

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ РОЗЕНЦВЕЙГА-МАКАРТУРА МЕТОДОМ РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ

Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.12.2023 г.

Аннотация. В работе проводится анализ поведения математической модели трех-уровневой пищевой пирамиды, которая называется *моделью Розенцвейга-Макартура* и относится к классу *сингулярно возмущенных систем*. Эта модель описывает динамику трех взаимодействующих популяций разных трофических уровней — *жертвы*, хищника, *суперхищника* и математически записывается в виде системы трех дифференциальных уравнений. В некоторых областях фазового пространства состояние динамической системы может быть с относительной точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных, описывающих *проекцию меньшей размерности*. Проекция меньшей размерности может иметь место во всем фазовом пространстве или в его ограниченных областях. Для описания поведения системы, находящейся в области, где построение проекции меньшей размерности невозможно используются асимптотические методы.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, сингулярно возмущенная система, асимптотические методы, дифференциальные уравнения.

STUDY OF THE ROSENZWEIG-MACARTHUR SYSTEM BY THE METHOD OF CHANNELS AND JOKERS

E. P. Belousova

Abstract. The paper analyzes the behavior of a mathematical model of a three-level food pyramid, which is called the Rosenzweig-MacArthur model and belongs to the class of singularly perturbed systems. This model describes the dynamics of three interacting populations of different trophic levels – prey, predator, super predator and is mathematically written as a system of three differential equations. In some regions of the phase space, the state of a dynamical system can be characterized with relative accuracy by a small number of variables describing a projection of a smaller dimension. A projection of a smaller dimension can take place in the entire phase space or in its limited regions. Asymptotic methods are used to describe the behavior of a system located in a region where the construction of a projection of a smaller dimension is impossible.

Keywords: Nonlinear dynamics, singularly perturbed system, asymptotic methods, differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных и интересных прикладных задач математики является исследование динамики популяций. Заметим, что биологические объекты весьма сложны, и на протекающие в них процессы влияет большое количество факторов. Для математического моделирования их поведения используется *биофизика*. Хорошо известно, что методы нелинейной динамики при решении биофизических задач дают наибольший эффект в случаях, когда размерность

модели невелика [1]. Для исследования систем большой размерности, поведение которых отличается сложностью и разнообразием, удобно применять асимптотические методы. В данной работе будет показано как работает один из таких методов, называемый методом русел и джокеров. Нашей целью является анализ поведения математической модели трехуровневой пищевой пирамиды, т.е. пищевой цепи с тремя трофическими уровнями, которая называется *моделью Розенцвейга-Макартура* [2] и относится к классу *сингулярно возмущенных систем*.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Модель Розенцвейга-Макартура описывает динамику трех взаимодействующих популяций разных трофических уровней — *жертвы*, *консумента* (хищника) и *суперхищника*, являющегося хищником по отношению к консументу. Математически эта модель записывается в виде системы трех дифференциальных уравнений. Элементарным объектом задачи является *популяция*. Основной характеристикой популяции является *численность*, а основной функцией — *авторепродукция* (размножение). В рамках системы Розенцвейга-Макартура, как и в любой другой биофизической модели популяционной динамики, предполагается, что популяция каждого из рассматриваемых видов обладает следующими свойствами непрерывности, однородности, локальности и автономности [3]. Кроме этого, присутствуют следующие дополнительные факторы [2], такие как:

1. **Размножение жертвы.** Популяция жертвы обладает свойством автотрофности, т. е. в отсутствие консумента ее численность увеличивается.
2. **Вымирание консумента (суперхищника).** Популяция консумента (суперхищника) обладает свойством гетеротрофности, т. е. в отсутствие жертвы (консумента) ее численность уменьшается. Другими словами, у консумента (суперхищника) нет другого источника питания.
3. **Переработка биомассы.** В результате взаимодействия данных популяций биомасса жертвы уменьшается, а консумента — увеличивается, поэтому имеют место ограничение на размножение жертвы и поддержание численности популяции консумента.
4. **Ограничение на ресурсы.** Имеет место внутривидовая конкуренция жертвы за ресурсы (воду, пищу, энергию, жизненное пространство), приводящая к тому, что с ростом популяции жертвы ее скорость размножения уменьшается, а скорость смертности увеличивается.
5. **Насыщение консумента (суперхищника).** Увеличение популяции жертвы (консумента) не обязательно ведет к увеличению ее потребления консументом (суперхищником). При малой численности популяции жертвы (консумента) трофическая функция, описывающая процесс потребления консументом (суперхищником) жертвы (консумента), близка к линейной относительно численности популяции жертвы (консумента) функции, при большой численности популяции жертвы (консумента) трофическая функция асимптотически приближается к максимальному значению потребляемых особей жертвы (консумента).
6. **Невырожденность трофической цепи.** Скорость вымирания хищника (суперхищника) не превышает максимальной скорости его размножения.
7. Имеет место *гипотеза о различии масштабов времени* в трофических системах. Удельная скорость роста популяции тем ниже, чем более высокое положение занимает биологический вид в пищевой иерархии.

В некоторых областях фазового пространства состояние динамической системы может быть с относительной точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных, описывающих *проекцию меньшей размерности* [1]. Остальные переменные будут являться несущественными с точки зрения описания системы в рамках задачи. Проекция меньшей размерности может иметь место или во всем фазовом пространстве, или в его ограниченных

областях — *руслах*. Область входа фазовых траекторий в русло (начало русла) называется *истоком*. Область выхода фазовых траекторий из русла (конец русла) называется *устьем*. *Джокер* представляет собой правило, определяющее поведение объекта на некотором подмножестве фазового пространства, в котором возрастает неопределенность в поведении объекта. *Срабатывание джокера* — это привлечение соответствующего джокеру правила.

Различают три основных вида джокеров [4]:

Точечный джокер (джокер первого рода). При его срабатывании система мгновенно переходит в определенную точку фазового пространства.

Двухточечный джокер (джокер второго рода). При его срабатывании система с вероятностью p_1 переходит в некоторую точку A фазового пространства и с вероятностью p_2 — в точку B .

Непрерывный джокер (джокер третьего рода). При срабатывании переводит систему в некоторую точку фазового пространства в соответствии с некоторым заданным законом распределения вероятности.

Рассмотрим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений [5]

$$\begin{cases} \xi \dot{x} = f(x, y), \\ y = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

в которой $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y(t) = (y_1, \dots, y_m)^T$ — векторы размерности n и m соответственно; $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $g = (g_1, \dots, g_m)^T$ — векторные функции; $\xi > 0$ — малый параметр. Осуществляя в (1) предельный переход при $\xi \rightarrow 0$, получим соответствующую ей *вырожденную систему*:

$$\begin{cases} 0 = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Переходя в (1) к *быстрому времени*, осуществив перемасштабирование по правилу $t' = t/\xi$, а затем снова устремив $\xi \rightarrow 0$, получим соответствующую (1) *присоединенную систему*:

$$t' = t/\xi \Rightarrow t = t'\xi, \dot{x} = \frac{dx}{\xi dt'}, \dot{y} = \frac{dy}{\xi dt'},$$

$$\begin{cases} \xi \dot{x} = \frac{dx}{dt'} = f(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{\xi dt'} = g(x, y). \end{cases}$$

Ее можно несколько упростить, если опустить штрихи ($t' \rightarrow t$) и еще раз осуществить предельный переход при $\xi \rightarrow 0$. Получим

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = \xi g(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для системы (1) поставим некоторые начальные условия:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (4)$$

В общем случае решение задачи Коши (1), (4) нельзя аппроксимировать решением вырожденной системы (2) ни при каких сколь угодно малых значениях параметра ξ , т. к. решение

системы (2) не обязательно удовлетворяет начальному условию (4), т. е. $f(x_0, y_0) \neq 0$, однако это решение можно использовать в качестве основы для построения аппроксимации при выполнении определенных условий, которые будут рассмотрены ниже.

Разделив первое из уравнений системы (1) на ξ , можно получить следующее выражение для вектора скорости:

$$\nu = \begin{pmatrix} f(x, y)/\xi \\ g(x, y) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

из которого видно, что, если для некоторой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ фазового пространства системы (1) выполнено условие $f(x, y) = 0$, то первая n -мерная компонента вектора скорости равна нулю, и имеет место *медленное движение*.

Наоборот, если $f(x, y) \neq 0$, то первая компонента вектора ν велика по причине малости параметра ξ , и имеет место *быстрое движение*. Итак, сингулярно возмущенная система (1) обладает свойством чередования медленного и быстрого движений, т.е. демонстрирует *медленно-быструю динамику* [5]. Алгебраическое уравнение:

$$f(x, y) = 0 \quad (6)$$

определяет множество точек $(n+m)$ -мерного фазового пространства, называемое *сингулярно-приближенным медленным многообразием*. Считая переменную y параметром, уравнение (6) можно переписать в виде

$$x = f^{-1}(x, y) \quad (7)$$

Такая запись означает, что уравнение (6) разрешимо относительно переменной x . При любых значениях y выражение (7) определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество Ω , содержащее все особые точки первого из уравнений присоединенной системы (3) [6]. Области медленного движения, определяющими конфигурацию русла, в котором исходная система (1) может быть аппроксимирована вырожденной системой (2), являются устойчивые области множества Ω , т.е. такие его участки, для которых отрицательны действительные части всех собственных значений матрицы:

$$J_x f(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

представляющей собой якобиан векторной функции $f(x, y)$ при условии, что y рассматривается как параметр.

Однако система (2) не подходит для описания движения в областях быстрой динамики и в областях перехода от медленного движения к быстрому, поэтому для данной цели необходимо использовать джокеры.

Точки перехода от быстрого движения к медленному называют *точками падения*, точки перехода от медленного движения к быстрому — *точками срыва*. Точки падения составляют исток русла, точки срыва — устье русла.

Суть метода русел и джокеров, применяемого к сингулярно-возмущенной системе (1), заключается в следующем:

- Пусть фазовая точка вырожденной системы (2) достигает линии срыва в точке S . Тогда нужно зафиксировать значение y и рассмотреть систему уравнений быстрого движения (3), называемую так в силу произведенного выше перемасштабирования времени.
- Если у системы уравнений быстрого движения есть траектория, ведущая из положения равновесия, соответствующего S , в какое-то другое устойчивое положение равновесия, соответствующего точке P фазового пространства вырожденной системы (2), то можно считать,

что фазовая точка вырожденной системы, достигнув точки S , мгновенно переходит в точку P .

Вектор ускорения выстраивается следующим образом:

$$\gamma = \dot{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\xi \partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\xi \partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\xi \partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\xi \partial y} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\xi \partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\xi \partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\xi \partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\xi \partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f(x,y)/\xi \\ g(x,y) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Проекция вектора ускорения γ на направление вектора скорости имеет вид

$$\omega = \gamma^T \cdot (v/||v||). \quad (10)$$

Дальнейшие действия состоят в приведении модели Розенцвейга-Макартура к виду (1), в поиске областей медленной динамики и уравнений медленного движения вида (2), а также в подборе джокеров для приближенного описания поведения системы в областях быстрого движения. Система Розенцвейга-Макартура, обладающая описанными выше свойствами имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(r - \frac{rx}{K} - \frac{p_1 y}{H_1 + x} \right), \\ \dot{y} = y \left(\frac{c_1 x}{H_1 + x} - d_1 - \frac{p_2 z}{H_2 + y} \right), \\ \dot{z} = z \left(\frac{c_2 y}{H_2 + y} - d_2 \right), \end{cases} \quad (11)$$

где $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ — неотрицательные численности популяций жертвы, консумента и суперхищника соответственно; r, d_k, K, p_k, H_k, c_k — неотрицательные коэффициенты, имеющие следующий биофизический смысл:

- r — коэффициент размножения жертвы
- c_1, c_2 — максимальные удельные скорости роста консумента и суперхищника.
- $d_1 < c_1, d_2 < c_2$ — коэффициенты естественной смерти консумента и суперхищника.
- K — так называемая ёмкость экологической ниши (максимально возможное значение численной популяции) жертв.
- p_1, p_2 — максимальные удельные скорости выедания консументом жертвы и суперхищников консумента
- H_1, H_2 — постоянные полунасыщения консумента и суперхищника
- Отношения $c_1/p_1, c_2/p_2$ — это коэффициенты переработки биомассы, отображающие, грубо говоря, какое количество особей жертвы (консумента) необходимо для возвращения одной особи консумента (суперхищника).

Невырожденность трофической цепи обеспечивает выполнение условий $c_2 < c_1, c_1 < r$. Различие масштабов времени означает, что скорость изменения численности жертвы — наибольшая, а суперхищника — наименьшая. Делая замену переменных:

$$t = \frac{1}{c_1} t', x = K x', y = \frac{rK}{p_1} y', z = \frac{c_1 r K}{p_1 p_2} z' \quad (12)$$

используя новые обозначения

$$\xi = \frac{c_1}{r}, \varepsilon = \frac{c_2}{c_1}, \beta_1 = \frac{H_1}{K}, \beta_2 = \frac{p_1 H_2}{r K}, \delta_1 = \frac{d_1}{c_1}, \delta_2 = \frac{d_2}{c_2} \quad (13)$$

и опуская штрихи ($t' \rightarrow t, x' \rightarrow x, z' \rightarrow z$) систему (11) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{cases} \xi \dot{x} = x(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x}) = x f(x, y), \\ \dot{y} = y(\frac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y}) = y g(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z(\frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2) = \varepsilon z h(y). \end{cases} \quad (14)$$

Заметим, что системы (11) и (14) эквивалентны. Однако система (14) содержит меньшее число явных параметров. Другими словами, замены (12) и (13) позволяют упростить дальнейшие вычисления. Из условий на коэффициенты g, c_1, c_2 и из вида выражений (13) вытекает, что справедливы следующие неравенства $0 < \delta_1 < 1, 0 < \delta_2 < 1, 0 < \xi < 1, 0 < \varepsilon < 1$. Таким образом, система (14) является сингулярно возмущенной. В дальнейшем целесообразнее исследовать именно ее.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для того, чтобы построить упрощенную систему уравнений медленного движения для модели Розенцвейга-Макартура, необходимо воспользоваться рассмотренными ранее принципами теории сингулярно возмущенных систем. По аналогии с формулой (2) можно записать уравнения медленного движения, определяемые вырожденной системой, получающейся из исходной системы (14) предельным переходом при $\xi \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} 0 = xf(x, y), \\ \dot{y} = yg(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon zh(y). \end{cases} \quad (15)$$

Уравнение, задающее сингулярно-приближенное медленное многообразие, принимает вид:

$$xf(x, y) = x \left(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = f^{-1}(x, y) = (1 - x)(\beta_1 + x). \end{cases} \quad (17)$$

Тогда, множество

$$\Omega = \{(x, y, z) | x = 0 \cup (x, y, z) | y = f^{-1}(x, y)\}$$

— это сингулярно-приближенное медленное многообразие для рассматриваемой системы. Ветви параболы (17) направлены вниз. Ее вершина — это точка $(\bar{x}, \bar{y})$ с координатами:

$$\bar{x} = \frac{1 - \beta_1}{2}, \bar{y} = f^{-1}(\bar{x}, y) = \left(1 - \frac{1 - \beta_1}{2} \right) + \left(\beta_1 + \frac{1 - \beta_1}{2} \right) = \frac{(1 + \beta_1)^2}{4}$$

Найдем теперь устойчивые области множества Ω , выписав с помощью соотношения (8) якобиан правой части первого из уравнений системы (14) и определив, при каких значениях $(x, y, z) \in \Omega$ действительные части его собственных значений отрицательны. При этом переменную y следует рассматривать как параметр. Якобиан в данном случае одномерен. Поэтому единственное собственное значение λ равно частной производной от функции в правой части первого из уравнений системы (14) по x :

$$\lambda = \frac{\partial(xf)}{\partial x} = f + x \frac{\partial f}{\partial x} = f - x + \frac{xy}{(\beta_1 + x)^2} = 1 - 2x - \frac{\beta_1 y}{(\beta_1 + x)^2}. \quad (18)$$

Уравнение (17), разрешенное относительно x , имеет два корня, симметричных относительно вершины параболы (17) $\bar{x}$, выражения для которых в явном виде будут приведем чуть позже.

Теперь необходимо поочередно подставить в (18) особые точки уравнения (15), т. е. значение $x = 0$ и корни уравнения (17), решаемого относительно x , и выяснить, при каких значениях параметра y действительная часть выражения (18) отрицательна. Пусть особая точка $x = 0$. Тогда

$$\text{Re} \lambda = \lambda = 1 - \frac{y}{\beta_1} < 0 \text{ при } y > \beta_1;$$

и

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x = 0, y > \beta_1\} - \quad (19)$$

первая устойчивая область множества Ω (первое русло). Если особая точка имеет вид $x = f^{-1}(x, y)$, то

$$\lambda = 1 - 2x - \frac{\beta_1 f^{-1}(x, y)}{(\beta_1 + x)^2} = 1 - 2x - \frac{\beta_1(1 - x)}{(\beta_1 + x)} = -\frac{2x(x - \bar{x})}{(\beta_1 + x)}$$

при $x > \bar{x}$ и

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) | y = f^{-1}(x, y), x > \bar{x}\} \quad (20)$$

вторая устойчивая область множества Ω (второе русло). Таким образом, есть две устойчивые области, каждой из которых будет соответствовать своя система дифференциальных уравнений.

Уравнения медленного движения точки системы (15) в области Ω_1 получаются в результате подстановки в систему (15) значения $x = 0$:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left(-\delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(0, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left(\frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y). \end{cases} \quad (21)$$

Фазовая точка системы (15), достигнув линии срыва, покидает плоскость $x = 0$, однако упрощенная система (21) не обладает таким свойством. Для описания медленного движения фазовой точки системы (15) в области Ω_2 нужно подставить в (15) больший (соответствующий определению области Ω_2) из двух корней уравнения $x = f^{-1}(x, y)$. Следует найти его решение:

$$\begin{aligned} y &= (1 - x)(\beta_1 + x) = \beta_1 + (1 - \beta_1)x - x^2 = \beta_1 + 2\bar{x}x - x^2, \\ x^2 - 2\bar{x}x - \beta_1 + y &= 0, \\ D/4 = \bar{x}^2 + \beta_1 - y &= (1 - \beta_1)^2/4 + \beta_1 - y = \bar{y} - y, \\ y = f^{-1}(x, y) &\Rightarrow y \leq \bar{y} \Rightarrow D/4 \geq 0, \\ x &= \bar{x} \pm \sqrt{\bar{y} - y}, \\ \begin{cases} x_{\text{more}} = \bar{x} + \sqrt{\bar{y} - y}, \\ x_{\text{less}} = \bar{x} - \sqrt{\bar{y} - y}. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Наибольшему корню соответствует выражение (22). После его подстановки в систему (15) получаем другую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left(\frac{x_{\text{more}}}{\beta_1 + x_{\text{more}}} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(x_{\text{more}}, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left(\frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y). \end{cases} \quad (23)$$

Система (23) имеет нетривиальную особую точку $\tilde{A} = (\tilde{y}, \tilde{z})$ с координатами:

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{\beta_2}{1/\delta_2 - 1}, \\ \tilde{z} = \left(\frac{x_{\text{more}}}{\beta_1 + x_{\text{more}} - \delta_1} \right) \frac{\beta_2}{1 - \delta_2} \end{cases} \quad (24)$$

Составим характеристическое уравнение для нахождения собственных значений системы (23). Получим:

$$J_{y,z} = \begin{pmatrix} yg \\ \varepsilon zh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(yg(x, y, z))}{\partial y} & \frac{\partial(yg(x, y, z))}{\partial z} \\ \frac{\partial(\varepsilon zh(y))}{\partial y} & \frac{\partial(\varepsilon zh(y))}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + \frac{yz}{(\beta_2 + y)^2} & -\frac{y}{\beta_2 + y} \\ \frac{\varepsilon \beta_2 z}{(\beta_2 + y)^2} & \varepsilon h \end{pmatrix}.$$

$$\left(g + \frac{yz}{(\beta_2 + y)^2} - \lambda\right)(\varepsilon h - \lambda) + \frac{y}{\beta_2 + y} \cdot \frac{\varepsilon \beta_2 z}{\beta_2 + y)^2} = 0, \quad (25)$$

$$\lambda^2 - \underbrace{\left(g + \frac{yz}{(\beta_2 + y)^2} + \varepsilon h\right)}_b \lambda + \underbrace{\frac{y}{\beta_2 + y} \cdot \frac{\varepsilon \beta_2 z}{\beta_2 + y)^2} + \left(g + \frac{yz}{(\beta_2 + y)^2}\right) \varepsilon h}_c = 0, \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (27)$$

Здесь выражение (25) представляет собой якобиан системы (23), уравнение (26) – характеристическое уравнение, а по формуле (27) находим собственные значения, по знакам действительных частей которых делаем соответствующий вывод о принадлежности особой точки $\tilde{A}$ к тому или иному типу.

Таким образом, фазовое пространство упрощенной системы двумерно. Переменные состояния y, z ; x — так называемая скрытая переменная. Для демонстрации результата ее воздействия, т. е. для соответствия поведения упрощенной системы поведению исходной системы, необходимо ввести джокеры. Теперь следует описать поведение упрощенной системы, фазовая точка которой будет двигаться согласно различным системам дифференциальных уравнений в зависимости от правил (джокеров), задать джокеры и определить правила их срабатывания. До того, как фазовая точка системы (23), удаляясь от $\tilde{A}$, достигает линии срыва (прямой $y = \bar{y}$), ее поведение аналогично поведению фазовой точки системы (15). После того, как фазовая точка системы (15) покидает область Ω_2 , выражение (22) и, следовательно, система (23) перестают быть определены из-за отрицательности выражения под радикалом. Происходит смена динамики исходной системы с медленной на быструю, поэтому далее движение фазовой точки упрощенной системы должно описываться системой уравнений (21).

Такое правило перехода от системы (23) к системе (21), описывающее поведение фазовой точки упрощенной системы, является джокером. Обозначим поведение фазовой точки упрощенной системы, является джокером. Обозначим его формально J_1 . Срабатывание этого джокера соответствует срыву фазовой точки, т. е. смене динамики исходной системы с медленной на быструю. Область срабатывания джокера J_1 — линия срыва $y = \bar{y}$.

Пусть теперь фазовая точка упрощенной системы движется, подчиняясь системе (21). Достижение линии падения (прямой $y = \tilde{y}$) соответствует перемещению фазовой точки системы (15) из области Ω_1 в область Ω_2 , т. е. изменению динамики исходной системы с быстрой на медленную. Затем для описания движения фазовой точки упрощенной системы снова должна использоваться система уравнений (23) до тех пор, пока не будет достигнута прямая $y = \bar{y}$, и так далее.

Описанное правило перехода от системы (21) к системе (23) также является джокером. Пусть он будет формально обозначаться через J_2 . Его срабатывание соответствует падению фазовой точки, т. е. смене динамики исходной системы с быстрой на медленную. Областью срабатывания джокера J_2 является линия падения $y = y_f$.

Фазовые траектории упрощенной системы в плоскости (y, z) , будут непрерывны в областях срабатывания джокеров, хотя и не являются гладкими. Нарушение гладкости-признак, указывающий на изменение типа движения, т. е. на срабатывание Джокера.

Описанную выше упрощенную систему с джокерами можно формально обозначить так: (23) — J_1 — (21) — J_2 . При этом следует учитывать, что правило срабатывания Джокера J_2 заключается в переходе от системы (21) к системе (23), т. е. процесс движения по кругу. Фазовые траектории упрощенной системы непрерывны в областях срабатывания джокеров, т. к. перемещение фазовой точки исходной системы между областями Ω_1 и Ω_2 происходит параллельно оси x , а сама переменная x является скрытой.

Удобно считать, что в начальный момент времени $t = 0$ фазовая точка упрощенной системы начинает двигаться по закону (21), если поставленное начальное условие удовлетворяет неравенству $y(0) > \tilde{y}$, и по закону (23) в случае, если не удовлетворяет. Роль джокеров J_1, J_2 заключается в том, что они соединяют фазовые траектории систем (21), (23) и описывают условия, при которых меняется закон движения фазовой точки упрощенной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучена система дифференциальных уравнений Розенцвейга-Макартура, моделирующая процесс взаимодействия трех биологических популяций различных трофических уровней в преположениях, позволяющих считать численности популяций непрерывными величинами.

Исходная модель Розенцвейга-Макартура претерпевает ряд преобразований, позволяющих рассматривать решаемую задачу как сингулярно возмущенную, после чего к ней применяется асимптотический метод русел и джокеров.

Система уравнений, согласно которой движется фазовая точка исходной системы, разделяется на две более простые системы пониженной размерности, каждой из которых соответствует свое русло-область, где конкретная система имеет место. Вводятся джокеры — правила, определяющие условия, при которых происходит смена одной системы другой. Поведение исходной системы приближенно описывается построенной упрощенной системой — проекцией меньшей размерности. Уменьшение размерности характеризуется появлением так называемой скрытой переменной, присутствующей в исходной системе, но отсутствующей как неизвестное в новой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Структуры и хаос в нелинейных средах / Г. Г. Малинецкий, Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 488 с.
2. Базыкин, А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. — М. : Наука, 1985. — 181 с.
3. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. — М. : Наука, 1976. — 288 с.
4. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М. : Наука, 1975. — 304 с.
5. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М. : Наука, 1980. — 232 с.
6. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений : учеб. пособие / В. В. Степанов. — М. : ЛКИ, 2008. — 472 с.
7. Шилдт, Г. Самоучитель C++ / Г. Шилдт. — СПб. : BHV, 2000. — 683 с.

REFERENCES

1. Malinetsky G.G., Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Samarsky A.A. Structures and chaos in nonlinear media. [Malineckij G.G., Ahromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Samarskij A.A. Struktury i haos v nelinejnyh sredah]. Moscow, 2007, 488 p.
2. Bazykin A.D. Mathematical biophysics of interacting populations. [Bazykin A.D. Matematicheskaya biofizika vzaimodejstvuyushchih populyacij]. Moscow: Nauka, 1985, 181 p.
3. Volterra V. Mathematical theory of the struggle for existence. [Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie]. Moscow: Nauka, 1976, 288 p.
4. Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations. [Mishchenko E.F., Rozov N.H. Differencial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksacionnye kolebaniya]. Moscow: Nauka, 1975, 304 p.

5. Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.G. Differential equations. [Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Differencial'nye uravneniya]. Moscow: Nauka, 1980, 232 p.
6. Stepanov V.V. Course of differential equations. [Stepanov V.V. Kurs differencial'nyh uravnenij]. Moscow, 2008, 472 p.
7. Shildt G. Self-study C++. [SHildt G. Samouchitel' C++]. SPb, 2000, 683 p.

Белоусова Елена Петровна, ВГУ, ПММ, кафедра САиУ, доцент, Воронеж, Россия
E-mail: e.p.belousova@gmail.com

Belousova Elena Petrovna, VSU, PMM, Department of SAiU, Associate Professor, Voronezh, Russia
E-mail: e.p.belousova@gmail.com