УДК 532.59:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ МНОГОМОДОВОЙ НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

М. В. Кныш[1], В. В. Морозов[2], С. Н. Разиньков[3]

[1] — *Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны;*
[2] — *Ярославский государственный аграрный университет;*
[3] — *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Е. Н. Жуковского и Ю. А. Гагарина"*

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

Аннотация. С использованием уравнений Лапласа для потенциалов скорости несжимаемой идеально проводящей жидкости и электрического поля получены уравнения и исследованы закономерности возбуждения нелинейных капиллярных колебаний изолированной капли с поверхностным электрическим зарядом в бесконечно протяженной диэлектрической среде. На основе решения полученных уравнений методом многих масштабов при аппроксимации отклонения поверхности заряженной капли от сферической формы рядом полиномов Лежандра найдены аналитические представления колебаний при многомодовой начальной деформации структуры.

Ключевые слова: нелинейные капиллярные колебания, ламинарный поток, потенциал скорости, потенциал электрического поля, уравнение Лапласа.

NONLINEAR CAPILLARY OSCILLATIONS OF CHARGED DROPLET IN INCOMPRESSIBLE DIELECTRIC MEDIUM UNDER MULTIMODE INITIAL SURFACE DEFORMATION

M. V. Knysh, V. V. Morozov, S. N. Razin'kov

Abstract. Using Laplace equations for the velocity potentials of an incompressible ideally conductive liquid and the electric field of a half-term equation, the laws of excitation of nonlinear capillary oscillations of an isolated drop with a surface electric charge in an infinitely extended dielectric medium were investigated. When approximating the deviation of the surface of a charged drop from a spherical shape by a series of Legendre polynomials in accordance with the method of many scales, analytical representations of nonlinear capillary vibrations at multimode initial deformation of the structure were found.

Keywords: nonlinear capillary oscillations, laminar flow, velocity potential, electric field potential, Laplace equation.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования нелинейных капиллярных колебаний представляют практический интерес для оценки устойчивости искусственных аэрозольных завес, применяемых для защиты объектов от оптико-электронных средств мониторинга, и установления рациональных характеристик ионно-кластерно-капельных пучков при создании устройств формирования и распыления жидко-капельного аэрозоля [1].

Показатели стабильности и тенденции изменения плотности и границ аэрозольных образований, как показано в [2, 3], определяется свойствами капиллярной электрогидродинамической неустойчивости [1, 2], которые проявляются в виде коагуляции и распада капель при величинах собственных или поляризационных зарядов, превышающих критические значения [1].

В [2, 4] приведены уравнения для поверхности капли, претерпевающей виртуальные искажения, которые в приближении инвариантности осевой симметрии могут быть аппроксимированы рядами полиномов Лежандра.

В предлагаемой работе, направленной на развитие результатов, изложенных в [2, 4], на основе решения уравнений Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля [3, 4] исследованы нелинейные капиллярные колебания заряженной капли в несжимаемой диэлектрической среде при многомодовой начальной деформации поверхности.

Цель работы — установление закономерностей возникновения и определение характеристик нелинейных колебаний капли с электрическим зарядом при воздействии внешнего электростатического поля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Для получения уравнений, составляющих математическую основу задачи возбуждения нелинейных капиллярных колебаний капли, несущей электрический заряд, в однородной бесконечно протяженной несжимаемой диэлектрической среде, введем в рассмотрение сферическую систему координат $(r,\ \vartheta,\ \varphi)$, начало которой совмещено с центром масс капли.

Будем полагать, что капля образована несжимаемой идеально проводящей жидкостью с плотностью $\rho_{(i)}$ и коэффициентом поверхностного натяжения σ, в начальный момент времени имеет сферическую форму радиуса R и обладает собственным поверхностным зарядом Q. Свойства идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей окружающее пространство, характеризуются плотностью $\rho_{(e)}$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{(d)}$. Движение жидкости в капле и внешней среде является потенциальным [1] и определяется потенциалами скоростей $\psi_{(i)}$ и $\psi_{(e)}$ соответственно, а также потенциалом электрического поля φ.

Не записывая в интересах краткости представления выражений аргументы, устанавливающие значения функций от пространственного положения капли в текущие моменты времени t, и переходя к безразмерным переменным, уравнение границы раздела сред запишем в виде

$$r = 1 + \xi(\vartheta,t), \tag{1}$$

где $\xi(\vartheta,t)$ — начальная деформация сферической формы поверхности, которая при отсутствии вариаций распределения жидкости по азимутальной координате φ может быть представлена рядом полиномов Лежандра порядка $m \geqslant 0$:

$$\xi = \xi_0 P_0(cos\vartheta) + \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(cos\vartheta), \tag{2}$$

при
$$\partial_t \xi = 0, \tag{3}$$
где ε — варьируемый малый параметр амплитуды начального возмущения границы капли, ξ_0 — константа, регламентирующая совпадение объема капли в начальный момент времени с объемом равновесной сферы [1, 3], ∂_t — оператор частной производной по переменной t, Ω — множество индексов изначально возбужденных мод, h_m — весовые коэффициенты, определяющие вклад m-й моды в формирование капли, удовлетворяющие требованию $\sum\limits_{m\in\Omega} h_m = 1$.

Математическая постановка задачи о капиллярных колебаниях заряженной капли с границей (1) при начальных условиях (2), (3) выполняется с использованием уравнений Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля:
$$\Delta\psi_{(i)} = 0, \quad \Delta\psi_{(e)} = 0, \quad \Delta\varphi = 0, \tag{4}$$
полученных в условии ограниченности их величин:
$$\psi_{(i)} \to 0 \quad \text{при } r \to 0, \tag{5}$$
$$\psi_{(e)} \to 0, \quad \nabla\varphi \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \tag{6}$$
с учетом:

а) кинематического и динамического граничных условий на границе (1):
$$\partial_t \xi = \partial_r \psi_{(i)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta \psi_{(i)} \partial_\vartheta \xi = \partial_r \psi_{(e)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta \psi_{(e)} \partial_\vartheta \xi, \tag{7}$$
$$\partial_t \psi_{(i)} + \frac{1}{2}(\nabla\psi_{(i)})^2 - \rho_{(e)}\left(\partial_t \psi_{(i)} + \frac{1}{2}(\nabla\psi_{(i)})^2\right) = p_0 - p_\infty + p_q - p_\sigma, \tag{8}$$
где $\partial_r[\vartheta]$ — оператор частной производной по переменным r и φ, p_0 — давление жидкости в центре капли, p_∞ —давление внешней среды на бесконечности, p_σ —капиллярное давление на границе раздела сред;

б) условия неизменности объема капли
$$\int\limits_V r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \tag{9}$$
$$V = [r, \vartheta, \varphi | 0 \leqslant r \leqslant 1 + \xi; 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi];$$

в) условия постоянства полного заряда
$$\int\limits_S (\vec{n}\nabla\varphi) r \cos\vartheta dr d\vartheta d\varphi = -4\pi Q, \tag{10}$$
$$S = [r,\vartheta,\varphi | 0 \leqslant r \leqslant 1 + \xi; 0 \leqslant \pi; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi]$$
где $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности капли;

г) условия постоянства электрического потенциала на границе раздела сред
$$\varphi = \varphi_S(t) \tag{11}$$
где $\varphi_S(t)$ — электрический потенциал поверхности капли при значении r, определяемом в соответствии с выражением (1).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОГИХ МАСШТАБОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПЛИ С ЗАРЯДОМ ПРИ МНОГОМОДОВОЙ НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Применяя для совместного решения уравнений (1)–(11) метод многих масштабов [1, 4], потенциалы в (4) и уравнение образующей формы поверхности (1) будем считать функциями трех переменных $T_m = \varepsilon^2 t$, $m = 0, 1, 2$ и представим их рядами по малому параметру ε:

$$\varphi(r,\vartheta,t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \varphi^(m)(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{12}$$

$$\varphi_S(r,\vartheta,t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \varphi_S^{(m)}(r,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{13}$$

$$\psi_{(i)}(r,\vartheta,t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \psi_{(i)}^{(m)}(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{14}$$

$$\psi_{(e)}(r,\vartheta,t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \psi_{(e)}^{(m)}(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{15}$$

$$\xi_{(e)}(\vartheta,t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{16}$$

где

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{\varepsilon_d r}, \quad \varphi_S^{(0)} = \frac{Q}{\varepsilon_d}$$

— решение задачи нулевого порядка малости, полученные для равновесной сферической поверхности капли [2, 3].

Поскольку уравнение Лапласа (4) является линейным, то потенциалы скорости жидкости электрического поля для более высоких порядков малости будут удовлетворять уравнениям, формируемым при подстановке (12)–(16) в (1)–(11). Решения этих уравнений могут быть представлены в виде:

$$\psi_{(i)}^{(m)}(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n D_{(i)n}^{(m)}(T_0,T_1,T_2) P_n(\cos\vartheta), \quad m = 1,2,3; \tag{17}$$

$$\psi_{(e)}^{(m)}(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{(e)n}^{(m)}}{r^{n+1}}(T_0,T_1,T_2) P_n(\cos\vartheta), \quad m = 1,2,3; \tag{18}$$

$$\varphi^{(m)}(r,\vartheta,T_0,T_1,T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(m)}(T_0,T_1,T_2)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta), \quad m = 1,2,3. \tag{19}$$

В выражении (17) суммирование начинается с $n = 1$, поскольку потенциал $\psi_{(i)}^{(m)}$ определяется с точностью до произвольной функции времени, что позволяет принять $D_{(i)0}^{(m)} = 0$.

Функцию, определяющую отклонение формы поверхности капли от сферической, представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\varepsilon^{(m)}(\vartheta,T_0,T_1,T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0,T_1,T_2) P_n(\cos\vartheta), \quad m = 1,2,3. \tag{20}$$

Решение поставленной задачи в третьем порядке малости по ε позволяет выявить зависимости коэффициентов первого порядка малости ($m = 1$) в разложениях (17)–(20) от трех временных масштабов T_0, T_1, T_2; коэффициентов второго порядка малости ($m = 2$) — от двух временных масштабов T_0, T_1; коэффициентов третьего порядка малости ($m = 3$) — только от времени T_0.

Аналитические зависимости коэффициентов первого порядка малости от временного масштаба T_0 имеют вид [4]:

$$M_n^{(1)}(T_0,T_1,T_2) = a_n^{(1)}(T_1,T_2)\cos\left[\omega_n T_0 + \tau_n^{(1)}(T_1,T_2)\right]; \tag{21}$$

$$D_{(i)\ n}^{(1)}(T_0,T_1,T_2) = \frac{\partial_{T_0} M_n^{(1)}(T_0,T_1,T_2)}{n}; \tag{22}$$

$$D_{(e)\ n}^{(1)}(T_0,T_1,T_2) = -\frac{\partial_{T_0} M_n^{(1)}(T_0,T_1,T_2)}{n+1}; \tag{22}$$

$$F_n^{(1)}(T_0,T_1,T_2) = QM_n^{(1)}(T_0,T_1,T_2), \tag{24}$$

где $a_n^{(1)}(T_1,T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1,T_2)$ — функции временных масштабов T_1 и T_2, удовлетворяющие начальным (при $t = 0$) условиям [4]:

$$a_n^{(1)} = h_n \delta_{n,m}, \qquad \tau_n^{(1)} = 0, \qquad m \in \Omega \tag{25}$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Подставляя (20) в (1), запишем выражение для образующей капли в виде

$$r(v,T_0,T_2) = 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(T_0,T_2) P_n(\cos v) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(T_0) P_n(\cos v). \tag{26}$$

Из (21), (26) следует, что каждая возбуждаемая мода первого порядка малости имеет сдвиг частоты, пропорциональный квадрату амплитуды начального возмущения поверхности капли ε^2, существенно зависящий от множества изначально возбужденных мод и плотности окружающей среды $\rho_{(e)}$.

Амплитуды отклонения поверхности, обусловленные возбуждением мод, зависят от плотности окружающей жидкости; их экстремумы приводят к искажению формы поверхности и как следствие к локальному увеличению напряженности поля собственного заряда капли.

Тенденция к уменьшению степени удлинения капли в среде наблюдается при возбуждении высоких мод капиллярных колебаний [3, 4]. Максимальный продольный и минимальный поперечный размеры эмиссионных выступов капли уменьшаются при увеличении плотности окружающей жидкости [1, 3]. Наиболее существенное сокращение выступов поверхности (1) наблюдается в тех местах, где скорость капли является наиболее высокой, а инерционные свойства внешней среды преобладающим. В направлениях $v \neq 0$ и $v \neq \pi$ поверхность дееформируется несущественно, поскольку скорость при этих углах мала. При $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ поверхность капли претерпевает изменения вследствие нелинейного резонансного обмена энергией между модами [5]. При нелинейных осцилляциях капли в диэлектрической среде увеличение соотношения плотностей $\rho_{(e)}$ и $\rho_{(i)}$ приводит к смещению области сосредоточения энергии возбужденных мод к наиболее высокой моде вне зависимости от порядкового номера моды, устанавливающей начальную деформацию поверхности (1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с использованием уравнений Лапласа для потенциалов скорости несжимаемой идеально проводящей жидкости и электрического поля при кинематических и динамических условиях на границе раздела двух сред с различными значениями плотности выполнена постановка задачи возбуждения нелинейных капиллярных колебаний изолированной капли с поверхностным электрическим зарядом в бесконечно протяженной диэлектрической среде.

На основе решения поставленной задачи методом многих масштабов при аппроксимации отклонения поверхности заряженной капли от сферической формы рядом полиномов Лежандра найдены аналитические представления и исследованы закономерности колебаний при многомодовой начальной деформации структуры. Показано, что амплитуды отклонения поверхности, обусловленные возбуждением мод, зависят от плотности окружающей жидкости. При этом каждая возбуждаемая мода первого порядка малости имеет сдвиг частоты, пропорциональный квадрату амплитуды начального возмущения поверхности капли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяева, С. О. Закономерности рэлеевского распада капли в резко неоднородном электростатическом поле / С. О. Ширяева, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 1992. — Т. 62, вып. 3. — С. 35–39.

2. Григорьев, А. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях / А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, Е. И. Белавина // Журнал технической физики. — 1989. — Т. 59, вып. 6. — С. 27–34.

3. Мухина, Е. И. Равновесные формы и критические условия электрогидродинамической неустойчивости пары капель в электрическом поле / Е. И. Мухина, А. И. Григорьев // Журнал технической физики. — 1992. — Т. 62, вып. 2. — С. 18–26.

4. Григорьев, А. И. О форме заряженной капли в скрещенных электрическом и гидродинамическом полях / А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, М. В. Рыбакова // Электронная обработка материалов. — 2002. — № 6. — С. 22–25.

5. Ширяева, С. О. О внутреннем резонансе мод нелинейно осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли / С. О. Ширяева // Журнал технической физики. — 2003. — Т. 73, вып. 2. — С. 19–30.

REFERENCES

1. Shiryaeva S.O., Grigoriev A.I. Patterns of Rayleigh decay of a drop in a sharply inhomogeneous electrostatic field. [Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. Zakonomer-nosti releevskogo raspada kapli v rezko neodnorodnom elektrostaticheskkom pole]. *Zhurnal tehnisheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1992, vol. 62, no. 3, pp. 35–39.

2. Grigoriev A.I., Shiryaeva S.O., Belavina E.I. Equilibrium form of a downstream drop in electric and gravitational fields. [Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O., Belavina E.I. Ravnovesnaya forma zaryazhennoy kapli v elektricheskom i gravitacionnom polyah]. *Zhurnal tehnisheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1989, vol. 59, no. 6, pp. 27–34.

3. Mukhina E.I., Grigoriev A.I. Equilibrium forms and critical conditions of electrohydrodynamic instability of a pair of droplets in an electric field. [Muhina E.I., Grigor'ev A.I. Ravnovesnye formy i kriticheskie usloviya elektrogidrodinamicheskoy neustoychivosti pary kapel' v elektricheskom pole]. *Zhurnal tehnisheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 1992, vol. 62, no. 2, pp. 18–26.

4. Grigoriev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. On the shape of a charged drop in crossed electric and hydrodynamic fields. [Grigor'ev A.I., Koromyslov V.A., Rybakova M.V. O forme

zaryazhennoy kapli v skreshennyh elektricheskom i gidrodinamicheskom polyah]. *Elektronnaya obrabotka materialov — Electronic processing of materials*, 2002, no. 6, pp. 22–25.

5. Shiryaeva S.O. On internal resonance of modes of non-linearly oscillating volumetrically charged dielectric drop. [Shiryaeva S.O. O vnutrennem rezonanse mod nelineyno oscilliruyushey ob'emno zaryazhennoy dielektrisheskoy kapli]. *Zhurnal tehnisheskoy fiziki — Journal of Technical Physics*, 2003, vol. 73, no. 2, pp. 19–30.

Кныш Марина Владимировна, Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, доцент кафедры физики, Ярославль, Россия
E-mail: mariku2713@mail.ru

Knysh Marina V., Yaroslavl Higher Military School of Air Defense, Associate Professor of the Department of Physics, Yaroslavl, Russia
E-mail: mariku2713@mail.ru

Морозов Вадим Владимирович, Ярославский государственный аграрный университет, первый проректор — проректор по научной работе и цифровой трансформации, Ярославль, Россия
E-mail: info@yarcx.ru

Morozov Vadim V., Yaroslavl State Agricultural University, First Vice-Rector — Vice-Rector for Research and Digital Transformation, Yaroslavl, Russia
E-mail: info@yarcx.ru

Разиньков Сергей Николаевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина" (г. Воронеж), профессор кафедры электрооборудования (и оптико-электронных систем), Воронеж, Россия
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru

Razinkov Sergey N., Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin (Voronezh), Professor, Department of Electrical Equipment (and Optoelectronic Systems), Voronezh, Russia
E-mail: razinkovsergey@rambler.ru