ при отображении $h(z) = \frac{1}{z}$ переходит в полуплоскость $Re(z) > \frac{1}{2}$.

Действительно. Точки $0, 2, 1+i$, лежащие на границе круга $1+\mathbb{D}$ перходят в точки $f(0) = \infty$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(1+i) = \frac{1-i}{2}$, лежащие на прямой линии $Rez = \frac{1}{2}$. Поскольку $f(1) = 1$, то внутренность круга $1 + \mathbb{D}$ переходит в полуплоскость $Re(z) > \frac{1}{2}$. Поскольку $1 - c \in 1 + \mathbb{D}$, то $Re(\frac{1}{1-c}) > \frac{1}{2}$. Вернемся к случаю **(P P P)** и покажем, что он невозможен. Предположим противное. То есть пусть z_1, z_2, z_3 – неподвижные притягивающие точки функции $f_c(z) = \frac{z^3}{c-z}$, $c \in \mathbb{C}$

Рассмотрим функцию:

$$\varphi_c(z) = \frac{1}{z - f_c(z)} = \frac{1}{z - \frac{z^3}{c-z}} = \frac{c-z}{cz - z^2 - z^3} \frac{z-c}{z\left(z - \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\right)}$$

Следуя [3], найдем вычеты:

$$i(f,z_i) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z - f(z_i)} = \frac{1}{1-(f(z_i))}, i = 1, 2, 3.$$

Вычислим сначала

$$i(f,z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z - f(z_1)} = \frac{1}{1-(f(z_1))}$$

$$\frac{1}{1-(f(z_1))} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z - f(z_1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z-c}{\left(z - \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\right)} = \frac{-c}{\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}} = 1.$$

Вычислим

$$(f,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z - f(z_2)} = \lim_{z\to \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}} \frac{z-c}{z\left(z - \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} - c}{\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} - \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{1+4c} - 2c}{1 + 4c - \sqrt{1+4c}}$$

Далее находим

$$i(f,z_3) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z - f(z_3)} = \lim_{z\to \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}} \frac{z-c}{z\left(z - \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} - c}{\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} - \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}\right)} = \frac{-1-\sqrt{1+4c} - 2c}{1 + 4c + \sqrt{1+4c}}.$$

Найдем сумму

$$\frac{1}{1-(f(z_2))'} + \frac{1}{1-(f(z_3))'} = \frac{-1+\sqrt{1+4c} - 2c}{1 + 4c - \sqrt{1+4c}} + \frac{-1-\sqrt{1+4c} - 2c}{1 + 4c + \sqrt{1+4c}} = \frac{-4c\sqrt{1+4c}}{4c\sqrt{1+4c}} = -1.$$

Таким образом,
$$\frac{1}{1-(f(z_1))'}+\frac{1}{1-(f(z_2))'}+\frac{1}{1-(f(z_3))'}=0 \qquad (3)$$

Каждая из точек z_1,z_2,z_3, по предположению, является неподвижной притягивающей точкой. Тогда
$$Re\left(\frac{1}{1-(f(z_1))'}\right)+Re\left(\frac{1}{1-(f(z_2))'}\right)+Re\left(\frac{1}{1-(f(z_3))'}\right)>\frac{3}{2}.$$

Это противоречит равенству (3).

Таким образом, наше предположение, что все три неподвижных точки z_1,z_2,z_3 являются притягивающими, оказалось ошибочным.

Интересен второй способ доказательства от противного невозможности существования случая ($\mathbf{s}ymbolP\ P\ P$).

Пусть точки z_1,z_2,z_3 — неподвижные притягивающие точки. Тогда $|f_c(z_1)|=0, |f_c(z_2)|=\left|3+\frac{1}{z_2}\right|<1, |f_c(z_3)|=\left|3+\frac{1}{z_3}\right|<1$.

Положим $3+\frac{1}{z_2}=\rho_2e^{it_2}, \rho_2\in(0;1), t_2\in[0;2\pi], 3+\frac{1}{z_3}=\rho_3e^{it_3}, \rho_3\in(0;1), t_3\in[0;2\pi]$. Из последних двух равенств следует, что $z_2=\frac{1}{3-\rho_2e^{it_2}}, z_3=\frac{1}{3-\rho_3e^{it_3}}$. Согласно теореме Виета, применительно к уравнению $z^2+z-c=0$, получим $\frac{1}{3-\rho_2e^{it_2}}+\frac{1}{3-\rho_3e^{it_3}}=-1$. Следовательно, $\left|\frac{1}{3-\rho_2e^{it_2}}+\frac{1}{3-\rho_3e^{it_3}}\right|=1, \left|\frac{1}{3-\rho_2e^{it_2}}+\frac{1}{3-\rho_3e^{it_3}}\right|\leqslant\frac{1}{|3-\rho_2e^{it_2}|}+\frac{1}{|3-\rho_3e^{it_3}|}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ и мы приходим к противоречию.

Отметим, что под заполняющим множеством Жюлиа $K(f_c)$ мы понимаем множество, которое состоит из таких точек $z\in\mathbb{C}$, орбиты которых ограничены. Под множеством Жюлиа $j(f_c)$ мы понимаем границу заполняющего множества Жюлиа.

В таблице 1 представлены: структура неподвижных точек функции $f_c(z)$, соответствующие ей заполняющее множества Жюлиа $K(f_c)$ (черный цвет) и множества Жюлиа (границы заполняющих множеств Жюлиа) при соответствующих значениях параметра c.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты исследования только некоторых динамических свойств семейства рациональных функций Эти исследования можно продолжить в направлении исследования других особенностей множеств Мандельброта, Жюлия и заполняющего множества Жюлиа данного семейства функций:

– рассмотреть и обосновать наличие свойств осевой и центральной симметрий;

– найти уравнение границы обрамления множества Мандельброта;

– провести сравнительный анализ динамических свойств данного семейства функций со свойствами семейства рациональных функций, рассмотренных Б. Ман6дельбротом в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. — М. : Постмаркет, 2000. — 352 с.

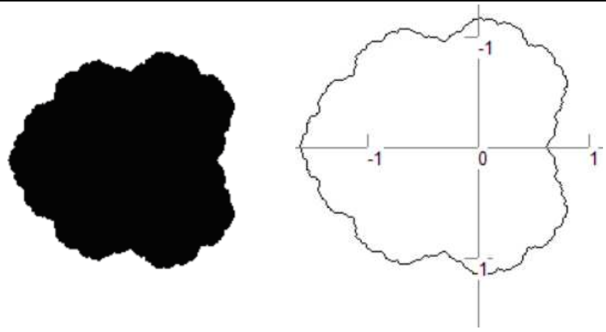
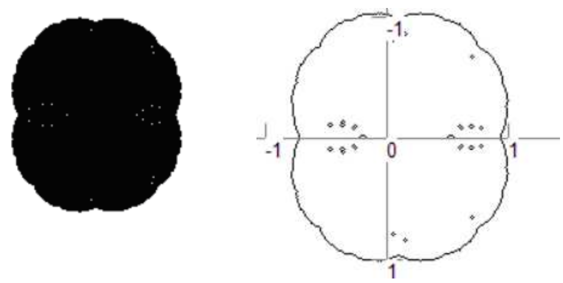
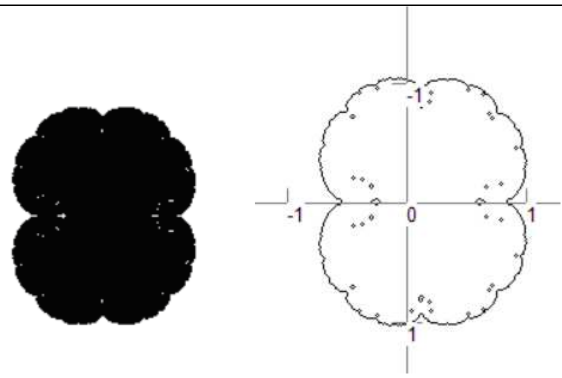
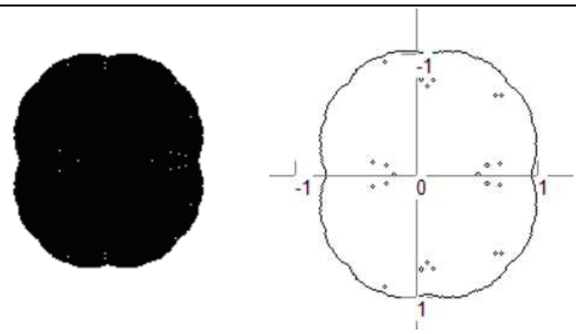
2. Маркушевич, А. И. Введение в теорию аналитических функций / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. — М. : “Просвещение”, 1977. — 320 с.

3. Милнор, Дж. Голоморфная динамика / Дж. Милнор. — Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. — 320 с.

4. Пайген, Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.-О. Пайген, П. Х. Рихтер. — М. : Мир, 1993. — 176 с.

5. Falconer, K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications / K. Falconer. — New York : John Wiley, 1990. — 367 p.

Таблица 1.

Структура неподвижных точек	Параметр c и функция $f_c(z)$	Изображения заполняющего множества Жюлиа и множества Жюлиа
1. (POO)	$c = 1$, $f_1(z) = \frac{z^3}{1-z}$	
2. (PPO)	$c = -0{,}2$ $f_{-0{,}2} = \frac{z^3}{-0{,}2-z}$	
3. (NNP)	$c = --0{,}25$ $f_{-0{,}25} = \frac{z^3}{-0{,}25-z}$	
4. (PNO)	$c = -0{,}1875$ $f_{-0{,}1875}(z) = \frac{z^3}{-0{,}1875-z}$	

6. Секованов, В. С. Обучение фрактальной геометрии как средство формирования креативности студентов физико-математических специальностей университетов. Диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук / Московский педагогический государственный университет. Кострома 2007 г.

7. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств / В. С. Секованов. — Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2010.

8. Секованов, В. С. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости / В. С. Секованов, А. Л. Салов, Е. А. Самохов // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин. Материалы V Всероссийской научно-методической конференции. — 2011. — С. 85–103.

9. Секованов, В. С. О множествах Жюлиа рациональных функций / В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23–28.

10. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств / В. С. Секованов. — Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2012. — 208 с.

11. Секованов, В. С. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения / В. С. Секованов, Д. П. Миронкин // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. — 2013. — Т. 19, № 1. — С. 190–195.

12. Секованов, В. С. Академик АН СССР А. Н. Колмогоров: Жизнь в науке и наука в жизни гения из Туношны / В. С. Секованов. — М., 2014. — 704 с.

13. Секованов, В. С. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной / В. С. Секованов, А. О. Смирнова // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 189–192.

14. Секованов, В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах / В. С. Секованов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, вып. 3. — С. 133–150.

15. Секованов, В. С. Что такое фрактальная геометрия? / В. С. Секованов. — М. : ЛЕНАНД, 2016. — 260 с.

16. Секованов, В. С. Гладкие множества Жюлиа / В. С. Секованов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, вып. 4. — С. 133–150.

17. Секованов, В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. Учебное пособие / В. С. Секованов. – СПб. : Издательство “Лань”, 2017. — 180 с.

18. Секованов, В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку / В. С. Секованов, Л. Б. Рыбина, А. Е. Березкина // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. — 2018. — С. 144–150.

19. Секованов, В. С. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов / В. С. Секованов, Л. Б. Рыбина, К. Ю. Стрункина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 193–199.

20. Секованов, В. С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения: Учебное пособие / В. С. Секованов. — СПб. : Издательство “Лань”, 2019. — 180 с.

21. Секованов, В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки / В. С. Секованов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2021. — Т. 23, вып. 4. С. 163–176.

22. Секованов, В. С. Обрамления первого и второго порядков множеств Мандельброта и структура неподвижных точек полиномов второй степени / В. С. Секованов, Л. Б. Рыбина //

Фундаментальная и прикладная математика. — 2022. — Т. 24, вып. 2. — С. 197–212.

23. Секованов, В. С. Голоморфная динамика. Учебное пособие / В. С. Секованов. — СПб. : Издательство “Лань”, 2021. — 168 с.

24. Sekovanov, V. S. On Some Discrete nonlinear dynamical systems / V. S. Sekovanov // Jornal of Matematical Sciences. — 2019. — V. 237, № 3. — P. 460–472.

25. Execution of matemanics and information multister task “Buililding a fractal set with L-systems and information technoloqies” as a means of creative of students / V. Sekovanov, V. Ivkov, A. Piguzov, A. Fateev // In: CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11 th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO, 2016. — 2016. — P. 204–211.

26. Sekovanov, V. S. Smooth Yulia Sets / V. S. Sekovanov // Jornal of Matematical Sciences. — 2020. — V. 245, № 2.

REFERENCES

1. Kronover R.M. Fractals and chaos in dynamic systems. [Kronover R.M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah]. Moscow: Postmarket, 2000, 352 p.

2. Markushevich A.I., Markushevich L.A. Introduction to the theory of analytical functions. [Markushevich A.I., Markushevich L.A. Vvedenie v teoriyu analiticheskih funkcij]. Moscow: Enlightenment, 1977, 320 p.

3. Milnor J. Holomorphic dynamics. [Milnor Dzh. Golomorfnaya dinamika]. Izhevsk: Scientific Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, 2000, 320 p.

4. Peigen H.-O, Richter P.H. The beauty of fractals. Images of complex dynamic systems. [Pajgen H.-O, Rihter P.H. Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnyh dinamicheskih sistem]. Moscow: Mir, 1993, 176 p.

5. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley, 1990, 367 p.

6. Sekovanov V.S. Teaching fractal geometry as a means of developing the creativity of university students of physics and mathematics. Dissertation for the degree of Doctor of Pedagogical Sciences. [Sekovanov V.S. Obuchenie fraktal’noj geometrii kak sredstvo formirovaniya kreativnosti studentov fiziko-matematicheskih special’nostej universitetov. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora pedagogicheskih nauk]. Moscow Pedagogical State University, Kostroma, 2007.

7. Sekovanov V.S. Elements of the theory of fractal sets. [Sekovanov V.S. Elementy teorii fraktal’nyh mnozhestv]. Kostroma: KSU named after. N.A. Nekrasova, 2010.

8. Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. Using a cluster in the study of fractal sets on the complex plane. [Sekovanov V.S., Salov A.L., Samohov E.A. Ispol’zovanie klastera pri issledovanii fraktal’nyh mnozhestv na kompleksnoj ploskosti]. Current problems in teaching information and natural science disciplines. Materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference, 2011, pp. 85–103.

9. Sekovanov V.S. On Julia sets of rational functions. [Sekovanov V.S. O mnozhestvah ZHyulia racional’nyh funkcij]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova — Bulletin of Kostroma State University named after N.A. Nekrasova*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 23–28.

10. Sekovanov V.S. Elements of the theory of fractal sets. [Sekovanov V.S. Elementy teorii fraktal’nyh mnozhestv]. Kostroma: KSU named after N.A. Nekrasova, 2012, 208 p.

11. Sekovanov V. S., Mironkin D. P. Studying the transformation of a baker as a means of developing the creativity of students and schoolchildren using distance learning. [Sekovanov V.S., Mironkin D.P. Izuchenie preobrazovaniya pekarya kak sredstvo formirovaniya kreativnosti studentov i shkol’nikov s ispol’zovaniem distancionnogo obucheniya]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova — Bulletin of Kostroma State University named*

after N.A. Nekrasova, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 190–195.

12. Sekovanov V.S. Academician of the USSR Academy of Sciences A. N. Kolmogorov: Life in science and science in the life of a genius from Tunoshna. [Sekovanov V.S. Akademik AN SSSR A.N. Kolmogorov: ZHizn' v nauke i nauka v zhizni geniya iz Tunoshny]. Moscow, 2014, 704 p.

13. Sekovanov V.S., Smirnova A.O. Development of students' thinking flexibility when studying the structure of fixed points of polynomials of a complex variable. [Sekovanov V.S., Smirnova A.O. Razvitie gibkosti myshleniya studentov pri izuchenii struktury nepodvizhnyh tochek polinomov kompleksnoj peremennoj]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika — Bulletin of the Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 189–192.

14. Sekovanov V.S. About some discrete nonlinear dynamic systems. [Sekovanov V.S. O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Fundamental and applied mathematics*, 2016, vol. 21, iss. 3, pp. 133–150.

15. Sekovanov V.S. What is fractal geometry?. [Sekovanov V.S. CHto takoe fraktal'naya geometriya?]. Moscow: LENAND, 2016, 260 p.

16. Sekovanov V.S. Smooth Julia sets. [Sekovanov V.S. Gladkie mnozhestva ZHyulia]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Fundamental and applied mathematics*, 2016, vol. 21, iss. 4, pp. 133–150.

17. Sekovanov V.S. Elements of the theory of discrete dynamic systems. Tutorial. [Sekovanov V.S. Elementy teorii diskretnyh dinamicheskih sistem. Uchebnoe posobie]. St. Petersburg: Lan Publishing House, 2017, 180 p.

18. Sekovanov V.S., Rybina L.B., Berezkina A.E. On Julia sets of functions having a parabolic fixed point. [Sekovanov V.S., Rybina L.B., Berezkina A.E. O mnozhestvah ZHyulia funkcij, imeyushchih parabolicheskuyu nepodvizhnuyu tochku]. *Aktual'nye problemy prepodavaniya informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin — Current problems of teaching information and natural science disciplines*, 2018, pp. 144–150.

19. Sekovanov V.S., Rybina L.B., Strunkina K.Yu. Studying the framework of Mandelbrot sets of polynomials of the second degree as a means of developing the originality of students' thinking. [Sekovanov V.S., Rybina L.B., Strunkina K.YU. Izuchenie obramlenij mnozhestv Mandel'brota polinomov vtoroj stepeni kak sredstvo razvitiya original'nosti myshleniya studentov]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psihologiya. Sociokinetika — Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Socio-kinetics*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 193–199.

20. Sekovanov V.S. Fractal geometry. Teaching, tasks, algorithms, synergetics, aesthetics, applications: Textbook. [Sekovanov V.S. Fraktal'naya geometriya. Prepodavanie, zadachi, algoritmy, sinergetika, estetika, prilozheniya: Uchebnoe posobie]. St. Petersburg: Lan Publishing House, 2019, 180 p.

21. Sekovanov V.S. On Julia sets of functions having fixed parabolic points. [Sekovanov V.S. O mnozhestvah ZHyulia funkcij, imeyushchih nepodvizhnye parabolicheskie tochki]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Fundamental and applied mathematics*, 2021, vol. 23, iss. 4, pp. 163–176.

22. Sekovanov V.S., Rybina L.B. Framings of the first and second orders of Mandelbrot sets and the structure of fixed points of polynomials of the second degree. [Sekovanov V.S., Rybina L.B. Obramleniya pervogo i vtorogo poryadkov mnozhestv Mandel'brota i struktura nepodvizhnyh tochek polinomov vtoroj stepeni]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Fundamental and applied mathematics*, 2022, vol. 24, iss. 2, pp. 197–212.

23. Sekovanov V.S. Holomorphic dynamics. Tutorial. [Sekovanov V.S. Golomorfnaya dinamika. Uchebnoe posobie]. St. Petersburg: Lan Publishing House, 2021, 168 p.

24. Sekovanov V.S. On Some Discrete nonlinear dynamical systems. Journal of Mathematical

Sciences, 2019, vol. 237, no. 3, pp. 460–472.

25. Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Fateev A. Execution of mathematics and information multister task “Builild-ing a fractal set with L-systems and information technologies” as a means of creative of students. In the collection: CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO 2016, 2016, p. 204–211.

26. Sekovanov V.S. Smooth Yulia Sets. Journal of Mathematical Sciences, 2020, vol. 245, no. 2.

Сekованов Валерий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий Костромского государственного университета, Кострома, Россия
E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Valery Sergeevich Sekovanov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies of Kostroma State University, Kostroma, Russia
E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Сekованова Любовь Афанасьевна, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Костромской государственной сельско-хозяйственной академии, Кострома, Россия
E-mail: sekovla@yandex.ru

Lyubov Afanasyevna Sekovanova, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics of the Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia
E-mail: sekovla@yandex.ru