УДК 517.984.46

СХОДИМОСТЬ ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ С РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ (КРАТНЫЙ СЛУЧАЙ)

А. М. Головина

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию 13.11.2023 г.

Аннотация. Абстрактный оператор рассматривается в произвольной области многомерного пространства. Возмущениями являются некоторые произвольные операторы. Изучается сходимость кратных собственных значений. Доказаны теоремы сходимости.
Ключевые слова: оператор, разбегающиеся возмущения, спектр, сходимость.

CONVERGENCE OF THE POINT SPECTRUM OF OPERATORS WITH DISTANT PERTURBATIONS (MULTIPLE CASE)

A. M. Golovina

Abstract. An abstract operator is considered in an arbitrary domain of a multidimensional space. Some arbitrary operators are perturbations. We study the convergence of the multiples of eigenvalues. Convergence theorems are proved.
Keywords: operator, distant perturbations, spectrum, convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению вопросов сходимости собственные значения и собственные функций им соответствующих различного рода дифференциальных операторов посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1]–[13]). Это вполне естественно, так как задачи с разбегающимися возмущениями описывают конкретные физические явления или процессы. В качестве примера можно привести задачу о свойствах иона гелия H_2^+ и других двухатомных молекулярных ионов (см., например, [1], [2]). В качестве разбегающихся возмущений рассматривались возмущения различного рода. Например, в [3]–[5] ими были финитные потенциалы, в [6], [7] некоторые убывающие на бесконечности потенциалы, в [8] — δ–потенциал. Возмущениями в работах [9], [10] были уже произвольные операторы, заданные на некоторых ограниченных областях. А в статьях [11], [12] в качестве возмущений рассматривались абстрактные операторы уже на произвольных областях. Это удалось сделать благодаря специально выбранным весовыми функциями, с помощью которых и были введены возмущающие операторы.

В настоящей работе невозмущённый дифференциальный оператор заменён некоторым абстрактным оператором. Он рассматривается в произвольной области многомерного пространства и удовлетворяет двум требованиям. Если сравнивать данный оператор с дифференциальным оператором, то относительно данных требований можно сделать следующие выводы. Первое условие обеспечивает периодичность этого абстрактного оператора. Второе – аналог априорной оценки, гарантирующей эллиптичность дифференциального оператора. Возмущениями в настоящей работе являются некоторые произвольные операторы. Аналогичные невозмущённый и возмущающие операторы были рассмотрены в работе [12]. Там изучалась сходимость собственного значения в случае простой кратности. Доказана сходимость возмущённого собственного значения к простому предельному. Другими словами, настоящая работа — это продолжением статьи [11].

Цель работы — изучение сходимости спектра и собственных значений рассматриваемого оператора с разбегающимися возмущениями при кратном предельном собственном значении. Приведено доказательство того, что число собственных значений возмущённого абстрактного оператора строго соответствует кратности собственного значения в пределе. Доказаны теоремы сходимости возмущённых собственных значений к соответствующему кратному собственному значению предельного оператора. Кроме того, продемонстрирована сходимость спектра возмущённого оператора к спектру некоторого предельного оператора.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введём следующие обозначения: $(x_1,\ldots,x_d)$ — прямоугольные декартовы координаты в многомерном пространстве R^d, $d \geqslant 1$; $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_\ell)$ — базис векторов в пространстве R^d, $\ell < d$; Γ — периодическая решётка комбинаций $z_1\vec{e}_1 + \ldots z_\ell\vec{e}_\ell$, $z_i \in Z$, $i = 1,\ldots,\ell$; Ω — некоторая периодическая относительно сдвигов вдоль решётки Γ область пространства R^d, имеющая достаточно гладкую границу. Пусть $X_i \in \Gamma$, $i = 1,\ldots,k$, $k \in N$ — некоторые параметры, а $\tau(X) := \min\limits_{i\neq j} |X_i - X_j|$, $S\left(X_i\right)$ — оператор сдвига, который передвигает функцию u вдоль решётки Γ по правилу $\left(S\left(X_i\right)u\right)(\cdot) = u(\cdot - X_i)$. Предполагаем, что $\tau(X) \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $L_2^(\Omega)$ некоторый абстрактный оператор H_0, $D(H_0) \subseteq W_2^m(\Omega)$, $m \in N$, для которого справедливы следующие требования:

1. Имеет место равенство

$$S\left(-X_i\right)H_0 S\left(X_i\right) = H_0, \quad i = 1,\ldots,k.$$

2. Верна оценка

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant c_1\left(\|H_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \leqslant c_2\|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \forall u \in D(H_0),$$

где c_1, c_2 — произвольные константы, которые не зависят от u.

Прежде чем приступить к описанию возмущающих операторов введём в рассмотрение функции $\xi_i,\eta_i \in C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, $i = 1,\ldots,k$, которые в дальнейшем будем называть весовыми. Данные функции выбираем так, чтоб сами они и их производные до порядка m включительно стремились к нулю на бесконечности. Выполнение этого свойства обеспечивает следующие два условия:

A. Для всех весовых функций ξ_i,η_i, $i = 1,\ldots,k$ найдётся одна неотрицательная функция $\varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ такая, что справедливы соотношения:

$$|\xi_i(x)| \leqslant c_3\varphi(x), \quad |\partial^\alpha\varphi(x)| \leqslant c_4\varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,\ldots,k, \quad |\alpha| \leqslant m,$$

$$|\varphi(x)| \leqslant c_5(\Pi) > 0, \quad x \in \Pi,$$

где α — мультииндекс, $\Pi \subseteq \overline{\Omega}$ — произвольное компактное множество c_3, c_4, $c_5(\Pi)$ — константы, не зависящие от x.

B. Весовые функции η_i, функция φ и все производные этих функций до порядка m на бесконечности стремятся к нулю.

После введённых таким образом весовых функций вернёмся к рассматриваемому невозмущённому оператору H_0 и потребуем от него выполнения ещё одного требования.

3. Пусть для всех функций u из области определения невозмущённого оператора H_0 и некоторого достаточно малого $\varepsilon \to 0$ функция $\varphi^{\varepsilon} u$ также принадлежат области определения невозмущённого оператора H_0, а функция $\varphi^{-\varepsilon} H_0 \varphi^{\varepsilon} u = h$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Тогда справедливо неравенство:

$$\left\| \left(\varphi^{-\varepsilon} H_0 \varphi^{\varepsilon} - H_0 \right) u \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varsigma\left(\varepsilon\right) \left\| u \right\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad \forall u \in D(H_0),$$

где $\varsigma\left(\varepsilon\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и не зависит от u.

Таким образом, сформулированы все три требования на невозмущённый абстрактный оператор. Вернёмся теперь к описанию разбегающихся операторов. Для описания разбегающихся возмущений нам кроме оператора сдвига и весовых функций понадобятся произвольные ограниченные операторы. Обозначим их через $L_i^0 : W_2^m(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$. После введения всех вспомогательных операторов и функций можем сконструировать разбегающиеся возмущения по следующему правилу:

$$\sum_{i=1}^{k} S(-X_i) \xi_i L_i^0 \eta_i S(X_i).$$

При увеличении $\tau(X)$ увеличивается расстояние между областями, в которых сконцентрировано каждое из возмущений, то есть, возмущения разбегаются.

Теперь полностью описан не только абстрактный невозмущённый оператор, но и введены разбегающиеся операторы. Это означает, что можно в пространстве $L_2(\Omega)$ ввести в рассмотрение возмущённый оператор H_X следующим равенством:

$$H_X := H_0 + \sum_{i=1}^{k} S(-X_i) \xi_i L_i^0 \eta_i S(X_i), \quad D(H_X) = D(H_0).$$

В силу абстрактности невозмущённого оператора H_0 и довольно произвольного вида возмущений будем предполагать, что

• возмущённый оператор H_X самосопряжён.

Опишем символы, которые используются в дальнейшем. Пусть

$$L_i = \xi_i L_i^0 \eta_i, \quad D(L_i) = W_2^m(\Omega),$$

$$H_i := H_0 + L_i, \quad D(H_i) = D(H_0), i = 1, \ldots, k,$$

два семейства операторов в пространстве $L_2(\Omega)$, каждое из которых удовлетворяет определённому требованию

• операторы L_i симметричны, операторы H_i самосопряжёны.

Символом σ — будем обозначать спектр оператора, λ_0 — изолированное собственное значении кратности p_i каждого из H_i, $i = 1, \ldots, k$, $\lambda_0 \notin \sigma(H_0)$, K_r — окружность с центром в точке λ_0 и достаточно малым радиусом r, которая кроме точки λ_0 не содержит никаких других точек спектра.

Основные результаты работы сформулированы в виде двух теорем.

Теорема 1. Спектр $\sigma\left(H_X\right)$ возмущённого оператора H_X сходится к спектру $\sigma_0 := \bigcup_{i=0}^{k} \sigma\left(H_i\right)$.

Теорема 2. У возмущённого оператора H_X существует ровно $p = p_1 + \ldots + p_k$ изолированных собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, которые сходятся к предельному собственному значению λ_0 при $\tau(X) \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Пусть $(H_0-\lambda)u=f$. Согласно формуле (3.16) из [13] справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{dist(\lambda,\sigma_0)}\,\|f\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Пользуясь оценкой из условия 2 для оператор H_0 и предыдущим неравенство, последовательно выводим:

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant C\left(\|\lambda u+f\|_{L_2(\Omega)}+\|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}+(|\lambda|+1)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\frac{|\lambda|+1}{dist(\lambda,\sigma_0)}\,\|f\|_{L_2(\Omega)}\,. \qquad (1)$$

Здесь C — это некоторая константа, которая не зависит от u и λ.

Аналогичные оценки верны и для операторов H_j, $j=1,\ldots,k$. Действительно, пусть теперь $(H_j-\lambda)u=f_j$, $j=1,\ldots,k$. Так как оператор H_j можно представить в виде $H_j=H_0+L_j$, то имеет место следующее равенство $(H_0-\lambda)u=h_j$, где $h_j=f_j-L_ju$ и неравенство

$$\|h_j\|_{L_2(R^d)} \leqslant \frac{1}{dist(\lambda,\sigma_0)}\,\|f_j\|_{L_2(R^d)}\,.$$

Выполнение оценки аналогичной (1) для функции u из уравнения$(H_j-\lambda)u=f_j$ доказывается аналогично лемме 2 в работе [11]. Справедливость двух этих неравенств показывает, что для любого $\gamma>0$ найдётся $\tau_0=\tau_0(\gamma)$ такое, что для любых $\tau(X)>\tau_0(\gamma)$ резольвента возмущённого оператора H_X существует, то есть, $\sigma(H_X)\subset\{dist(\lambda,\sigma_0)<\gamma\}$. Последнее вложение доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2. Вначале доказательство теоремы полностью повторяет рассуждения лемме 2 в работе [12]. Итогом этих рассуждений являются следующие соотношения:

$$\left\|\int\limits_{K_r}(H_X-\lambda)^{-1}\,d\lambda-\int\limits_{K_r}\sum_{i=1}^{k}S(-X_i)\,(H_i-\lambda)^{-1}\,S(X_i)d\lambda-(k-1)\int\limits_{K_r}(H_0-\lambda)^{-1}\,d\lambda\right\|_{L(\Omega)\to W_2^m(\Omega)}\to 0, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{K_r}(H_0-\lambda)^{-1}\,d\lambda=0. \qquad (3)$$

Учитывая кратность $p=p_1+\ldots+p_k$ предельного собственного значения λ_0 и пользуясь формулой (3.21) из [3], получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_r}(H_i-\lambda)^{-1}\,d\lambda=\sum_{j=1}^{p_i}\psi_{o,i}^{(j)}(\bullet,\psi_{o,i}^{(j)}).$$

Здесь под функциями $\psi_{0,i}^{(j)}$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,p_i$. будем понимать соответствующие предельному собственному значению λ_0 собственные функции.

С учётом последнего равенство и тождество (3), сходимость (2) примет следующий вид:

$$\left\|\int\limits_{K_r}(H_X-\lambda)^{-1}\,d\lambda-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i}\psi_{o,i}^{(j)}(\cdot+X_i)\left(\bullet,\psi_{o,i}^{(j)}(\cdot+X_i)\right)\right\|\to 0. \qquad (4)$$

Из доказанной сходимости (4), равенств (4.33), (4.43) из книги [13] и формулы (1.19) из [13] следует справедливость утверждения теоремы.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Постановка рассматриваемой в работе задачи является довольно общей. Максимально удалось обобщить как невозмущённый оператор, так и возмущающие операторы. Условия, которым удовлетворяют рассматриваемые операторы: невозмущённый оператор H_0, возмущающие операторы L_i, возмущённый оператор H_X и вспомогательные операторы H_i, являются минимальными и необходимы для справедливости основных результатов о равномерной сходимости. Так как именно на равномерной резольвентой сходимости базируются основные идеи доказательства. В то же время такая постановка задачи позволила включить в рассмотрение в качестве невозмущённого оператора интегро-дифференциальный оператор, а в качестве разбегающихся возмущений – интегральный оператор и псевдодифференциальный операторы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что настоящая работа, фактически, является продолжением работ [12] и обобщением результатов изложенных в статье [11]. Обобщение заключается в том, что невозмущённый оператор уже не предполагается дифференциальным. От него требуется лишь выполнение двух требований. Если сравнивать с дифференциальными операторами, то первое требование – это аналог условия периодичности, а второе требование – аналог условия эллиптичности. В качестве возмущений рассматриваются тоже максимально произвольные операторы. Именно такая достаточно произвольная постановка задачи сильно расшила класс рассматриваемых операторов. Это позволило в качестве невозмущённого оператора выбрать уже не просто дифференциальный оператор, а, например, интегрально-дифференциальный оператор; а в качестве разбегающихся возмущений – не только ограниченные операторы или потенциалы, а, например, интегральный оператор и псевдодифференциальный операторы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Graffi, V. The $\frac{1}{R}$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics / V. Graffi, E. V. Harrell II, H. J. Silverstone // Annals of Physics. — 1985. — V. 165, № 2. — P. 441–483.

2. Höegh-Krohn, R. The $\frac{1}{r}$ Expansion for the Critical Multiple Well Problem / R. Höegh-Krohn, M. Mebkhout // Communications in Mathematical Physics. — 1983. — V. 91, № 1. — P. 65–73.

3. Davies, E. B. The twisting trick for double well Hamiltonians / E. B. Davies // Communications in Mathematical Physics. — 1982. — V. 85, № 3. — P. 471–479.

4. Головина, А. М. О поведении дискретного спектра оператора Лапласа с двумя разбегающимися возмущениями на плоскости в случае двукратного предельного собственного значения / А. М. Головина // Математика и математическое моделирование. — 2022. — № 2. — С. 1–13.

5. Головина, А. М. Асимптотика собственных значений периодического оператора с двумя разбегающимися возмущениями на оси / А. М. Головина // Математика и математическое моделирование. — 2022. — № 1. — С. 21–30.

6. Aktosun, T. On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation / T. Aktosun, M. Klaus, Cornelis van der Mee // Journal of Mathematical Physics. — 1998. — V. 39, № 9. — P. 4249–4259.

7. Tamura, H. Existense of bound states for double well potentials and the Efimov effect / H. Tamura // Lecture notes in Mathematics. — 1990. — V. 1450. — P. 173–186.

8. Kondej, S. Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians / S. Kondej, I. Veselic // Annales Henri Poincaré. — 2007. — V. 8, № 1. — P. 109–134.

9. Borisov, D. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space / D. Borisov //

Annales Henri Poincaré. — 2007. — V. 8, № 7. — P. 1371–1399.

10. Borisov, D. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation / D. Borisov // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. — 2007. — V. 10, № 2. — P. 155–196.

11. Головина, А. М. О спектре периодических эллиптических операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве / А. М. Головина // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 5. — С. 32–60.

12. Головина, А. М. О спектре периодических операторов с разбегающимися возмущениями / А. М. Головина // Математика и Математическое моделирование. — 2017. — № 2. — С. 1–24.

13. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 739 с.

REFERENCES

1. Graffi V., Harrell E.V. II, Silverstone H.J. The $\frac{1}{R}$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics. Annals of Physics, 1985, vol. 165, no. 2, pp. 441–483.

2. Höegh-Krohn R., Mebkhout M. The $\frac{1}{r}$ Expansion for the Critical Multiple Well Problem. Communications in Mathematical Physics, 1983, vol. 91, no. 1, pp. 65–73.

3. Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. Communications in Mathematical Physics, 1982, vol. 85, no. 3, pp. 471–479.

4. Golovina A. On the behavior of the discrete spectrum of the Laplace operator with two distant perturbations on the plane in the case of a double limiting eigenvalue. [Golovina A.M. O povedenii diskretnogo spektra operatora Laplasa s dvumya razbegayushchimisya vozmushcheniyami na ploskosti v sluchae dvukratnogo predel'nogo sobstvennogo znacheniya]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie — Mathematics and mathematical modeling*, 2022, no. 2, pp. 1–13.

5. Golovina A. Asymptotic behavior of the eigenvalues of a periodic operator with two distant perturbations on the axis. [Golovina A.M. Asimptotika sobstvennyh znachenij periodicheskogo operatora s dvumya razbegayushchimisya vozmushcheniyami na osi]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie — Mathematics and mathematical modeling*, 2022, no. 1, pp. 21–30.

6. Aktosun T., Klaus M., Cornelis van der Mee On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation. Journal of Mathematical Physics, 1998, vol. 39, no. 9, pp. 4249–4259.

7. Tamura H. Existense of bound states for double well potentials and the Efimov effect. Lecture notes in Mathematics, 1990, vol. 1450, pp. 173–186.

8. Kondej S., Veselic I. Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians. Annales Henri Poincaré, 2007, vol. 8, no. 1, pp. 109–134.

9. Borisov D. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space. Annales Henri Poincaré, 2007, vol. 8, no. 7, pp. 1371–1399.

10. Borisov D. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 155–196.

11. Golovina A. On the spectrum of elliptic operators with distant perturbation in the space. [Golovina A.M. O spektre periodicheskih ellipticheskih operatorov s razbegayushchimisya vozmushcheniyami v prostranstve]. *Algebra i analiz — Algebra i Analiz*, 2013, vol. 25, no. 5, pp. 32–60.

12. Golovina A.M. On the spectrum of periodic operators with receding perturbations. [Головина А.М. О спектре периодических операторов с разбегающимися возмущениями]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie — Mathematics and mathematical modeling*, 2017, no. 2, pp. 1–24.

13. Kato T. Perturbation theory of linear operators. [Kato T. Teoriya vozmushchenij linejnyh operatorov]. Moscow: Mir, 1972, 739 p.

Головина Анастасия Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: nastya_gm@mail.ru, amgolovina@bmstu.ru

Golovina Anastasia, Candidate of physical-mathematical sciences, Associate-professor, Department of Mathematical Modeling; Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: nastya_gm@mail.ru, amgolovina@bmstu.ru