УДК 517.956.225

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Рахмелевич

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 15.11.2022 г.

Аннотация. Исследовано многомерное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Левая часть уравнения имеет вид однородного полинома второй степени от искомой функции и ее производных первого и второго порядков. Рассматривается линейное мультипликативное преобразование неизвестной функции, которое преобразует исходное уравнение к уравнению того же вида. Найдены инварианты этого преобразования и сформулирована теорема об условиях эквивалентного преобразования уравнений указанного вида.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, квадратичная нелинейность, линейное мультипликативное преобразование, инвариант Лапласа.

ON LAPLACE INVARIANTS OF MULTI-DIMENSIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH QUADRATIC NONLINEARITIES

I .V. Rakhmelevich

Abstract. We study the multi-dimensional partial differential equation of the second order with variable coefficients. The left side of the equation is a homogeneous polynomial of the second degree on unknown function and its derivatives of the first and the second order. We consider the linear multiplicative transformation of unknown function which transforms the initial equation to the equation of the same form. The invariants of this transformation are founded. We have formulated the theorem on the conditions of equivalent transformation of equations of the considering form.

Keywords: partial differential equation, quadratic nonlinearity, linear multiplicative transformation, Laplace invariant.

ВВЕДЕНИЕ

Инварианты Лапласа были первоначально введены и применялись при исследовании симметрии и интегрируемости двумерных линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами следующего вида [1,2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0.$$

В частности, было показано, что инварианты Лапласа являются инвариантами линейного мультипликативного преобразования искомой функции, переводящего исходное уравнение в другое уравнение того же вида (т. е. линейное и однородное). В последующих работах [3–6] понятие инвариантов Лапласа было обобщено для линейных многомерных уравнений второго порядка и для уравнений более высоких порядков с переменными коэффициентами. Также в ряде работ [7, 8] при исследовании нелинейных уравнений в частных производных использовались инварианты Лапласа линеаризованных уравнений. Целью данной работы является нахождение инвариантов Лапласа для нелинейного многомерного уравнения в частных производных второго порядка, левая часть которого имеет вид однородного полинома второй степени от искомой функции и ее первых и вторых производных.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим класс нелинейных многомерных уравнений второго порядка:

$$u\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u\sum_{i=1}^{N} c_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(\mathbf{x})u^2 = 0. \tag{1}$$

Левая часть уравнения (1) представляет собой однородный полином относительно неизвестной функции $u(\mathbf{x})$ и ее производных первого и второго порядков. Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — вектор независимых переменных. Предполагается, что уравнение приведено к каноническому виду, так что $a_i = \pm 1$.

Пусть к уравнению (1) применяется линейное преобразование неизвестной функции:

$$u(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к уравнению того же вида:

$$v\sum_{i=1}^{N} \widetilde{a}_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b}_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + v\sum_{i=1}^{N} \widetilde{c}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \widetilde{d}(\mathbf{x})v^2 = 0, \tag{3}$$

Требуется найти, каким условиям должны удовлетворять эти уравнения, чтобы уравнение (3) могло быть получено из (1) с помощью преобразования (2).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нетрудно убедиться, что коэффициенты исходного уравнения (1) и преобразованного уравнения (3) связаны соотношениями:

$$\widetilde{a}_i = a_i, \quad \widetilde{b}_i = b_i, \quad \widetilde{c}_i = c_i + \frac{2(a_i + b_i)}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad \widetilde{d} = d + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{a_i}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} + \frac{b_i}{\lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{c_i}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Из первых трех соотношений (4) следует:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \widetilde{A}_i - A_i, \quad A_i = \frac{c_i}{2(a_i + b_i)}, \quad \widetilde{A}_i = \frac{\widetilde{c}_i}{2(\widetilde{a}_i + \widetilde{b}_i)}. \tag{5}$$

Используя условие равенства смешанных вторых производных $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial x_i}$, из (5) получаем, что $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\widetilde{A}_i - A_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{A}_j - A_j\right)$ при всех $i \neq j$, или

$$\frac{\partial \widetilde{A}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{A}_j}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = K_{ij} \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что величины K_{ij} не меняются при преобразовании (2), т. е. являются инвариантами этого преобразования.

Далее, четвертое из соотношений (4), с учетом (5) преобразуем к виду:

$$\widetilde{d}-d=\sum_{i=1}^{N}\left((a_i+b_i)\left(\widetilde{A}_i-A_i\right)^2+a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{A}_i-A_i\right)+c_i\left(\widetilde{A}_i-A_i\right)\right). \tag{7}$$

Подставляя в (7) вторую и третью формулы (5), получаем:

$$\widetilde{d}-d=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\widetilde{c}_i^2}{4(\widetilde{a}_i+\widetilde{b}_i)}-\frac{c_i^2}{4(a_i+b_i)}+a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{A}_i-A_i\right)\right). \tag{8}$$

Собирая в левой части величины, относящиеся к исходному уравнению (1), а в правой части — к преобразованному уравнению (3), соотношение (8) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{c_i^2}{4(a_i+b_i)}+a_i\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)-d=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\widetilde{c}_i^2}{4(\widetilde{a}_i+\widetilde{b}_i)}+\widetilde{a}_i\frac{\partial \widetilde{A}_i}{\partial x_i}\right)-\widetilde{d}=H. \tag{9}$$

Из (9) следует, что величина H одинакова для исходного и преобразованного уравнений и, следовательно, также является инвариантом преобразования (2).

Подставляя (5) в (6) и (9), выразим найденные инварианты преобразования (2) через коэффициенты исходного уравнения:

$$K_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{c_i}{a_i+b_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c_j}{a_j+b_j}\right)\right),\quad H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{c_i^2}{4(a_i+b_i)}+\frac{a_i}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c_i}{a_i+b_i}\right)\right)-d \tag{10}$$

На основании приведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть два нелинейных уравнения второго порядка* (1) и (3) *таковы, что уравнение* (3) *получается из* (1) *с помощью линейного преобразования* (2). *Тогда для обоих уравнений* (1), (3) :

1) *должны быть выполнены первое и второе условия* (4);

2) *инварианты Лапласа обоих уравнений, определяемые выражением* (10), *должны быть одинаковыми.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурса, Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1 / Э. Гурса. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1933.

2. Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. — М. : Изд–во иностранной литературы, 1957.

3. Джохадзе, О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных / О. М. Джохадзе // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 63–74.

4. Миронов, А. Н. Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными / А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, № 1. — С. 110–115.

5. Миронов, А. Н. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвёртого порядка с двумя независимыми переменными / А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — № 10. — С. 27–34.

6. Миронов, А. Н. К инвариантам Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной с тремя независимыми переменными / А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 68–74.

7. Кузнецова, М. Н. Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения / М. Н. Кузнецова // Уфимский математический журнал. — 2009. — Т. 1, № 3. С. 87–96.

8. Жибер, А. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа / А. В. Жибер, В. В. Соколов // Успехи математических наук. 2001. — Т. 56, № 1. — С. 61–101.

REFERENCES

1. Goursat E. Cours d'Analyse Mathematique. [Gursa E. Kurs matematicheskogo analiza. T. 3, ch. 1]. Moscow–Leningrad, 1933.

2. Tricomi F. Lectures on Partial Differential Equations. [Trikomi F. Lekcii po uravneniyam v chastnyh proizvodnyh]. Moscow, 1957.

3. Dzhokhadze O.M. Laplace Invariants for Some Classes of Linear Partial Differential Equations. Differential Equations. [Dzhohadze O.M. Ob invariantah Laplasa dlya nekotoryh klassov linejnyh differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 63–74.

4. Mironov A.N., Mironova L.B. On Laplace Invariants For Equations With Dominating Third-Order Partial Derivative And Two Independent Variables. [Mironov A.N., Mironova L.B. Ob invariantah Laplasa dlya uravneniya s dominiruyushchej chastnoj proizvodnoj tret'ego poryadka s dvumya nezavisimymi peremennymi]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 1, pp. 110–115.

5. Mironov A.N., Mironova L.B. Laplace Invariants For a Fourth-Order Equation With Two Independent Variables. [Mironov A.N., Mironova L.B. Ob invariantah Laplasa dlya odnogo uravneniya chetvyortogo poryadka s dvumya nezavisimymi peremennymi]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2014, no. 10, pp. 27–34.

6. Mironov A.N., Mironova L.B. Laplace Invariants Of an Equation With a Dominating Partial Derivative And Three Independent Variables. [Mironov A.N., Mironova L.B. K invariantam Laplasa dlya odnogo uravneniya s dominiruyushchej chastnoj proizvodnoj s tremya nezavisimymi peremennymi]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 68–74.

7. Kuznetsova M.N. Laplace Transformation and Nonlinear Hyperbolic Equations. [Kuznecova M.N. Preobrazovanie Laplasa i nelinejnye giperbolicheskie uravneniya]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 87–96.

8. Zhiber A.V., Sokolov V.V. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type. [ZHiber A.V., Sokolov V.V. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2001, vol. 56, no. 1, pp. 61–101.

Рахмелевич Игорь Владимирович, к. т. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Rakhmelevich Igor Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru