

ИСКУССТВЕННЫЕ ИММУННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗНАНИЙ

И. Ф. Астахова¹, Ю. В. Хицкова²

¹ — Воронежский государственный университет;

² — Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 15.02.2024 г.

Аннотация. В статье предлагается разработанная авторами модель искусственной иммунной системы. Рассматривается общий алгоритм ее применения, и объясняются способы применения для различных практических задач. Алгоритм изменяется в зависимости от решаемой задачи, но цель решение оптимизационной задачи достигается. Производится сравнение решения известных задач с помощью искусственной иммунной системы и с помощью других методов с известными результатами.

Ключевые слова: искусственные иммунные системы, алгоритмы распознавания, алгоритм в оценке знаний студентов, сравнений с нейронными сетями, оценка результатов.

ARTIFICIAL IMMUNE SYSTEMS AND THEIR APPLICATION TO SOLVING PROBLEMS IN VARIOUS FIELDS OF KNOWLEDGE

I. F. Astakhova, Yu. V. Khitskova

Abstract. The article proposes a model of an artificial immune system developed by the authors. The general algorithm for its application is considered, and the methods of application for various practical problems are explained. The algorithm changes depending on the problem being solved, but the goal of solving the optimization problem is achieved. A comparison is made of the solution of known problems using an artificial immune system and using other methods with known results.

Keywords: artificial immune systems, recognition algorithms, algorithm in assessing students' knowledge, comparisons with neural networks, evaluation of results.

1. ВВЕДЕНИЕ

В мире современных высоких технологий всё чаще и чаще можно заметить, как алгоритмы и идеи, придуманные ещё в прошлом веке, реализуются, развиваются и имеют огромный спрос. Так появились и иммунные системы [1-2].

Целью данной работы является исследование и реализация алгоритмов решения задач на основе искусственной иммунной системы.

Искусственную иммунную систему можно представить как совокупность следующих элементов [3]:

$$IIS = \langle L, G, A, \mu, S \rangle,$$

где IIS – искусственная иммунная система, L – пространство всех возможных антител. В зависимости от задачи антителом может представлять собой строку, список координат, дерево выражения. G – множество всех возможных антигенов. В зависимости от задачи, может быть

строкой, матрицей логических значений, списком значений функции в известных точках. $A : L \times G \rightarrow [0,1]$ – заданная мера аффинности, которая каждому антители и каждому антигену ставит в соответствие число из отрезка $[0, 1]$, которое показывает, насколько хорошо данное антители реагирует на поданный антиген. $\mu : L \rightarrow L$ – оператор мутации, применяемый к отдельному антители с целью улучшения его свойств. $S : A \subset L \rightarrow B \subset A \subset L$ – оператор селекции, оставляющий в текущей иммунной системе лучшие антители, поддерживая размер сети.

Тогда алгоритм можно представить в виде последовательности следующих шагов:

1. Выбрать начальную популяцию $ImSystem \subset L$.
2. Подается $g \in G$, $\forall l \in ImSystem : a_l = A(l, g)$.
3. Находится наилучшее антители – текущее решение: $l^* = argmax(a_l)$.
4. К антителям применяется оператор мутации: $M = \{\mu(l), l \in ImSystem\}$.
5. Для сохранения размера сети применяется оператор селекции, который из текущего набора антители и множества мутировавших антители (полученного на 4) создает новую систему: $ImSystem = S(ImSystem \cup M)$.
6. Если решение l^* удовлетворяет заданному критерию или достигнуто максимальное число итераций – выход, иначе – возврат к шагу 2.

Для различных технических задач эта модель и алгоритм будут незначительно меняться в зависимости от решаемой проблемы.

2. МОДЕЛЬ ИСКУССТВЕННОЙ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Классификация отдельных клеток и молекул является важнейшим свойством естественной иммунной сети. Условно можно выделить 2 вида такой классификации: классификация «свой – чужой» и более детальный анализ тех клеток и молекул, которые были классифицированы как чужеродные. В данной задаче первый тип использоваться не будет, так как он не находит отражения в исследуемой задаче распознавания. Второй же тип, по сути, и является именно тем механизмом, который позволит распознавать различные образы. Таким образом, изображения будут играть роль антигенов, а иммунная система на основе реакции B -антителом будет определять тип этого антигена. Однако данная задача имеет существенные особенности. Отметим важнейшие из них. Каждому антители можно приписать номер антигена, на который данное антители будет реагировать.

1 шаг. Цветное изображение, заданное в формате RGB , нужно перевести в изображение в оттенках серого. Для этого можно воспользоваться следующей формулой [5]:

$$Y = 0.3 \cdot R + 0.59 \cdot G + 0.11 \cdot B,$$

где R, G, B – соответственно компоненты цвета в формате RGB (красный, зеленый, синий). Эта формула исходит из воздействия каждого цвета на яркость изображения, и является одной из трех формул преобразования RGB в YUV (отвечающая за компоненту Y). Для получения изображения в оттенках серого, значения всех трех компонент цвета формата RGB установим равными найденному значению Y

$$R = G = B = Y.$$

Таким образом, получено изображение с 256 оттенками серого.

2 шаг. Проведем бинаризацию изображения по методу Отсу [6].

3 шаг. Проведем масштабирование по методу Брезенхема [7]. Для иммунной системы представление изображения [3]: монохромное изображение можно представить как матрицу

размера $M \times N$, в которой true стоит на тех местах, которые в изображении соответствуют пикселям черного цвета, которые и формируют изображение. Представление B -антител можно рассматривать как массив из P пар чисел. Каждая такая пара представляет собой координаты пикселя в изображении. Однако будем использовать немного усложненное представление антител, в котором еще хранится информация о тех пикселях, которые должны быть белыми (незаполненными). Таким образом, антитело содержит два списка координат, один из которых хранит координаты черных пикселей, а другой – координаты белых. Число S можно представить в виде суммы $S = S_1 + S_2$, где S_1 – количество черных пикселей поданного изображения (антигена), которые определяются координатами из первого списка антитела; S_2 – количество белых пикселей поданного изображения (антигена), которые определяются координатами из второго списка антител. Структурная модель антитела изображена на рисунке 1.[3]

(1, 5), (4,56), ..., (45, 1)	список координат черных пикселей	} всего N
(4,75), (23, 1), ..., (1, 9)	список координат белых пикселей	
2	номер антигена	

Рис. 1. Структурная модель антитела.

Аффинность. Введем некоторое число $P > S$. Будем говорить, что антитело реагирует на данный антиген, если количество элементов матрицы антигена со значениями true, определяемых номерами строк и столбцов массива пар чисел антитела, больше либо равно S . На основе данного определения можно посчитать количество антител, реагирующих на данный антиген. В идеальном случае (если антиген подан без искажений и иммунная сеть хорошо обучена) именно идентификатор этого антигена и будет ответом. Введем меру аффинности данному антигену для каждого антитела. Аффинность будет представлена формулой [3]:

$$f = \frac{S}{N},$$

где S – уже рассмотренная нами величина, а N – количество пикселей в обоих списках антитела (количество пикселей, о которых антитело хранит информацию).

Состав сети. Также можно отметить следующее упрощение модели естественной иммунной системы. Будем рассматривать только B -антитела, причем все из них будут использоваться для классификации каждого антигена. T -антитела в данной искусственной системе рассматриваться не будут. Таким образом, получили описание используемой искусственной иммунной системы.

3. ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИСКУССТВЕННЫХ ИММУННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

Есть множество значений свободных переменных $\{x_1, \dots, x_r\}$, где $x_i \in R^n$ и соответствующих им значений функции $\{y_1, \dots, y_r\}$. Эти два множества образуют множество исходных данных – D . Задано множество функций, которые будут использоваться при построении суперпозиции. Будем рассматривать только непрерывно дифференцируемые функции: $g : R^n \rightarrow R$, такие как $\sin$, $\cos$, полиномы. Рассмотрим произвольную суперпозицию f , состоящую из не более m функций g . Требуется найти такую суперпозицию, которая бы доставляла максимум (минимум) заданного функционала $p(f, D)$. Этот функционал и определяет целевую функцию. Его выбирают таким образом, чтобы он показывал степень приближения построенной

функции к искомой. Для этого можно использовать различные метрики и расстояния, относительную или абсолютную погрешность – разницу исходных значений и значений полученной функции в этих же точках.

Представление антител [3]. Удобным представлением как для реализации, там и для последующей работы алгоритма, можно считать дерево выражения. Так как использоваться будут только бинарные и унарные операции, данное дерево будет бинарным. Например, для выражения $x - 2 * (1/x + x/3)$ дерево будет выглядеть следующим образом (рис. 2):

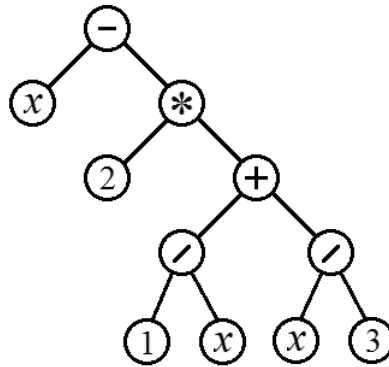


Рис. 2. Пример дерева выражения.

Поскольку количество переменных заранее известно, антитело также хранит список допустимых переменных. Антитело должно поддерживать следующие операции [3]:

1. Вычисление значения представляемой функции в точке.
2. Вычисление меры аффинности данного антитела.
3. Упрощение соответствующего выражения.
4. Возвращение строкового представления выражения (с правильно расставленными скобками).

Таким образом получим, что функция, которую представляет собой антитело, можно записать в виде:

$$F = f_1(f_2(\dots f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))),$$

где $f_1, \dots, f_m$ – функции из заданного набора, m – число функций, меньше либо равно максимально допустимой высоте дерева выражения, x_i – свободные переменные.

Аффинность (целевая функция). Антигеном является множество входных данных – значений функций в заданных точках. В данной модели аффинность характеризует степень «успешности» аппроксимации, т.е. является значением целевой функции. Будет использоваться следующая функция:

функция: $\sqrt{\sum_{i=1}^r (f(x_i) - y_i)^2}$, где:

$\{x_1, \dots, x_r\}$, $x_i \in R^n$ – заданное множество значений свободных переменных;

$\{y_1, \dots, y_r\}$ – заданное множество значений искомой функции в соответствующих точках x_i ;

$f(x_i)$, $i = \overline{1, r}$ – множество значений функции, представляемой данным антителом, в соответствующих точках x_i .

Структура сети. Сеть однородна и состоит только из описанных выше B - антител.

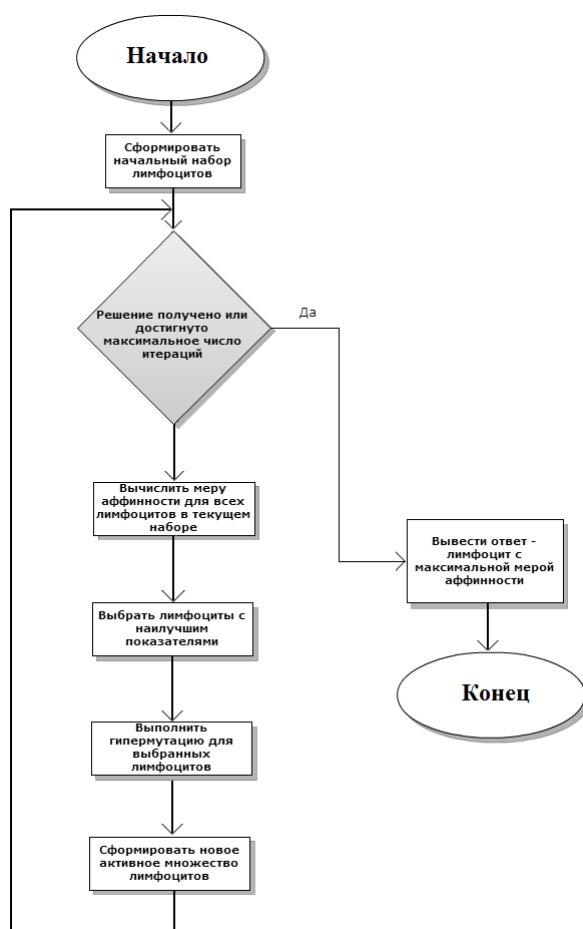


Рис. 3. Алгоритм работы искусственной иммунной системы.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОЙ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ [4]

Пусть $G_i = \{g_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ — множество компетенций, формируемых в результате изучения i -го курса, $EPS_i = \{eps_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N_1$ — множество практических заданий i -го курса, N_1 — количество практических заданий курса, причем каждое задание может быть направлено на формирование нескольких компетенций. Каждое практическое задание учебного курса характеризуется следующими показателями. Вес задания вычисляется по формуле [4]:

$$\mu_k = \frac{n_1}{m}, \quad (1),$$

где n_1 — количество компетенций учебного курса, формированию которых способствует успешное выполнение данного задания, m — общее количество компетенций данного учебного курса. Согласно классической теории тестирования, каждое задание eps_{ij} характеризуется трудностью δ_j :

$$\delta_j = Ne_j/Nt_j, j = 1, \dots, N_1, \quad (2),$$

где Ne_j — количество обучающихся, выполнивших задание неверно, Nt_j — количество обучающихся, выполнявших это задание, j — номер задания.

Требуется найти оптимальный набор заданий, выбранных из каждого класса, позволяющих покрыть все компетенции.

Множество практических заданий класса может быть подвергнуто дискретной кластеризации. В один класс включаются задания, направленные на достижения одинаковых компетенций курса. Затем внутри каждого из классов может быть проведена интервальная кластеризация на основе показателя трудности заданий. После выполнения этих процедур множество заданий будет разделено на классы, близких по трудности заданий, направленных на достижение одинаковых компетенций курса.

Каждый класс характеризуется:
количеством заданий ke ,
весом заданий μ_i , вычисленным по формуле (1),
коэффициентом средней трудности заданий, определяемым по формуле:

$$\delta_{lmid} = (\sum_1^{ke} \delta_i) / ke, \quad (3)$$

где ke — количество заданий данного класса, δ_i — трудность i задания этого класса, вычисляемая по формуле (2).

Для формулировки целевой функции и ограничений использовалась модель Г. Марковица. Требуется определить долю заданий каждого класса в общем количестве практических заданий, предлагаемых обучающемуся и отвечающих условиям:

$$R(X) = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \sigma_{ij} x_i x_j \rightarrow \min, \quad D(X) = \sum_{i=1}^{N_2} \mu_i x_i \rightarrow \max, \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N_2} x_i = 1, \quad x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, N_2, \quad (5)$$

где N_2 — число классов заданий, которые доступны в учебном курсе; μ_i — вес заданий класса i , σ_{ij} — ковариация коэффициентов средней трудности заданий классов i и j ; $x_i^{\min}$ — нижнее ограничение на долю заданий, выбираемых из класса i , $x_i^{\max}$ — верхнее ограничение на долю заданий, выбираемых из класса i , x_i — доля от общего объема заданий, выбранная из данного класса i .

Переменными модели являются x_i — доля ($0 \leq x_i \leq 1$) от общего количества заданий, выбранная из класса i ($i = 1, \dots, N_2$).

5. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ СОДЕРЖАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ КУРСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОЙ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ

1. Определение антигена. В качестве антигена Ag рассматривается вектор $Ag = (R^*(X), D^*(X))$, компоненты которого являются оптимальными значениями соответствующих функций, найденными по отдельности, при переводе второй функции в ограничения.

2. Формирование популяции антител. Антителом в данной задаче является вектор X . Популяция антител имеет размерность W , определяемую экспертом.

3. Оценка аффинитета антител к антигену. Для каждого антитела X в популяции вычисляется вектор $F(X) = (R(X), D(X))$, к ним применяется процедура ранжирования. В текущей популяции находятся, выделяются в отдельное множество и временно исключаются из рассмотрения все недоминируемые по Парето антитела. Затем эта процедура повторяется. Элементы, принадлежащие последнему рассмотренному множеству, получают ранг 1,

предпоследнему – ранг 2. Недоминируемые решения, исключенные первыми, получают наивысший ранг r , соответственно равный количеству проведенных процедур исключения. Для каждого антитела X вычисляется евклидово расстояние d между векторами $F(X)$ и Ag . Каждое антитело X получает оценку аффинитета $Aff(X)$.

$$Aff(X) = r + 1/d,$$

где r — ранг множества, которому принадлежит данное антитело. Такой метод назначения оценок настраивает алгоритм на поиск недоминируемых решений, имеющих наибольшую близость к оптимальным значениям, вычисленным по каждому из критериев в отдельности.

4. Отбор антител с наилучшими показателями аффинитета и клонирование. Определяется антитело с наилучшим показателем аффинитета, которое считается текущим решением задачи. Выбирается k_2 ($k_2 < W$) антител с наилучшими показателями аффинитета, к которым применяется оператор клонирования, создается p_2 копий каждого экземпляра.

5. Оператор мутации клонов антител.

6. Вычисление аффинитета клонов антител.

7. Формирование новой популяции антител. Текущая популяция увеличивается за счет присоединения клонов, затем r_2 антител с наихудшими показателями аффинитета ($k_2 \cdot p_2 < r_2 < W$) удаляется из популяции. Размер популяции восстанавливается до исходной величины присоединением новых сгенерированных антител.

Начиная с третьего шага, процесс повторяется до тех пор, пока наилучшее значение аффинитета перестает меняться на протяжении некоторого, определённого пользователем, количества повторений цикла. Решением задачи является текущее решение, полученное в ходе последней итерации алгоритма.

6. ТОЧНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ, СРАВНЕНИЕ С СУЩЕСТВУЮЩИМИ МЕТОДАМИ

Для сравнения работы различных алгоритмов распознавания рукописных символов использовались данные базы MNIST (Mixed National Institute of Standards and Technology database – смешанная база данных национального института стандартов и технологий). Ее структура описана в работе [8]. Множество символов для обучения состоит из 60000 рукописных изображений цифр от 0 до 9. Размер каждого изображения составляет 28 на 28 пикселей, каждый символ масштабирован до этого размера. Цветность изображения составляет 255 оттенков серого, где белый цвет – фон, черный цвет – сам символ. В качестве тестовой выборки используется набор из 10000 символов такого же формата. Для решения этой задачи была использована искусственная иммунная система со следующими параметрами:

Размер антитела – 200 пикселей.

Пороговое значение аффинности, при котором считается, что антитело среагировало на поданный образ – 0.8.

Размер обучающей выборки – 60000 символов.

Размер тестовой выборки – 10000 символов.

Во время обучения для каждого поданного образа генерируется 80 антител, реагирующих на него.

После обучения искусственной иммунной сети с вышеприведенными параметрами, на тестовом множестве алгоритм показал точность 3.04. Приведем точности других методов на этих же самых обучающих и тестовом множестве символов, данные взяты из работ [9-11]. Сравнение происходило со следующими методами: двуслойная нейронная сеть 300 нейронов в скрытом слое,

двуслойная нейронная сеть 1000 нейронов в скрытом слое,

трехслойная нейронная сеть 300 и 100 нейронов в скрытом слое,

Трехслойная нейронная сеть 500 и 150 нейронов в скрытых слоях соответственно, шестислойная нейронная сеть с количеством нейронов 784-2500-2000-1500-1000-500-10, параллельная версия, работающая на видеоускорителях, искусственная иммунная система.

Таблица 1. Сравнительная точность различных методов распознавания

Метод	Процент неправильного распознавания изображений текстового набора
Линейный классификатор (нейронная сеть с 1-м уровнем)	12.0
k ближайших соседей, евклидово расстояние	5.0
Метод главных компонент и квадратичный классификатор	3.3
Метод опорных векторов (Гауссово ядро)	1.4
Двуслойная нейронная сеть, 300 нейронов в скрытом слое	4.7
Двуслойная нейронная сеть, 1000 нейронов в скрытом слое	4.5
Трехслойная нейронная сеть, 300 и 100 нейронов в скрытых слоях соответственно	3.05
Трехслойная нейронная сеть, 500 и 150 нейронов в скрытых слоях соответственно	2.95
Шестислойная нейронная сеть с количеством нейронов 784 – 2500 – 2000 – 1500 – 1000 – 500 – 10, параллельная версия, работающая на видеоускорителях	0.35
Искусственная иммунная система	3.04

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение результатов позволило сделать вывод о возможности применения иммунных систем при решении задач в различных отраслях знаний, таких где применимы результаты [12-14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Искусственные иммунные системы и их применение : сб. статей / под ред. Д. Дасгупты. — М. : Физматлит, 2006. — 344 с.
2. Immunological Computation : Theory and Applications / D. Dasgupta, F. Nino. — CRC Press, 2008. — 296 p.
3. Ушаков, С. А. Разработка и исследование алгоритмов решения задач распознавания на основе искусственных иммунных систем : дис. ... канд. техн. наук / С. А. Ушаков. — Воронеж, 2015. — 138 с.
4. Киселева, Е. И. Разработка модели обучающей системы и алгоритмов ее функционирования с помощью интеллектуальных методов : дис. ... канд. физ-мат. наук / Е. И. Киселева. — Воронеж, 2018. — 138 с.
5. Федоров, А. Бинаризация чёрно-белых изображений: состояние и перспективы развития / А. Федоров // Интеллектуальные технологии и системы. — 2002. — (<http://philippovich.ru/Library/Books/ITS/wwwbook/ist4b/its4/index2.htm>).
6. Otsu, N. A threshold selection methods from grey-level histograms / N. Otsu // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1979. — V. 9. — P. 62–66.
7. Роджерс, Д. Алгоритмические основы машинной графики / Д. Роджерс. — М. : Мир, 1989. — С. 54–63.

8. LeCun, Y. The MNIST Database of handwritten digits / Y. LeCun, C. Cortes, C. J. C. Burges. — (<http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>).
9. Deep Big Simple Neural Nets Excel on Handwritten Digit Recognition / C. D. Ciresan, U. M. Dan, L. M. Gambardella, J. Schmidhuber // *Neural Computation*. — 2010. — V. 22 (12). — P. 3207–3220.
10. Deformation models for image recognition / D. Keysers, T. Deselaers, C. Gollan, H. Ney // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2007. — V. 29(8). — P. 1422–1435.
11. Kussul, E. Improved method of handwritten digit recognition tested on MNIST database / E. Kussul, T. Baidyk // *Image and Vision Computing*. — 2004. — V. 22 (12). — P. 971–981.
12. Варвинская, Н. И. Учет сопротивлений при оптимальном управлении движением объекта конечной жесткости / Н. И. Варвинская // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*. — 2023. — № 1. — С. 43–53.
13. Авдеев, Н. Н. О разделяющих множествах меры нуль и функционалах Сачестона / Н. Н. Авдеев // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*. — 2021. — № 4. — С. 38–50.
14. Охлупина, О. В. О весовых классах целевых функций типа Валирона / О. В. Охлупина // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*. — 2021. — № 2. — С. 114–119.

REFERENCES

1. Artificial immune systems and their applications: collection of articles, edited by D. Dasgupta. [Iskusstvennye immunnnye sistemy i ih primeneniye : sb. statej, pod red. D. Dasgupty]. Moscow, 2006, 344 p.
2. Dasgupta D., Nino F. Immunological Computation: Theory and Applications. CRC Press, 2008, 296 p.
3. Ushakov S.A. Development and research of algorithms for solving recognition problems based on artificial immune systems. [Ushakov S.A. Razrabotka i issledovanie algoritmov resheniya zadach raspoznavaniya na osnove iskusstvennyh immunnyh sistem]. Diss. candidate of technical sciences, Voronezh, 2015, 138 p.
4. Kiseleva E.I. Development of a model of a training system and algorithms for its operation using intelligent methods. [Kiseleva E.I. Razrabotka modeli obuchayushchej sistemy i algoritmov ee funkcionirovaniya s pomoshch'yu intellektual'nyh metodov]. Dis. Cand. of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh, 2018, 138 p.
5. Fedorov A. Binarization of black and white images: status and development prospects. [Fedorov A. Binarizaciya chyorno-belyh izobrazhenij: sostoyanie i perspektivy razvitiya]. *Intellektual'nye tekhnologii i sistemy — Intelligent technologies and systems*, 2002. (<http://philippovich.ru/Library/Books/ITS/wwwbook/ist4b/its4/index2.htm>).
6. Otsu N. A threshold selection methods from grey-level histograms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1979, vol. 9, pp. 62–66.
7. Rogers D. Algorithmic Foundations of Computer Graphics. [Rodzhers D. Algoritmiteskie osnovy mashinnoj grafiki]. Moscow, 1989, pp. 54–63.
8. LeCun Y., Cortes C., Burges C.J.C. The MNIST Database of handwritten digits. (<http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>).
9. Ciresan C.D., Dan U.M., Gambardella L.M., Schmidhuber J. Deep Big Simple Neural Nets Excel on Handwritten Digit Recognition. *Neural Computation*, 2010, vol. 22 (12), pp. 3207–3220.
10. Keysers D., Deselaers T., Gollan C., Ney H. Deformation models for image recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, vol. 29(8), pp. 1422–1435.
11. Kussul E., Baidyk T. Improved method of handwritten digit recognition tested on MNIST database. *Image and Vision Computing*, 2004, vol. 22 (12), pp. 971–981.

12. Varvinskaya N.I. Accounting for resistances in optimal control of the motion of an object of finite rigidity. [Varvinskaya N.I. Uchet soprotivlenij pri optimal'nom upravlenii dvizheniem ob"ekta konechnoj zhestkosti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2023, no. 1, pp. 43–53.

13. Avdeev N.N. On separating sets of measure zero and Sucheston functionals. [Avdeev N.N. O razdelyayushchih mnozhestvah mery nul' i funkcionalah Sachestona]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 38–50.

14. Okhlupina O.V. On weight classes of objective functions of Valiron type. [Okhlupina O.V. O vesovyh klassah celevyh funkcij tipa Valirona]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 114–119.

Астахова Ирина Федоровна, профессор, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: astachova@list.ru

Astakhova Irina Fedorovna, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: astachova@list.ru

Хицкова Юлия Владимировна, доцент, Воронежский технический государственный университет, Воронеж, Россия

Khitskova Yulia Vladimirovna, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia