

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ*

К. В. Трубицын, Е. В. Котова, Т. Е. Гаврилова, К. В. Колотилкина,
С. В. Зайцев, А. Н. Бранфилева

Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 06.10.2023 г.

Аннотация. На основе дополнительных граничных условий (ДГУ) и дополнительной искомой функции (ДИФ), определяемых на границах, получено решение краевой задачи теплопроводности для пластины, не прибегая к интегрированию уравнения по декартовой координате, ограничиваясь его выполнением лишь в граничных точках. Использование ДГУ позволяет выполнить уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри области. ДИФ сводит уравнение в частных производных к временному обыкновенному уравнению, из которого находят собственные числа краевой задачи (в отличие от классических методов, где собственные числа находятся из задачи Штурма–Лиувилля, определённой в пространственной переменной). Следовательно, в данном случае рассматривается иной способ определения собственных чисел, основанный на решении временного уравнения для ДИФ. Константы интегрирования обыкновенного уравнения для ДИФ с заданной точностью находятся из начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим избежать определение интегралов по пространственной переменной при сохранении аналитической формы получаемого решения.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, краевая задача, бесконечная пластина, аналитическое решение, ДИФ, ДГУ, метод наименьших квадратов.

OBTAINING ANALYTICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEM ON THE BASIS OF ADDITIONAL BOUNDARY CONDITIONS

K. V. Trubitsyn, E. V. Kotova, T. E. Gavrilova, K. V. Kolotilkina,
S. V. Zaitsev, A. N. Branfileva

Abstract. On the basis of additional boundary conditions (ABC) and an additional required function (ARF) determined at the boundaries, the solution of the boundary value problem of heat conduction for the plate is obtained without resorting to integration of the equation over the Cartesian coordinate, being limited to its implementation only at the boundary points. The use of the ABC allows the equation to be fulfilled at the boundaries, which leads to its fulfillment inside the region as well. The ARF leads to the partial differential equation to a time ordinary equation, from which the eigenvalues of the boundary value problem are found (in contrast to classical methods, where the eigenvalues are found from the Sturm–Liouville problem defined in a spatial variable). Therefore, in this case, a different way of determining the eigenvalues is considered, based on the solution of the time equation for the ARF. The integration constants of the ordinary equation for the ARF with a given accuracy are found from the initial condition by the least squares method, which makes it possible to

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета

© Трубицын К. В., Котова Е. В., Гаврилова Т. Е., Колотилкина К. В., Зайцев С. В., Бранфилева А. Н., 2024

avoid the definition of integrals over a spatial variable while maintaining the analytical form of the resulting solution.

Keywords: non-stationary heat conduction, boundary value problem, infinite plate, analytical solution, ARF, ABC, least squares method.

В теории теплопроводности известны методы, основанные на определении интеграла теплового баланса [1–8]. Его использование связано с осреднением дифференциального уравнения краевой задачи. Выполнение уравнения в среднем, приводит к низкой точности получаемых решений. Этот недостаток характерен практически для всех приближенных аналитических методов (Ритца, Галеркина, Л. В. Канторовича, интегрального метода теплового баланса – метод Т. Гудмена, М. Био, и др.). Точность их решений с увеличением числа приближений возрастает незначительно, что связано с низкой точностью определения собственных чисел и собственных функций. Так как собственные числа находятся из выполнения уравнения краевой задачи, то, следовательно, повышение точности их определения связано с увеличением точности выполнения уравнения во всех точках пространственной переменной во времени. Точность решений может быть повышена граничным выполнением уравнения при использовании ДГУ. В работах [8, 9] даётся математическое обоснование выполнения уравнения внутри области при его выполнении в граничных точках. Выполнение уравнения на границах позволяет избежать нахождения сложных интегралов по пространственной переменной. Такой путь получения решения приводит к упрощению процесса получения собственных чисел, определяемых из решения обыкновенного дифференциального уравнения относительно ДИФ, являющейся неизвестной функцией времени (в отличие от классических методов, в которых собственные числа находятся из решения задачи Штурма–Лиувилля. Константы интегрирования, появляющиеся в решении временного уравнения для ДИФ, практически с заданной степенью точности находятся из начального условия краевой задачи методом наименьших квадратов. Его применение позволяет избежать определения сложных интегралов по пространственной переменной, возникающих при выполнении начального условия в классических методах.

Найдём решение следующей задачи теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$T(0, \tau) = T_{\text{ст}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где T — температура, K ; x — координата, м; τ — время, с; $a = \lambda/(c\rho)$ — температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$; λ — теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; c — теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; ρ — плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; T_0 — начальная температура, K ; $T_{\text{ст}}$ — температура пластины при $x = 0$, K ; δ — половина толщины пластины, м.

Обозначим:

$$\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0); \quad \xi = x/\delta; \quad Fo = a\tau/\delta^2, \quad (5)$$

где Θ , ξ , Fo — безразмерные величины температуры, координаты, времени.

С учётом (5) находим (рис. 1)

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}, \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (6)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0. \quad (7)$$

Введём ДИФ

$$q(Fo) = \Theta(1, Fo). \quad (8)$$

Функция $q(Fo)$ описывает временное изменение температуры в точке $\xi = 1$. Температура в этой — искомая величина задачи (6)–(9). Следовательно, её рассмотрение не вносит изменений в математическую постановку задачи, а лишь упрощает получение её решения.

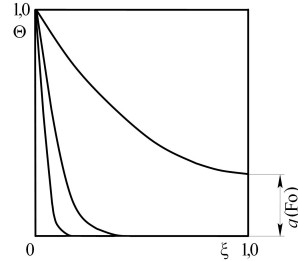


Рис. 1. Схема изменения температуры.

Решение задачи разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\xi), \quad (9)$$

где $b_k(q)$ — неизвестные функции; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$, $(r = 2k - 1)$.

Формула (9) удовлетворяет условиям (8), (9). Неизвестные $b_k(q)$ находятся из (8) и ДГУ, общие формулы для которых имеют вид [6]

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0, \quad (i = 2, 4, 6, \dots); \quad (10)$$

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial \xi^i = 0, \quad (i = 1, 3, 5, \dots); \quad (11)$$

$$\frac{\partial^{2i} \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^{2i}} = \frac{\partial^i q(Fo)}{\partial Fo^i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Отметим, что ДГУ вида (10), (11) решением (9) выполняются в любом приближении.

В первом приближении, подставляя (9) в (8), для $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение

$$1 + b_1(q) \sin(\pi\xi/2) |_{\xi=1} = q(Fo). \quad (13)$$

Его решение

$$b_1(q) = q(Fo) - 1. \quad (14)$$

Соотношение (9) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + (q(Fo) - 1) \sin(\pi\xi/2). \quad (15)$$

Для определения $q(Fo)$ потребуем, чтобы невязка уравнения (6) во всей области пространственной переменной ($0 \leq \xi \leq 1$) была равна нулю

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), находим

$$\frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \frac{\pi^2}{4} [q(Fo) - 1] \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что в точке $\xi = 0$ соотношение (17) удовлетворяется в предельном смысле (каждое его слагаемое равно нулю). Применительно к любой другой точке оно приводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $q(Fo)$

$$\frac{dq(Fo)}{dFo} + \frac{\pi^2}{4}[q(Fo) - 1] = 0. \quad (18)$$

Отметим, что получение уравнения (18) не связано с непосредственным интегрированием уравнения (6) по пространственной переменной.

Решение уравнения (18) имеет вид

$$q(Fo) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 Fo), \quad (19)$$

где C_1 — постоянная интегрирования; $\nu_1 = \pi^2/4$ — первое собственное число, совпадающее с точным его значением [10, 11].

В классических методах собственные функции и собственные числа получаются из решения задачи Штурма – Лиувилля, уравнение которой является уравнением второго порядка относительно пространственной переменной. Следовательно, в данном случае реализуется другой подход к определению собственных чисел – через решение обыкновенного дифференциального уравнения относительно ДИФ, изменяющейся лишь во времени [5, 6, 8, 9].

Подстановкой (19) в (15) получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 Fo) \sin(\pi\xi/2). \quad (20)$$

Соотношение (20) удовлетворяет уравнению (6) во всём диапазоне пространственной переменной ($0 \leq \xi \leq 1$) при любых значениях постоянной интегрирования C_1 . Следовательно, уравнение (6) выполнено, минуя процесс его непосредственного интегрирования по переменной ξ , что оказалось возможным, благодаря выполнению решением (9) ДГУ (10), (11), приводящему к его выполнению на границах.

Постоянная C_1 находится из условия (7). Потребуем его выполнения в 10 точках области ($\xi_i = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots, 0,9, i = \overline{1, 10}$). Точка $\xi = 1,0$ исключается, ввиду невозможности одновременного выполнения условий (7) и (9) в начальный момент времени ($Fo = 0$). Подставляя (20) в (7), положив $Fo = 0$ и записывая полученное соотношение в указанных точках пространственной переменной, относительно C_1 будем иметь переопределённую систему, включающую десять алгебраических линейных уравнений. Найдём решение этой системы в смысле наименьшего квадратичного отклонения, то есть найдём минимум следующего функционала

$$I = \sum_{i=1}^{10} [\Theta(\xi_i, 0)]^2. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (21), получаем

$$I = \sum_{i=1}^{10} \left[1 + C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_i\right) \right]^2. \quad (22)$$

Определяя производную от I по C_1 и приравнявая полученное соотношение к нулю, относительно C_1 получаем алгебраическое уравнение. Его решение:

$$C_1 = -\frac{\sum_{i=1}^{10} \sin(\pi\xi_i/2)}{\sum_{i=1}^{10} \sin^2(\pi\xi_i/2)} = -\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{\sin(\pi\xi_i/2)}. \quad (23)$$

Найденная по формуле (23) C_1 ($C_1 = -1, 3$), незначительно отличается от точного её значения $C_1 = -4/\pi = -1,2732 \dots$ [10, 11]. Увеличивая число точек аппроксимации начального условия, точность определения C_1 можно увеличить (например, при 20 точках аппроксимации $C_1 = -1,286931$). Однако, точность уже полученной её величины вполне достаточна для решения задачи (6) – (9) первом приближении, то есть при использовании лишь одного члена ряда (9).

Отличие расчётов по формуле (20) от точного решения [10, 11] не более 5 % (для $0,1 \leq Fo < \infty$) (рис. 2).

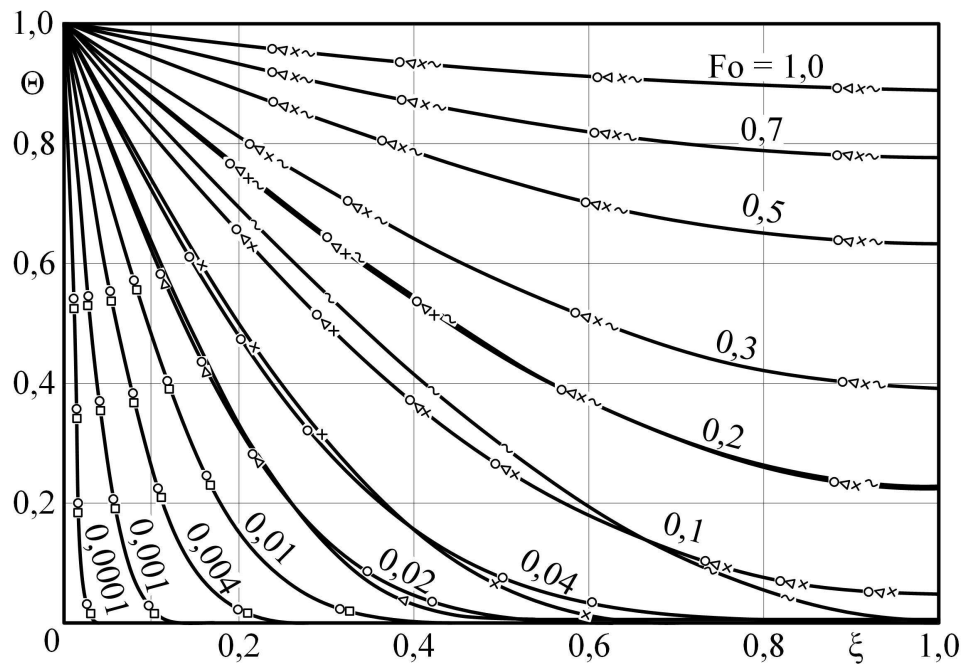


Рис. 2. Распределение температуры. ~ — 1-ое приближение; x — 2-ое приближение ($n = 2$); Δ — 3-е приближение ($n = 3$); $\square$ — по формуле (32) при ($n = 1000$); $\circ$ — точное решение.

Во втором приближении, подставив (9) в (8), (12) ($i = 1$), для $b_1(q)$ и $b_2(q)$, определяемых из системы двух уравнений имеем: $b_1(q) = -(4q' + 9\pi^2(q - 1))/(8\pi^2)$; $b_2(q) = (4q' + \pi^2(q - 1))/(8\pi^2)$, $q' = dq/dFo$. С их учётом соотношение (9) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \frac{(4q' + 9\pi^2(q - 1)) \sin(\pi\xi/2) + (4q' + \pi^2(q - 1)) \sin(3\pi\xi/2)}{(8\pi^2)}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (6), применительно к любой точке пространственной переменной ξ ($\xi \neq 0$), получаем

$$\frac{4}{3\pi^3} q'' + \frac{10}{3\pi} q' + \frac{3\pi}{4} (q - 1) = 0, \quad (25)$$

где $q'' = d^2q/dFo^2$.

Интеграл уравнения (25) будет

$$q(Fo) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 Fo) + C_2 \exp(-\nu_2 Fo), \quad (26)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования; $\nu_2 = 9\pi^2/4$ — второе собственное число, равное его точному значению [10, 11].

Подставим (26) в (24)

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - C_1 \exp(-\nu_1 Fo) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp(-\nu_2 Fo) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \quad (27)$$

Постоянные C_1, C_2 находятся из (7) с использованием метода наименьших квадратов. Требуя выполнения условия (7) в 10 точках области ($\xi = 0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots, 0,9, i = 1, 2, 3, \dots, 10$), относительно C_1 и C_2 получаем систему 10 алгебраических уравнений. Подставляя (27) в (21), находим

$$I = \sum_{i=1}^{10} \left[1 - C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_i\right) - C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi_i\right) \right]^2. \quad (28)$$

Вычисляя производные от I по C_1 и C_2 и приравнявая полученные соотношения к нулю, для C_1 и C_2 имеем систему двух алгебраических уравнений, из которой находим: $C_1 = -1,252381$; $C_2 = 0,434768$. Точные значения C_1 и C_2 : $C_1 = -1,27324$; $C_2 = 0,424413$ [10, 11]. Выполняя начальные условия в 20 точках области, (исключая точку $\xi = 1$) получаем: $C_1 = -1,264259$; $C_2 = 0,430773$. Как видно, произошло уточнение констант интегрирования. Таким путём, увеличивая число точек аппроксимации начального условия, можно получить значения C_1 и C_2 практически с заданной точностью. Из расчётов по (27) следует, что для $0,02 \leq Fo < \infty$ отличие от точного решения [16, 17] не превышает 2 % (см. рис. 2).

В третьем приближении подставляя в (9) в (8), (12) (при $i = 1, 2$) для $b_k(q)$ имеем систему трёх алгебраических уравнений. Подставляя найденные $b_k(q)$ в (9) и требуя выполнения уравнения (6) в любой из точек пространственной переменной ($\xi \neq 0$), относительно $q(Fo)$ получаем обыкновенное уравнение

$$\frac{4}{15\pi^5} q''' + \frac{7}{3\pi^3} q'' + \frac{259}{60\pi} q' + \frac{15}{16} \pi (q - 1) = 0, \quad (29)$$

где $q''' = d^3 q / dFo^3$.

Интегрируя (29), и подставляя полученное выражение в (9), получаем решение в третьем приближении

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 Fo) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp(-\nu_2 Fo) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + \\ + C_3 \exp(-\nu_3 Fo) \sin\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right). \end{aligned} \quad (30)$$

где $\nu_3 = 25\pi^2/4$ — третье собственное число, равное точному его значению [10, 11]; C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования, принимая 10 точек аппроксимации начального условия (7), подставим (30) в (21)

$$I = \sum_{i=1}^{10} \left[1 + C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_i\right) - C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi_i\right) + C_3 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\xi_i\right) \right]^2. \quad (31)$$

Приравнявая к нулю производные от I по C_1, C_2 и C_3 , получаем систему трёх уравнений. Её решение: $C_1 = -1,284265$; $C_2 = 0,402885$; $C_3 = -0,255065$. Точные их значения [10, 11] $C_1 = -1,27324$; $C_2 = 0,4244132$; $C_3 = -0,2546479$. Принимая 20 точек аппроксимации, имеем: $C_1 = -1,278555$; $C_2 = 0,41647$; $C_3 = -0,257337$. Как видно, полученные значения C_1, C_2 и C_3 отличаются от точных лишь в третьем знаке. Отметим, что полученная точность постоянных интегрирования для третьего приближения решения (9) вполне достаточна.

Из (30) следует, что при $0,01 \leq Fo < \infty$ расхождение с точным решением [10, 11] не более 1 %.

Используя (20), (27), (30) можно получить общую формулу решения

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^n A_k \exp(-\nu_k Fo) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right), \quad (32)$$

где $A_k = 4(-1)^{k+1}/r\pi$; $\nu_k = r^2\pi^2/4$; ($r = 2k - 1$; $k = \overline{1, n}$).

В решении (32) формулы для A_k и ν_k совпадают с точными их формулами [10, 11]. Приближение к точной формуле A_k выполняется уточнением констант интегрирования методом наименьших квадратов, путём увеличения числа точек аппроксимации начального условия.

ВЫВОДЫ

Путём использования ДГУ и ДИФ получено решение задачи теплопроводности для пластины с граничными условиями первого рода. Применение ДГУ позволяет выполнить исходное уравнение во всей области пространственной переменной ($0 \leq \xi \leq 1$) без проведения непосредственного интегрирования по ней. В связи с чем, процесс получения аналитического решения сводится лишь к интегрированию обыкновенного уравнения относительно ДИФ (изменяющейся лишь во времени), из которого находятся собственные числа, получаемые в классических решениях из задачи Штурма – Лиувилля, определённой в пространственных переменных. Следовательно, в настоящей работе приводится другой способ определения собственных чисел, основанный на решении временного уравнения для ДИФ.

Постоянные интегрирования находятся путём выполнения начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим находить их значения практически с заданной точностью. Преимущество такого способа их определения заключается в отсутствии необходимости нахождения интегралов в пределах области изменения пространственной переменной при сохранении аналитического вида решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев, Н. М. Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. — М. : Высшая школа, 1978. — 328 с.
2. Био, М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. — М. : Энергия, 1975. — 208 с.
3. Глазунов, Ю. Т. Вариационные методы / Ю. Т. Глазунов. — Москва–Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2006. — 470 с.
4. Гудмен, Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / Т. Гудмен // Проблемы теплообмена. — 1967. — С. 41–96.
5. Кудинов, В. А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов. — М. : Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2011. — 280 с.
6. Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты / И. В. Кудинов, А. В. Ерёмин, К. В. Трубицын, Е. В. Стефанюк. — М. : Проспект, 2020. — 244 с.
7. Кудряшов, Л. И. Приближённые решения нелинейных задач теплопроводности / Л. И. Кудряшов, Н. Л. Меньших. — М. : Машиностроение, 1979. — 232 с.
8. Кудинов, И. В. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций / И. В. Кудинов, Е. В. Котова, В. А. Кудинов // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 153–165.

9. Фёдоров, Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Фёдоров. — Новосибирск : Наука, 2000. — 220 с.
10. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. — М. : Высшая школа, 2001. — 550 с.
11. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.

REFERENCES

1. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Transient thermal conduction methods. [Belyaev N.M., Ryadno A.A. Metody nestacionarnoj teploprovodnosti]. Moscow, 1978, 328 p.
2. Biot M. Variational principles in the theory of heat transfer. [Bio M. Variacionnye principy v teorii teploobmena]. Moscow, 1975, 208 p.
3. Glazunov Yu.T. Variational methods. [Glazunov YU.T. Variacionnye metody]. Moscow–Izhevsk, 2006, 470 p.
4. Goodman T. Application of integral methods in nonlinear problems of unsteady heat transfer. [Gudmen T. Primenenie integral'nyh metodov v nelinejnyh zadachah nestacionarnogo teploobmena]. *Problemy teploobmena — Heat transfer problems*, 1967, pp. 41–96.
5. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Methods for solving parabolic and hyperbolic heat equations. [Kudinov V.A., Kudinov I.V. Metody resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenij teploprovodnosti]. Moscow, 2011, 280 p.
6. Kudinov I.V., Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Stefanyuk E.V. Models of thermomechanics with finite and infinite speed of heat propagation. [Kudinov I.V., Eryomin A.V., Trubicyn K.V., Stefanyuk E.V. Modeli termomekhaniki s konechnoj i beskonechnoj skorost'yu rasprostraneniya teploty]. Moscow, 2020, 244 p.
7. Kudryashov L.I., Menshikh N.L. Approximate solutions of nonlinear heat conduction problems. [Kudryashov L.I., Men'shikh N.L. Priblizhyonnye resheniya nelinejnyh zadach teploprovodnosti]. Moscow, 1979, 232 p.
8. Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems based on determining additional boundary conditions and additional required functions. [Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. Metod polucheniya analiticheskikh reshenij kraevykh zadach na osnove opredeleniya dopolnitel'nyh granichnykh uslovij i dopolnitel'nyh iskomykh funkcij]. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki — Siberian Journal of Computational Mathematics*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 153–165.
9. Fedorov F.M. Boundary method for solving applied problems of mathematical physics. [Fyodorov F.M. Granichnyj metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki]. Novosibirsk, 2000, 220 p.
10. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. [Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel]. Moscow, 2001, 550 p.
11. Lykov A.B. Thermal conduction theory. [Lykov A.B. Teoriya teploprovodnosti]. Moscow, 1967, 600 p.

Трубицын Константин Викторович,
к. э. н., доцент кафедры “Теоретические
основы теплотехники гидромеханика”,
Самара, Россия
E-mail: totig@yandex.ru

Trubitsyn Konstantin Viktorovich, Cand. of
Economic Sci., Assistant professor of Heat
Engineering Theoretical Foundations and
Hydromechanics Department Samara State
Technical University, Samara, Russia
E-mail: totig@yandex.ru

Котова Евгения Валериевна, к. т. н., доцент кафедры “Теоретические основы теплотехники гидромеханика”, Самара, Россия
E-mail: larginaevgenya@mail.ru

Kotova E. V., Cand. Tech. Sci., Assistant professor of Heat Engineering Theoretical Foundations and Hydromechanics Department Samara State Technical University, Samara, Russia
E-mail: larginaevgenya@mail.ru

Гаврилова Татьяна Евгеньевна, аспирант кафедры “Теоретические основы теплотехники гидромеханика”, Самара, Россия
E-mail: totig@yandex.ru

Gavrilova Tatyana, Postgraduate Student of Heat Engineering Theoretical Foundations and Hydromechanics Department Samara State Technical University, Samara, Russia
E-mail: totig@yandex.ru

Колотилкина Ксения Владимировна, аспирант кафедры “Теоретические основы теплотехники гидромеханика”, Самара, Россия
E-mail: totig@yandex.ru

Kolotilkina Ksenia Vladimirovna, Postgraduate Student of Heat Engineering Theoretical Foundations and Hydromechanics Department Samara State Technical University, Samara, Russia
E-mail: totig@yandex.ru

Зайцев Сергей Владимирович, аспирант кафедры “Теоретические основы теплотехники гидромеханика”, Самара, Россия
E-mail: totig@yandex.ru

Zaitsev Sergey Vladimirovich, Postgraduate Student of Heat Engineering Theoretical Foundations and Hydromechanics Department Samara State Technical University, Samara, Russia
E-mail: totig@yandex.ru

Бранфилева Анастасия Николаевна, к. т. н., доцент кафедры “Теоретические основы теплотехники гидромеханика”, Самара, Россия
E-mail: totig@yandex.ru

Branfileva Anastasia Nikolaevna, Cand. Tech. Sci., Assistant professor of Heat Engineering Theoretical Foundations and Hydromechanics Department Samara State Technical University, Samara, Russia
E-mail: totig@yandex.ru