

О НЕКОТОРЫХ ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРАХ И ИХ ОБРАЩЕНИИ

Х. Алкади

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07.03.2024 г.

Аннотация. В работе рассматривается дробно дифференциальный полиномиальный оператор, обобщающий многочлен с целочисленным дифференцированием. Исследуется его обратимость в классах функций ограниченных со специальным весом. Устанавливается существование ограниченного обратного к рассматриваемому оператору в этих пространствах. Указывается интегральное представление и оценка решения через правую часть. Отметим, что полученный результат является важным при установлении так называемой промежуточной асимптотикой Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича для задач без начальных условий.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы, h -весовых пространствах, дробные степени операторов, корректные задачи, ортогональные многочлены, задачи без начальных условий.

ABOUT SOME FRACTIONAL POLYNOMIAL OPERATORS
AND THEIR INVERSION

H. Alkadi

Abstract. The paper considers a fractional differential polynomial operator that generalizes a polynomial with integer differentiation, investigates its invertibility in classes of bounded functions with special weight, establishes the existence of a bounded inverse to this operator in these classes, and indicates the integral representation and the evaluation of the solution through the right-hand side. It is to be noted that, the result obtained is important in establishing the so-called intermediate asymptotics of G. I. Barenblatt and Ya. B. Zeldovich for problems without initial conditions.

Keywords: Strongly continuous semigroups, h -weighted spaces, fractional powers of operators, well-posed problems, orthogonal polynomials, problems without initial conditions.

ВВЕДЕНИЕ

В [6] для дифференциального уравнения

$$P_n(\mathbb{D}_x^\nu)u = \sum_{m=0}^n a_m ({}_0\mathbb{D}_x^\nu)^m u(x) = f(x), \quad x \in (0, \infty), \quad (1)$$

где ${}_0\mathbb{D}_x^\nu$ дробная производная по Капуто порядка $\nu \in (0, 1)$, $f(x)$ -кусочно-непрерывная функция экспоненциального типа на $[0, \infty)$ рассматривается однородная задача Коши с условиями

$$u(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

и показывается, что задача имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$u(x) = \int_0^x q(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^x q(\xi)f(x-\xi)d\xi, \quad (3)$$

где $q(x)$ — дробная функция Грина, найденная из характеристического полинома $P_n(p) = \sum_{m=0}^n a_m p^m$ с помощью обратного преобразования Лапласа.

Заметим, что при этом не обсуждается устойчивость к погрешности решения $u(x)$ в зависимости от погрешностей $f(x)$, что необходимо при численной реализации задачи для обоснования корректной разрешимости по Адамару, что соответствует существованию и ограниченности в некоторых метрических пространствах $f \in E$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ

В настоящей работе рассматривается обобщенное уравнение

$$P_n(A^\nu)u = \sum_{m=0}^n a_m ({}_0A^\nu)^m u(x) = f(x) \quad (4)$$

на случай дробно-операторного полинома построенного по дробным степеням некоторых операторов

Устанавливается существование и ограниченность обратных операторов в соответствующих банаховых пространствах

Для формулировки результата нам понадобятся следующие понятия и факты (см. [4]–[8]):

1. C_0 —полугруппы и дробные степени операторов.
2. C_0 —полугруппы h -сжатий.

C_0 —**полугруппы**. Семейство $U(t), t \geq 0$ линейных преобразований называется сильно непрерывной полугруппой C_0 —полугруппой действующей в банаховом пространстве E , если оно удовлетворяет условиям:

1. $U(0)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in E$
2. $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi, \quad \varphi \in E$
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \varphi \in E$

существуют $M \geq 0$ и $w \in \mathbb{R}$ для которых выполняется оценка

$$\|U(t)\varphi\|_E \leq M e^{wt} \|\varphi\|$$

Дробные степени операторов. Если оператор A такой, что $-A$ является генератором полугруппы $U(t, -A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leq m e^{-wt} \|\varphi\|, \quad w > 0, t \geq 0, \quad (5)$$

то для A определены дробные степени

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} [U(t, -A) - I] \varphi dt, \quad \alpha \in (0, 1) \quad \text{— формула Балакришнана} \quad (6)$$

Замечание. Согласно [3] формула (6) справедлива и для $w = 0$ в (5), так как в этом случае $U(t, -A)$ является равностепенной непрерывной полугруппой класса C_0 (см. [3] определение стр. 324 и пример на стр. 325).

Полугруппы класса C_0 в h —весах пространствах. Пусть $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ и $h(x)$ —функция, удовлетворяет условиям:

1. $h'(x) > 0$,
2. $h(a) = -\infty$,
3. $h(b) = \infty$,
4. $h(0) = 0$.

С помощью норм

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in (a,b)} e^{-\mu h(x)} |\varphi(x)|$$

введём пространство $C_\mu(a,b)$ и определим преобразование

$$U(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) - t)], \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Лемма. Операторное семейство $U(t)$ определенное соотношением (7) является C_0 — полугруппой в пространствах $C_\mu(a,b)$ с нормой

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in (a,b)} e^{-\mu h(x)} |\varphi(x)|, \quad \mu > 0 \quad (8)$$

Докажем что семейство $U(t)$ является сильно непрерывной полугруппой и для него справедлива оценка

$$\|U(t)\varphi(x)\| \leq e^{-\mu t} \|\varphi(s)\|_\mu$$

Делая в (7) замену

$$h^{-1}(h(x) - t) = s \quad \leftrightarrow \quad h(x) - t = h(s) \quad \leftrightarrow \quad h(x) = h(s) + t$$

тогда

$$\begin{aligned} e^{-\mu h(x)} U(t)\varphi(x) &= e^{-\mu h(x)} \varphi[h^{-1}(h(x) - t)] = \\ &= e^{-\mu(h(s)+t)} \varphi(s) = e^{-\mu h(s)} e^{-\mu t} \varphi(s) \leq e^{-\mu t} \|\varphi(s)\|_\mu \leftrightarrow \\ \|U(t)\varphi(x)\| &\leq e^{-\mu t} \|\varphi(s)\|_\mu \\ U(0)\varphi &= \varphi[h^{-1}(h(x) - 0)] = \varphi(x) \\ U(t)U(s)\varphi(x) &= U(t)\varphi[h^{-1}(h(x) - s)] = \\ &= \varphi[h^{-1}[h(h^{-1}(h(x) - s) - t)]] = \varphi[h^{-1}(h(x) - s - t)] = \\ &= \varphi[h^{-1}(h(x) - (t + s))] = U(t + s)\varphi(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Оператор вида

$$\mathbb{D}_h = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} \quad (10)$$

с областью определения

$$D(\mathbb{D}_h) = \{\varphi, \varphi \in C_\mu, -\frac{d\varphi}{dh} \in C_\mu\} \quad (11)$$

является производящим оператором полугруппы $U(t) = U(t, \mathbb{D}_h)$, так как

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dU(t)\varphi(x)}{dt} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \varphi[h^{-1}(h(x) - t)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\varphi'[h^{-1}(h(x) - t)]}{h'[h^{-1}(h(x) - t)]} = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор (10) с областью определения (11) является производящим оператором полугруппы $U(t) = U(t, \mathbb{D}_h)$.

Заметим, что при $h(x) = \ln(x)$ оператор (10) является оператором Адамара-Эйлера $\mathbb{D} = x \frac{d\varphi}{dx}$.

Используя формулы Балакришнана, получаем следующие представления для полугрупп дробных степеней оператора $\mathbb{D}_h$

$$\begin{aligned} U(t, \mathbb{D}_h^\alpha) \varphi &= \int_0^\infty h_{s,t}(\xi) U(\xi, \mathbb{D}_h) \varphi(x) d\xi \leftrightarrow \\ U(t, (\frac{d\varphi}{dh})^\alpha) \varphi &= \int_0^\infty h_{s,t}(\xi) \varphi[h^{-1}(h(x) - \xi)] d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

Дробная степень.

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_h^\alpha \varphi &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{U(t, -\mathbb{D}_h) \varphi - \varphi}{t^{1+\alpha}} dt \\ (\frac{d\varphi}{dh})^\alpha \varphi &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi[h^{-1}(h(x) - \xi))] - \varphi}{\xi^{1+\alpha}} dt \end{aligned} \quad (13)$$

Приведём примеры h -дифференциальных операторов и производящих их полугрупп:

1. Если $h(x) = \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$, то

$$U(t) \varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) - t)] = \varphi[e^{(\ln x - t)}] = \varphi(xe^{-t})$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}_h \varphi(x) &= -x \frac{d\varphi}{dx}, \\ \mathbb{D}_h^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi(xe^{-t}) - \varphi(x)}{t^{1+\alpha}} dt \end{aligned}$$

2. Для $x \in (-\infty, \infty)$ рассмотрим функцию

$$h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (14)$$

$$h(-\infty) = -\infty, \quad h(\infty) = \infty.$$

Непосредственной проверкой можно показать, что обратная функция имеет вид

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{sh}(x) \quad (15)$$

В пространствах, заданных нормой

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in (a,b)} e^{-\mu h(x)} |\varphi(x)| = \sup_{x \in (a,b)} (x + \sqrt{1+x^2})^{-\mu} |\varphi(x)|,$$

в соответствии с формулой (7), имеем полугруппы

$$\begin{aligned} U(t, -\mathbb{D}_h) \varphi(x) &= \varphi \left\{ \frac{1}{2} [e^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-t} - e^{-[\ln(x+\sqrt{x^2+1})-t]}] \right\} = \\ &= \varphi \left[\frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 1}) e^{-t} + \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 + 1}) e^t \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Для $\pm \mathbb{D}_h \varphi$ очевидно имеем представление

$$\mathbb{D}_h \varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]'} = \sqrt{1+x^2} \varphi'(x) \quad (17)$$

$$-\mathbb{D}_h \varphi(x) = -\sqrt{1+x^2} \varphi'(x) \quad (18)$$

Наконец формулы (12) и (13) дают выражения для соответствующих дробных для $\pm \mathbb{D}_h$ степеней.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

С целью продолжения исследования задач без начальных условий для уравнений с дробными производными, с применением операторных методов функционального анализа в настоящей заметке изучается корректная разрешимость задачи без начальных условий для дробно-полиномиального уравнения в h -весовых пространствах

$$L_n \varphi(x) = \sum_{m=0}^n a_m (\mathbb{D}_h^\nu)^m \varphi = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (19)$$

где $\mathbb{D}_h^\nu$ дробная степень порядка $\nu \in (0, 1)$ оператора $\mathbb{D}_h$ заданного выражением $\frac{d}{dh}$ и областью определения $D(\mathbb{D}_h) = \{\varphi \in C_\mu, \frac{d\varphi}{dh} \in C_\mu\}$ где C_μ — банахово пространство непрерывных на (a, b) функций с нормой

$$\|\varphi\|_\mu = \sup_{x \in (a, b)} e^{-\mu h(x)} |\varphi(x)|$$

Что эквивалентно, как известно, существованию ограниченного обратного L_n^{-1} в пространствах C_μ .

Показывается, что справедлива следующая

Теорема корректности. Пусть в уравнении (19) $f \in C_\mu$ и характеристический полином $L_n(p) = \sum_{m=0}^n a_m p^m$ является многочленом (в частности ортогональным) с простыми корнями $\{p_k\}$, $k = 1, \dots, n$, тогда при выполнении условия

$$\Re(p_k) < \mu^\nu \quad (k = 1, \dots, n) \quad (20)$$

уравнение (19) имеет единственное решение $\varphi \in C_\mu$, и для него справедлива оценка

$$\|\varphi\|_\mu \leq M \sum_{k=1}^n \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - \Re(p_k)) |P'_n(p_k)|}. \quad (21)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОРРЕКТНОСТИ

В силу теоремы Балакришнана ([3], с. 358), определена дробная степень $(\mathbb{D}_h)^\nu = L^\nu$, $\nu \in (0, 1)$

$$L^\nu \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \frac{U(t, -L) \varphi - \varphi}{t^{1+\nu}} dt. \quad (22)$$

При этом оператор $-L^\nu$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$U(s, -L^\nu) \varphi = \int_0^\infty h_{s,v}(\xi) U(\xi, -L) \varphi d\xi, \quad (23)$$

где $h_{s,v}(\xi)$ — функция Иосиды, обладающая свойствами

$$h_{s,v}(\xi) > 0, \quad \int_0^\infty h_{s,v}(\xi) e^{-a\xi} d\xi = e^{-a^\nu s}. \quad (24)$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} U(s, -L^\nu)x^\mu &= \int_0^\infty h_{s,v}(\xi)U(\xi, -L)x^\mu d\xi = \\ &= \int_0^\infty h_{s,v}(\xi)e^{-\mu\xi}d\xi x^\mu = e^{-\mu^\nu s}x^\mu \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23) и (25) получаем оценку для $f \in C_\mu$

$$\begin{aligned} \|U(s, -L^\nu)f\|_\mu &\leq \int_0^\infty h_{s,v}(\xi)\|U(\xi, -L)\|\|\varphi\|d\xi \leq \\ &\leq \int_0^\infty h_{s,v}(\xi)e^{-\mu^\nu\xi}d\xi\|f\|_\mu = e^{-\mu^\nu s}\|f\|_\mu. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь для доказательства теоремы можно воспользоваться теоремой Маслова–Хевисайда [9] для операторного уравнения

$$P_n(A)\varphi = \sum_{m=0}^n a_m A^m \varphi = f, \quad (27)$$

где $a_m \in \mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $(-A)$ — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$, действующей в банаховом пространстве E с оценкой

$$\|U(t, -A)\| \leq M e^{-wt}, \quad w \geq 0, t \geq 0 \quad (28)$$

то для любого $f \in E$ уравнение (27) имеет единственное решение, если корни скалярного многочлена $P_n(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_j < w$, принадлежащее области определения $D(A^n)$. Это решение имеет вид

$$\varphi = \int_0^\infty q(t)U(t, -A)f dt, \quad (29)$$

где функция $q(t)$ является решением задачи Коши

$$\sum_{m=0}^n a_m q^{(m)}(t) = \delta(t), \quad (30)$$

$$q(0) = \dots = q^{(n-1)}(0) = 0 \quad (31)$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (30) с учетом условий (31) дает представление функции $q(t)$ в образах Лапласа

$$L\left(\sum_{m=0}^n a_m q^{(m)}(t)\right)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \sum_{m=0}^n (a_m q^{(m)}(t)) dt = \sum_{m=0}^n a_m p^m q^n = P_n(p) \tilde{q}(p) = 1$$

Отсюда

$$\tilde{q}(p) = \frac{1}{P_n(p)} \quad (32)$$

и применение обратного преобразования Лапласа, в соответствии ([10], с. 47) дает решение задачи (30)-(31).

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{P_n(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k - 1)} - \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \frac{(p - p_k)^{n_k}}{P_n(p_k)} e^{p_k t} \quad (33)$$

где p_k корни многочлена $P_n(p)$.

В частности, если все корни многочлена $P_n(p)$ простые, то формула (33) имеет вид

$$q(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{P'_n(p_k)} \quad (34)$$

Применяя формулу (29) к уравнению (19), полагая $A = L^\nu$, $E = C_\mu$, а в качестве $P_n(p)$ — ортогональный полином, корни которого p_k все действительные и различные, то для решения уравнения (19) получаем представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \frac{e^{p_k x} U(x, -L^\nu) f}{P'_n(p_k)} dx \quad (35)$$

отсюда, в силу (26), следует оценка

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\mu &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \frac{e^{p_k x} \|U(x, -L^\nu)\|_\mu \|f\|_\mu}{|P'_n(p_k)|} dx \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \frac{e^{p_k x} e^{-\mu^\nu x}}{|P'_n(p_k)|} dx \|f\|_\mu = \\ &= M \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \frac{e^{-(\mu^\nu - p_k)x}}{|P'_n(p_k)|} dx \|f\|_\mu = \\ &= M \sum_{k=1}^n \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k) |P'_n(p_k)|}. \end{aligned} \quad (36)$$

То есть получено неравенство (21) и доказательство теоремы корректности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение заметим, что метод преобразования Лапласа применённый в [6] к решению задачи Коши (1)–(2) для $x \geq 0$ и ${}_0\mathbb{D}_x^\nu$ — производная Капуто, не подходит для случая $x \in (a, b)$.

Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения с вырождающимися коэффициентами, рассматриваемого в нашей работе, в связи с решением задачи без начальных условий, играющий важную роль при изучении, так называемых "промежуточных асимптотик" Баренблатта–Зельдовича в квантовой механике (см. [1]–[2]). Это приводит к применению дробно-операторных методов теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов, применение которых показывает теорема корректности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблат, Г. И. Промежуточные асимптотики математической физики / Г. И. Баренблат, Я. Б. Зельдович // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. XXVI, вып. 2(158). — С. 115–129.
2. Зельдович, Я. Б. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика / Я. Б. Зельдович, Д. Д. Соколов // Успехи физ. наук. — 1985. — Т. 146, вып. 3. — С. 493–505.
3. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
4. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

6. Учайкин, В. В. Методы дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Логос, 2002. — 512 с.
7. Костин, В. А. Задача без начальных условий для уравнения с дробной производной и «промежуточные асимптотики» / В. А. Костин, Д. В. Костин, Х. Алкади // Челябинский физико-математический журнал. — 2023. — Т. 8, вып. 1. — С. 78–88.
8. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1979. — 416 с.
9. Костин, В. А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин. — 2013. — ДАН. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.
10. Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. — М. : Наука, 1974. — 542 с.

REFERENCES

1. Barenblat G.I., Zeldovich Ya.B. Intermediate asymptotics of mathematical physics. [Barenblat G.I., Zel'dovich YA.B. Promezhutochnye asimptotiki matematicheskoy fiziki]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. XXVI, iss. 2(158), pp. 115–129.
2. Zeldovich Ya.B., Sokolov D.D. Fractals, similarity, intermediate asymptotics. [Zel'dovich YA.B., Sokolov D.D. Fraktali, podobie, promezhutochnaya asimptotika]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspekhi*, 1985, vol. 146, iss. 3, pp. 493–505.
3. Yoshida K. Functional Analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.
4. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow, 1967, 464 p.
5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya]. Minsk, 1987, 687 p.
6. Uchaikin V.V. Methods of fractional derivatives. [Uchajkin V.V. Metody drobnnyh proizvodnyh]. Ulyanovsk, 2002, 512 p.
7. Kostin V.A., Kostin D.V., Alkadi H. A problem without initial conditions for an equation with a fractional derivative and «intermediate asymptotics». [Kostin V.A., Kostin D.V., Alkadi H. Zadacha bez nachal'nyh uslovij dlya uravneniya s drobnnoj proizvodnoj i «promezhutochnye asimptotiki»]. *Chelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal — Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, 2023, vol. 8, iss. 1, pp. 78–88.
8. Suetin P.K. Classical orthogonal polynomials. [Suetin P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow, 1979, 416 p.
9. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Maslov-Heaviside operator method and C_0 -Duhamel operator integral. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova Hevisajda i C_0 -operatornyj integral Dyuamelya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 452, no. 4, pp. 367–370.
10. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral transformations and operational calculus. [Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie]. Moscow, 1974, 542 p.

Алкади Хамса, аспирант, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com

Alkadi Hamsa, Postgraduate student, Department of Mathematical Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com