

РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО ВНЕШНЕМУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМУ ПОЛЮ

М. В. Кныш¹, В. В. Морозов², С. Н. Разиньков³

¹ — Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны;

² — Ярославский государственный аграрный университет;

³ — Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Е. Н. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

Аннотация. Получены уравнения и исследованы закономерности установления равновесных форм изолированной капли несжимаемой, невязкой идеально проводящей жидкости при движении в диэлектрической среде под действием внешнего электростатического поля. Показано, что воздействие ламинарного потока идеального газа, представляющего собой среду с однородными диэлектрическими свойствами, сфероидальная форма капли преобразуется в сплюснутый сфероид с осью симметрии, ориентированной в направлении потока. Внешние электростатические силы обуславливают деформацию капли к вытянутому по полю сфероиду. Наличие на капле электрического заряда способствует увеличению эксцентриситета формируемой поверхности. На основе формализованного представления процессов эволюции определены рациональные соотношения величинами напряженности электростатического поля и скорости ламинарного потока, необходимые для сохранения исходной равновесной формы заряженной капли.

Ключевые слова: несжимаемая диэлектрическая среда, ламинарный поток, электростатическое поле, равновесная форма, электрический заряд, потенциальная энергия, эксцентриситет сфероида.

EQUILIBRIUM SHAPE OF CHARGED DROP WHEN MOVING IN INCOMPRESSIBLE DIELECTRIC MEDIUM PARALLEL TO EXTERNAL ELECTROSTATIC FIELD

M. V. Knysh, V. V. Morozov, S. N. Razin'kov

Abstract. Equations are obtained and laws of establishment of equilibrium forms of isolated drop of incompressible, non-viscous perfectly conducting liquid at movement in dielectric medium under action of external electrostatic field are investigated. It is shown that the impact of laminar flow of ideal gas, which is a medium with uniform dielectric properties, the spherical shape of the drop is transformed into a flattened spheroid with an axis of symmetry oriented in the direction of flow. External electrostatic forces deform the droplet to the field-extended spheroid. The presence of an electric charge on the drop contributes to an increase in the eccentricity of the formed surface. Based on the formalized representation of evolution processes, rational ratios of electrostatic field strength and laminar flow velocity required to maintain the initial equilibrium shape of the charged droplet are determined.

Keywords: incompressible dielectric medium, laminar flow, electrostatic field, equilibrium shape, electric charge, potential energy, spheroid eccentricity.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ закономерностей движения заряженных капель в ламинарных потоках с однородными диэлектрическими свойствами, а также их трансформации под воздействием внешнего электростатического поля имеет значение для исследования грозовых облаков, инициирования разряда молнии, нахождения условий формирования жидко-капельного аэрозоля и характеристик рассеяния ионно-кластерно-капельных пучков при распылении лакокрасочных материалов [1].

Согласно [2, 3], эволюция аэрозольных образований определяется свойствами капиллярной электрогидродинамической неустойчивости [1, 2], проявляющимися в виде коагуляции и дробления капель при превышении величин собственных или поляризационных зарядов критических значений. В [4] с применением уравнений векторных потенциалов при начальных условиях [1] исследованы капиллярные осцилляции и установлены правила сохранения инвариантной поверхности несжимаемой идеально проводящей капли во внешнем электростатическом поле.

В предлагаемой работе в развитие результатов, изложенных в [1-4], на основе формализованного представления процессов эволюции определены требования по сохранению равновесной формы заряженной капли при движении в несжимаемой диэлектрической среде параллельно внешнему электростатическому полю. Качественное отличие методологии исследования от известных подходов, базирующихся на оценивании равновесной формы капли при задании усредненного значения однородного электростатического поля, заключается в нахождении зависимости устойчивости капли от величины собственного заряда.

Цель работы — выявление закономерностей установления и условий сохранения равновесной формы заряженной капли при движении в несжимаемой диэлектрической среде параллельно внешнему электростатическому полю.

УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ СФЕРОИДАЛЬНОЙ КАПЛИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ

Для получения уравнения равновесия изолированной капли несжимаемой, невязкой идеально проводящей жидкости во внешнем электростатическом поле зададим сферическую систему координат (r, θ, φ) , начало которой совмещено с центром масс капли. В начальный момент времени исследуемая капля имеет сферическую форму радиуса R , обладает собственным поверхностным зарядом Q и под действием электростатических сил начинает движение со скоростью U . Свойства жидкости характеризуются плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ ; внешнее электростатическое поле представляется абсолютным значением вектора напряженности E_0 .

Как показано в [4], за характерное время распада неустойчивой заряженной капли смещение ее центра масс, обусловленное взаимодействием собственного заряда с внешним электростатическим полем, существенно меньше радиуса; поэтому смещением центра масс капли на указанном интервале времени можно пренебречь. Поэтому уравнение равновесия идеальной несжимаемой капли, может быть получено при воспроизведении условий ее обдувания ламинарным потоком газа в направлении, коллинеарном вектору напряженности электростатического поля. В типовой ситуации, когда величина U значительно меньше скорости звука в среде распространения, в процессе моделирования газ целесообразно представлять идеальной несжимаемой жидкостью.

При $Q = 0$, $E_0 = 0$, $U = 0$ и отсутствии обтекающего потока исходный радиус R сфероидальной

дальной капли находится из уравнения баланса давлений [3, 4] на ее поверхности.

$$2\sigma R^{-1} = \Delta p, \quad (1)$$

где Δp — перепад постоянных давлений в капле и окружающей среде.

Наличие собственного поверхностного заряда ($Q \neq 0$), при взаимодействии которого с внешним электростатическим полем ($E_0 \neq 0$) возникает движение капли ($U \neq 0$), её равновесия форма капли будет отлична от сфероидальной и в приближении осевой симметрии (с отсутствием вариаций по координате φ) может быть представлена в виде

$$r(\Theta) = R + h(\Theta) \equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (2)$$

где $h(\Theta)$ — виртуальное искажение сферической поверхности капли, аппроксимируемое суперпозицией мод $\mu \equiv \cos\Theta$, представляемых полином Лежандра $P_n(\mu)$ с амплитудами a_n , $n \geq 0$

Функция $h(\Theta)$ и амплитуды мод возмущения a_n , $n \geq 0$ в (2) найдем из условия баланса давлений на равновесной сферической поверхности [2, 4]

$$p_\sigma = \Delta p + p_E + p_U \quad (3)$$

где

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} [2 - n(n+1)] a_n P_n(\mu) \quad (4)$$

— давление Лапласа на виртуально возмущенной сферической поверхности,

$$p_E = \frac{1}{8\pi} \left\{ 3E_0^2 [P_0(\mu) + 2P_2(\mu)] + 6E_0 \frac{Q}{R^2} P_1(\mu) + \frac{Q^2}{R^4} P_0(\mu) \right\} \quad (5)$$

— электростатическое давление поля собственного и поляризации зарядов на исходной сфероидальной поверхности;

$$p_U = \frac{3}{4} \rho U^2 [P_0(\mu) - P_2(\mu)] \quad (6)$$

— аэродинамическое давление на поверхность капли со стороны обдувающего ламинарного потока газа; перепад постоянных давлений в капле и среде Δp удовлетворяет уравнению баланса (1).

Из условия баланса давлений на равновесной сферической поверхности устанавливаются амплитуды мод a_n , $n \geq 0$, обусловленные виртуальным возмущением исходной поверхности капли электрическим и аэродинамическим полями $h(\theta)$, путем подстановки (4) – (6) в (3) и приравнивания коэффициентов при полиномах Лежандра равных порядков.

Из (5), (6) следует, что за счет электростатического и аэродинамического давления на поверхность капли возбуждаются первые три моды виртуального искажения сферической поверхности, для аналитического представления которых используются полиномы Лежандра нулевого, первого и второго порядка.

Мода с распределением, пропорциональным значению полинома Лежандра первого порядка, соответствует традиционному движению капли и не влияет на ее форму. Весовой коэффициент a_2 для моды, пропорциональной значению полинома Лежандра второго порядка, удовлетворяет соотношению

$$a_2 = \frac{3R}{16} \left(\frac{w}{\pi} - W_e \right), \quad (7)$$

где $w = \frac{E_0^2 R}{\sigma}$, $W_e = \frac{\rho U^2 R}{\sigma}$ — число Вебера [2, 3].

В соответствие с (3) – (6) в определение амплитуды нулевой гармоники при аппроксимации виртуального искажения сферической поверхности капли входит неизвестный перепад постоянных давлений Δp , присутствующий в правой части (1). Поэтому значение a_0 целесообразно рассчитывать по найденной величине a_2 из условия постоянства объема несжимаемой жидкости. Согласно указанному условию, аналитическое представление амплитуды нулевой моды a_0 является квадратичным по амплитуде основной моды, т. е. $\frac{a_2}{R} \sim \left(\frac{a_0}{R}\right)^2$.

Используя определение эллипсоида с большой полуосью, ориентированной в направлении вектора электростатического поля [3, 4], в сферической системе координат, заданной для получения уравнения равновесия сфероидальной капли в ламинарном потоке, представим выражение (2) в виде

$$r(\theta) = R(1 - e^2)^{1/6} (1 - e^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}, \quad (8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{3}{4} \left(\frac{w}{\pi} - W_e \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

— эксцентриситет эллипсоида. Из (8) с учетом (9) следует, что в линейном приближении по квадрату эксцентриситета сфероидальной капли, изменение амплитуды основной моды капиллярных осцилляций соответствует деформации к сфероиду. В линейном по амплитуде деформации приближении приращение получает только основная мода, что при $\pi^{-1} \cdot w > W_e$ соответствует деформации поверхности к вытянутому сфероиду, при $\pi^{-1} \cdot w < W_e$ она приобретает сплюснутую форму.

АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КАПРИ ПРИ НАЛИЧИИ СОБСТВЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Наличие электрического заряда на исходной поверхности сфероидальной формы не оказывает влияния на величину равновесной деформации капли [3]. В отсутствие аэродинамического потока в линейном по амплитуде отклонения поверхности от сферической форма капли является вытянутой с эксцентриситетом, зависящим от величины заряда Q , и определяемый соотношением

$$\varepsilon^2 = \frac{9}{16\pi} \cdot \frac{w}{1 - W}, \quad (10)$$

где $W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}$ — параметр Рэлея[4], характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду; его критическое значение равно единице [3, 4].

Из (10) следует, что наличие заряда усиливает степень деформации капли во внешнем электростатическом поле. В линейном по амплитуде деформации приближении исходная форма капли при обдувании ламинарным потоком газа деформируется к сплюсыванию сфероиду. Его эксцентриситет при достижении равновесной формы находится из условия достижения минимального значения потенциальной энергии капли.

Потенциальная энергия капли с распределенным по поверхности зарядом определяется в виде суммы энергии сил поверхностного натяжения

$$\overline{W}_\sigma = 2\pi R^2 \sigma (1 - e^2)^{-1/3} (1 + e^{-1}(1 - e^2) \operatorname{Arth} e), \quad (11)$$

энергии собственного заряда

$$\overline{W}_Q = \frac{Q^2}{2R} e^{-1} (1 - e^2)^{1/6} \arcsin e, \quad (12)$$

энергии капли в аэродинамическом потоке

$$\overline{W}_U = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} p_U^0(\theta) r^2 \cos^{-2} \gamma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi dr, \quad (13)$$

где

$$p_U^0 = \frac{pU^2}{2} \left(1 - \frac{C_0}{2} \right)^{-2} \frac{(1 - e^2)^2 \sin^2 \theta}{1 - e^2(2 - e^2) \sin^2 \theta} \quad (14)$$

— аэродинамическое давление на поверхность сплюснутой капли [4] с параметром

$$C_0 = 2e^{-2} \left(1 - \frac{1 - e^2}{e} \arcsin e \right), \quad (15)$$

$\gamma(\theta, \varphi)$ — угол между вектором нормали к поверхности деформированной капли и ортом заданной сферической системы координат, интегрирование по переменной r выполняется в пределах от нуля до границы сфероидальной поверхности

$$r(\theta) = R(1 - e^2)^{1/3} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}. \quad (16)$$

Приравнивая нулю производную от полной потенциальной энергии капли по эксцентриситету, находим в линейном приближении по e^2 взаимосвязь его величины для равновесной формы с числом Вебера W_e и параметром Рэлея W

$$e^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{W_e}{1 - W}. \quad (17)$$

Зависимость (17) позволяет выявить тенденции изменения формы движущейся заряженной капли при различных значениях скорости обтекающего потока газа U (по числу Вебера W_e) и заряда Q (по величине параметра Рэлея W). Путем сопоставления выражений (10) и (17) можно установить, что наличие на капле заряда усиливает величину ее деформации в обтекающем каплю ламинарном потоке идеальной несжимаемой среды

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА НА ФОРМУЛУ КАПЛИ

Оценим соотношение напряженности внешнего электростатического поля E_0 , при движении в котором сфероидальная заряженная капля преобразуется к вытянутому сфероиду, и скорости обтекающего ламинарного потока газа U , определяющей степень деформации исходной поверхности с осевой симметрией к сплюснутому сфироиду, обуславливающее стремление к вытянутой форме.

Для установления влияния значений E_0 , U и Q на величину равновесного эксцентриситета запишем выражение для полной потенциальной энергии капли в виде суммы энергии сил поверхностного натяжения

$$\overline{W}_Q = 2\pi R^2 \sigma (1 - e^2)^{-1/3} (1 + e^{-1} (1 - e^2)^{-1/2} \arcsin e) \quad (18)$$

энергии собственного заряда

$$\overline{W}_Q = \frac{Q^2}{2R} e^{-1} (1 - e^2)^{-1/3} \operatorname{Ar} \operatorname{th} e, \quad (19)$$

энергии поляризационного в электростатическом поле заряда

$$\overline{W}_E = \frac{1}{6} E_0^2 R^3 e^3 (1 - e^2)^{-1} (Arthe - e)^{-1}, \quad (20)$$

энергии капли в аэродинамическом потоке

$$\overline{W}_U = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} p_U^*(\theta) r^2 \cos^{-2} \gamma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi dr, \quad (21)$$

где

$$p_U^* = \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - \frac{C_0^*}{2} \right)^{-2} \frac{\sin^2 \theta}{1 - e^2 (2 - e^2) \cos^2 \theta} \quad (22)$$

— аэродинамическое давление на поверхность вытянутой капли [4] с параметром

$$C_0^* = 2e^{-3} (1 - e^2) (Arthe - e), \quad (23)$$

интегрирование по переменной r выполняется в пределах от нуля до границы поверхности вытянутого сфероида, заданной уравнением (8).

Приравнявая нулю первую производную по эксцентриситету от полной потенциальной энергии, получим обобщенное представление формул (10) и (17)

$$e^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{\pi^{-1} w - W_e}{1 - W}. \quad (24)$$

Собственный электрический заряд капли непосредственно не приводит к деформации исходной формы, но усиливает ее равновесные изменения во внешних силовых полях. Если заряд капли $Q \neq 0$, то при движении с малой скоростью $U \neq 0$ во внешнем электростатическом поле с напряженностью $E_0 \neq 0$ она может сохранять сферическую форму при $\pi^{-1} w = W_e$ и уровне заряда, не превышающем критическое по Рэлю значение. При $\pi^{-1} w > W_e$ капля деформируется к вытянутому сфероиду с эксцентриситетом, удовлетворяющим выражению (10). При $\pi^{-1} w < W_e$ исходная форма поверхности преобразуется к сплюснутому сфероиду с эксцентриситетом, определяемым выражением (17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получены уравнения и исследованы закономерности установления равновесных форм заряженной капли при движении в несжимаемой диэлектрической среде параллельно внешнему электрическому полю.

Показано, что изолированная капля несжимаемой, невязкой идеально проводящей жидкости в ламинарном потоке идеального газа деформируется к сплюснутому сфероиду с осью симметрии, ориентированной в направлении потока. Наличие на капле электрического заряда увеличивает эксцентриситет деформируемой поверхности. В результате воздействия внешнего электростатического поля капля в отсутствие обтекающего потока преобразуется к вытянутому по полю сфероиду; увеличение заряда обуславливает возрастание эксцентриситета сфероида. При движении заряженной капли под действием внешних электростатических сил в однородной диэлектрической среде имеет место конкуренция стремления к ее сплюсыванию в ламинарном динамическом потоке и к вытягиванию в электростатическом поле. Инвариантность сфероидальной формы капли достигается при рациональном соотношении между величинами напряженности электростатического поля и скорости ламинарного потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяева, С. О. Закономерности рэлеевского распада капли в резко неоднородном электростатическом поле / С. О. Ширяева, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 1992. — Т. 62, вып. 3. — С. 35–39.
2. Григорьев, А. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях / А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, Е. И. Белавина // Журнал технической физики. — 1989. — Т. 59, вып. 6. — С. 27–34.
3. Мухина, Е. И. Равновесные формы и критические условия электрогидродинамической неустойчивости пары капель в электрическом поле / Е. И. Мухина, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 1992. — Т. 62, вып. 2. — С. 18–26.
4. Григорьев, А. И. О форме заряженной капли в скрещенных электрическом и гидродинамическом полях / А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, М. В. Рыбакова // Электронная обработка материалов. — 2002. — № 6. — С. 22–25.

REFERENCES

1. Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I. Patterns of Rayleigh decay of a drop in a sharply inhomogeneous electrostatic field. [Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. Zakonomernosti releevskogo raspada kapli v rezko neodnorodnom elektrostatcheskkom pole]. *Zhurnal tehnikeskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1992, vol. 62, no. 3, pp. 35–39.
2. Grigoriev A.I., Shiryayeva S.O., Belavina E.I. Equilibrium form of a downstream drop in electric and gravitational fields. [Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O., Belavina E.I. Ravnovesnaya forma zaryazhennoy kapli v elektricheskoy i gravitacionnoy polyah]. *Zhurnal tehnikeskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1989, vol. 59, no. 6, pp. 27–34.
3. Mukhina E.I., Grigoriev A.I. Equilibrium forms and critical conditions of electrohydrodynamic instability of a pair of droplets in an electric field. [Muhina E.I., Grigor'ev A.I. Ravnovesnye formy i kriticheskie usloviya elektrogidrodinamicheskoy neustoychivosti pary kapel' v elektricheskoy pole]. *Zhurnal tehnikeskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1992, vol. 62, no. 2, pp. 18–26.
4. Grigoriev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. On the shape of a charged drop in crossed electric and hydrodynamic fields. [Grigor'ev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. O forme zaryazhennoy kapli v skreshennykh elektricheskoy i gidrodinamicheskoy polyah]. *Elektronnaya obrabotka materialov — Electronic processing of materials*, 2002, no. 6, pp. 22–25.

Кныш Марина Владимировна, Ярославское
высшее военное училище противовоздушной
обороны, доцент кафедры физики, Яро-
славль, Россия
E-mail: mariku2713@mail.ru

Knysh Marina V., Yaroslavl Higher Military
School of Air Defense, Associate Professor of
the Department of Physics, Yaroslavl, Russia
E-mail: mariku2713@mail.ru

Морозов Вадим Владимирович, Ярослав-
ский государственный аграрный универси-
тет, первый проректор — проректор по на-
учной работе и цифровой трансформации,
Ярославль, Россия
E-mail: info@yarcx.ru

Morozov Vadim V., Yaroslavl State
Agricultural University, First Vice-Rector —
Vice-Rector for Research and Digital
Transformation, Yaroslavl, Russia
E-mail: info@yarcx.ru

*Разиньков Сергей Николаевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина" (г. Воронеж), профессор кафедры электрооборудования (и оптико-электронных систем), Воронеж, Россия
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru*

*Razinkov Sergey N., Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin (Voronezh), Professor, Department of Electrical Equipment (and Optoelectronic Systems), Voronezh, Russia
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru*