УДК 517.53, 517.54, 519.615.7

ОДИН МЕТОД ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОДЧИНЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Л. Ступин

Тверской государственный университет

Поступила в редакцию 22.01.2024 г.

Аннотация. Описан подход к решению задачи получения оценок модулей начальных тейлоровских коэффициентов на произвольных классах подчинённых функций. Основной результат состоит в том, что указанные оценки всегда можно получить в виде инфимума суммы модулей компонент решения системы линейных уравнений с матрицей Вандермонда. Описаны приложения этого метода к классам ограниченных необращающихся в нуль функций. В частности, указано на возможность использования численных методов глобальной липшицевой оптимизации для доказательства гипотезы Кшижа для начальных тейлоровских коэффициентов. Получена оценка модуля шестого коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. В работе используются результаты, полученные в основном методом подчинения. Методами линейной алгебры задача сведена к задаче о поиске условного минимума действительнозначной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что в принципе позволяет даже применять стандартные методы дифференциального исчисления. В процессе решения основной задачи было получено решение системы линейных уравнений с матрицей Вандермонда. Все изложенные здесь подходы можно применять на произвольных классах подчинённых функций.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов, подчинённые функции, система Вандермонда.

ONE METHOD OF ESTIMATION OF MODULI OF TAYLOR COEFFICIENTS OF SUBORDINATED FUNCTIONS

D. L. Stupin

Abstract. An approach to the problem of obtaining estimates of moduli of initial Taylor coefficients on arbitrary classes of subordinate functions is described. The main result is that these estimates can always be obtained as a minimum of the sum of the moduli of the components of the solution of the system of linear equations with the Vandermonde matrix. Applications of this method to classes of bounded nonvanishing functions are described. In particular, the possibility of using numerical methods of global Lipschitz optimization to prove the Krzyz conjecture for initial Taylor coefficients is pointed out. An estimation of the modulus of the sixth coefficient for the class of bounded non-vanishing functions has been obtained. The results obtained mainly by the method of subordination are used in the paper. By methods of linear algebra the problem has been reduced to the problem of finding the conditional minimum of a real valued function of real variables with constraints of the type of inequalities, which in principle allows even to apply standard methods of differential calculus. In the process of solving the main problem, we obtained a solution to a system of linear equations with a Vandermonde matrix. All the approaches outlined here can be applied to arbitrary classes of subordinate functions.

Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, Taylor coefficient modulus estimates, subordinate functions, Vandermonde system.

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытый единичный круг $\{z : |z| < 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ будем обозначать символом Δ, а замкнутый единичный круг символом $\bar{\Delta}$.

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Через Ω_0 обозначим класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть функции F и f голоморфны в Δ. Функция f называется подчиненной в Δ для функции F, если она может быть представлена в Δ в форме

$$f(z) = F(\omega(z)), \tag{1}$$

где $\omega \in \Omega_0$. Функцию F будем называть мажорантой для функции f в Δ.

Возьмём некоторую произвольную голоморфную в Δ функцию F. Класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, $\omega \in \Omega_0$, обозначим через M_F. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Действительно, из формулы (1) получаем, что если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n. \tag{2}$$

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [1], термин был введён Д. И. Литлвудом [2] и В. Рогозинским [3], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые интересные результаты.

В частности, теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций f, подчинённых функции F. Известно, что

$$\{f\}_0 = \{F\}_0, \quad |\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|, \quad |\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|,|\{F\}_2|);$$

все оценки точные и равенство достигается только на вращениях функции $F(z)$ или $F(z^2)$, в плоскости переменной z [3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка этой задачи мотивируется формулой (2). Временно абстрагируемся от смысла, стоящего за этой формулой, для чего будем вместо $\{F\}_j$ писать b_j.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $a_j, b_j, x \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, и рассмотрим функционалы

$$P(n,\omega,a_1,\ldots,a_n,x) \coloneqq a_1\{\omega\}_n x + a_2\{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + a_n\{\omega^n\}_n x^n$$

и

$$Q(n,\omega,b_1,\ldots,b_n) \coloneqq b_1\{\omega\}_n + b_2\{\omega^2\}_n + \ldots + b_n\{\omega^n\}_n,$$

заданные над классом Ω_0.

Положим нам известно, что существуют такие числа $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, что

$$|P(n,\omega,a_1,\ldots,a_n,x)| \leqslant 1, \qquad \omega \in \Omega_0, \quad x \in \bar{\Delta}. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольно комплексные числа b_j, $j = 1, \ldots, n$. Основная задача этой статьи состоит в следующем: найти условия, при которых мы можем оценить выражение $|Q(n,\omega,b_1,\ldots,b_n)|$, $\omega \in \Omega_0$ и, пользуясь неравенствами (3), получить формулу для оценки этого выражения в общем виде.

Лемма 1. *Существование чисел $x_k \in \bar{\Delta}$, $k = 1,\dots,n$, таких, что функционал $Q(n,\omega,b_1,\dots,b_n)$ есть линейная комбинация функционалов $P(n,\omega,a_1,\dots,a_n,x_k)$, то есть $Q(n,\omega,b_1,\dots,b_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k P(n,\omega,a_1,\dots,a_n,x_k)$ равносильно тому, что система линейных уравнений*

$$a_j \sum_{k=1}^{n} x_k^j \beta_k = b_j, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{4}$$

совместна. Здесь $\beta_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные, а коэффициенты a_j,b_j — комплексные числа, фиксированные произвольным образом. Числа β_k не зависят от ω.

Доказательство. Фиксируем произвольно $\omega \in \Omega_0$. Если мы предположим, что для некоторых значений параметров $x_k \in \bar{\Delta}$ найдутся числа $\beta_k \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sum_{j=1}^{n} a_j \{\omega^j\}_n x_k^j = \sum_{j=1}^{n} b_j \{\omega^j\}_n, \tag{5}$$

то переписав это в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \{\omega^j\}_n \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^j = \sum_{j=1}^{n} b_j \{\omega^j\}_n$$

и собрав коэффициенты при $\{\omega^j\}_n$

$$\left(a_j \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k^j \right) \{\omega^j\}_n = b_j \{\omega^j\}_n, \qquad j = 1,\dots,n.$$

мы получим систему линейных уравнений (4).

Обратно, из системы (4) мы можем получить (5).

Из того, что при любом выборе функции ω из Ω_0 проведённые рассуждения приводят к системе (4) делаем вывод, что неизвестные β_k не зависят от ω при условии, что система (4) совместна. ■

3. ЗАМЕЧАНИЯ

Если $\omega \in \Omega_0$, то функция $\omega_x(z) \coloneqq \omega(xz) \in \Omega_0$, при $|x| \leqslant 1$. Подставив ω_x в правую часть формулы (2) получим $P(n,\omega,\{F\}_1,\dots,\{F\}_n,x)$. Подставив ω в правую часть формулы (2) получим $Q(n,\omega,\{F\}_1,\dots,\{F\}_n)$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,n$, и введём следующие обозначения:

$$p(x) := P(n,\omega,a_1,\dots,a_n,x), \qquad q(x) := \frac{p(x)}{x}.$$

Если числа a_j удовлетворяют формуле (3), то полином p удовлетворяет лемме Шварца, стало быть $|p(x)| \leqslant |x|$, при $|x| \leqslant 1$. Следовательно,

$$|q(x)| = |a_1\{\omega\}_n + a_2\{\omega^2\}_n x + \ldots + a_n\{\omega^n\}_n x^{n-1}| \leqslant 1, \quad x \in \bar{\Delta}. \tag{6}$$

Таким образом, в полной аналогии с доказательством леммы 1 мы получим систему, несколько отличающуюся от системы (4)

$$a_j \sum_{k=1}^{n} x_k^{j-1} \alpha_k = b_j, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{7}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные ($\alpha_k = x_k \beta_k$), а $x_k \in \bar{\Delta}$ — параметры, $k = 1,\dots,n$.

В правых частях неравенств (3) и (6) стоит 1. Отметим, что это никак не уменьшает общности наших рассуждений. Действительно, если мы располагаем неравенством $|u(x)| \leqslant c$, $c > 0$, то мы всегда можем перейти от этого неравенства к неравенству $|p(x)| \leqslant 1$, где $p(x) = u(x)/c$.

Перечислим требования, которым должны удовлетворять параметры x_k для того, чтобы системы (4) и (7) были определёнными. Согласно критерию Кронекера-Капелли, для этого необходимо ои достаточно того, чтобы определители этих систем были отличны от нуля.

Так как определитель основной матрицы системы (7) есть определитель Вандермонда:

$$d_n \coloneqq \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i),$$

то $d_n \neq 0$ эквивалентно $x_k \neq x_j$, $k \neq j$. Так как определитель системы (4) есть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot d_n$, то $x_k \neq 0$, $k = 1, \ldots ,n$.

Если $a_j = 0$, то $b_j = 0$. Стало быть, если $a_j = b_j = 0$, то уравнение с номером j можно опустить. С другой стороны, всегда можно найти полином p такой, что $a_j \neq 0$, $j = 1, \ldots ,n$. Например, если $a_j = 1$, $j = 1, \ldots ,n$, то

$$|\{\omega\}_n x + \{\omega^2\}_n x^2 + \ldots + \{\omega^n\}_n x^n| \leqslant 1$$

причём оценка точная. По этому поводу см. [3], а также пункт 6 настоящей статьи.

Итак, с учётом всех замечаний мы получили две эквивалентные системы линейных уравнений (4) и (7), где $\alpha_k,\beta_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные, а $x_k \in \bar{\Delta}$ — параметры и $\alpha_k = x_k\beta_k$, $k = 1, \ldots ,n$.

Заметим, что α_k и β_k зависят не только от $x_1, \ldots ,x_n$, а также от $a_1, \ldots ,a_n$, и от $b_1, \ldots ,b_n$, но мы в дальнейшем изложении не будем указывать этого явно, так как эти величины мы зафиксировали.

Таким образом справедлива следующая

Лемма 2. *Существование чисел $x_k \in \bar{\Delta}$, $k = 1, \ldots ,n$, таких, что функционал Q допускает представление*

$$Q(n,\omega,b_1, \ldots ,b_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(n,\omega,a_1, \ldots ,a_n,x_k)$$

эквивалентно тому, что система (7) совместна. Числа α_k не зависят от ω.

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Основной результат этой работы сформулируем следующим образом:

Теорема 1. *Если $a_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и фиксированы таким образом, что выполняется (3) и (6), $F(z)$ — голоморфная в Δ функция а $b_k = \{F\}_k$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любой $f \in M_F$ имеют место оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant \inf_{\substack{x_i \in \bar{\Delta}\backslash\{0\}, \\ x_i \neq x_j,\ i \neq j, \\ i,j=1,\ldots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1, \ldots ,x_n)| \leqslant \inf_{\substack{|x_i|=1, \\ x_i \neq x_j,\ i \neq j, \\ i,j=1,\ldots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1, \ldots ,x_n)|, \tag{8}$$

где α_k, $k = 1, \ldots ,n$, есть решения системы (4) или системы (7).

Доказательство. По условию $a_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $x_i \in \bar{\Delta}\backslash\{0\}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Стало быть, система уравнений (7), согласно критерию Кронекера-Капелли, имеет единственное решение, так как определитель d_n её основной матрицы есть определитель Вандермонда: $d_n = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \neq 0$. (То же самое можно сказать и про систему уравнений (4), так как её определитель есть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot d_n$.)

Далее, по условию $b_j = \{F\}_j$, $j = 1,\dots,n$, $\{f\}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\{\omega^j\}_n$ по формуле (2) и $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\{\omega^j\}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k q(x_k)$ по лемме 2. Следовательно,

$$|\{f\}_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} b_j\{\omega^j\}_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k q(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||q(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|, \tag{9}$$

так как $|q(x)| \leqslant 1$ для любой $\omega \in \Omega_0$ и для любого $x \in \bar{\Delta}$ по формуле (6). (Те же самые рассуждения можно провести и для $p(x)$ используя лемму 1 и формулу (3).)

Таким образом, первая из оценок (8) справедлива. Справедливость второй оценки (8) очевидна, поскольку мы просто сузили множество, на котором берётся инфимум. ■

Заметим, что второе из неравенств (9) точное, то есть равенство в нём достижимо если неравенство (3) точное.

Результаты численных вычислений позволяют высказать предположение, что

$$\inf_{\substack{x_i\in\bar{\Delta}\setminus\{0\},\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,\dots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1,\dots,x_n)| = \inf_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,\dots,n}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1,\dots,x_n)|.$$

5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ (4) И (7)

Для получения решения систем (4) и (7) в явном виде мы используем метод Крамера и формулу для разложения определителя по столбцу. Тем не менее, можно действовать и по другому, например, в [4] есть формула для элементов матрицы, обратной к матрице Вандермонда.

Для решений системы (7) получаем следующий результат:

Утверждение 1. *Если $n \in \mathbb{N}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $x_i \in \bar{\Delta}\setminus\{0\}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, а Q_k^{ij} — элементы множества всех подмножеств из $n-j$ элементов множества $\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}$, где k — номер подмножества ($k = 1,\dots,C_{n-1}^{n-j}$), то*

$$\alpha_i(x_1,\dots,x_n) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j}\left(\sum\limits_{k=1}^{C_{n-1}^{n-j}} \prod\limits_{m\in Q_k^{ij}} x_m\right)\dfrac{b_j}{a_j}}{\prod\limits_{\substack{\gamma=1,\\ \gamma\neq i}}^{n} (x_i - x_\gamma)}. \tag{10}$$

Заметим, что мы считаем суммы с нулевым количеством слагаемых равными 0, а произведения с нулевым количеством сомножителей равными 1.

Для системы (4) результат такой: $\beta_i = \alpha_i(x_1,\dots,x_n)/x_i$, $i = 1,\dots,n$. Всюду далее мы не будем использовать решения системы (4), не только потому, что выражения для решений системы (7) несколько проще, но также ещё и потому, что согласно теореме 1, для получения оценки коэффициентов необходимо исследовать целевую функцию $|\beta_1|+\ldots+|\beta_n|$ на минимум, но β_i содержит в знаменателе множитель x_i, а $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1,\dots,n$, что будет увеличивать значения целевой функции при $|x_i| < 1$. Из-за предположения, высказанного после теоремы 1, случай $|x_i| < 1$ имеет смысл исключить.

Заметим, что формулу (10) можно упростить, используя формулы Виета. Для этого введём в рассмотрение вспомогательные многочлены p^i (i — верхний индекс)

$$p^i(z) \coloneqq \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} (z - x_j) = p_0^i + p_1^i z + \ldots + p_{n-1}^i z^{n-1}, \qquad p_{n-1}^i = 1, \qquad i = 1,\dots,n,$$

и два n-мерных вектора $c \coloneqq (p_0^i, \ldots, p_{n-1}^i)$ и $d \coloneqq (b_1/a_1, \ldots, b_n/a_n)$. Скалярное произведение векторов c и d обозначим, как обычно, через (c,d). При таких обозначениях

$$\alpha_i = \frac{(c,d)}{p^i(x_i)}.$$

6. О ВЫБОРЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ a_i

Ясно, что для получения хороших оценок при помощи теоремы 1 необходимо, чтобы оценка (6) была точной. Также понятно, что точность оценки (6) не гарантирует точности оценки (8). Возникает вопрос: как оптимально выбрать коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$, так, чтобы оценка (8) была наилучшей?

Пусть $F(z) \coloneqq \dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k$. В этом случае множество M_F обычно обозначают через C и называют классом Каратеодори. Известно [3], что если $h \in C$, то $|\{h\}_n| \leqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Причём эта оценка точна и достигается только на вращениях функции F в плоскости переменной z. Если взять произвольную функцию $\omega \in \Omega_0$, то функция $\omega_x(z) \coloneqq \omega(xz) \in \Omega_0$, при $|x| \leqslant 1$. Стало быть, $h_x(z) \coloneqq \dfrac{1+\omega_x(z)}{1-\omega_x(z)} \in C$ и согласно формуле (2)

$$|\{h_x\}_n| = 2|\{\omega_x\}_n x + \{\omega_x^2\}_n x^2 + \ldots + \{\omega_x^n\}_n x^n| \leqslant 2.$$

Итак, можно брать $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, о чём мы уже упоминали в пункте 3. Как показывает практика численных вычислений, этот выбор является самым лучшим из опробованных вариантов.

В качестве a_i можно брать начальные коэффициенты любой выпуклой однолистной функции с ненулевыми коэффициентами. Более того, в качестве a_i можно брать начальные коэффициенты любой функции, у которой есть необходимое нам свойство (3). Подобных примеров много в работах, посвящённых теории подчинённых функций.

7. ОДНО СВОЙСТВО ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Как следует из теоремы 1, при каждом натуральном n функция

$$h_n(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1, \ldots, x_n)|$$

мажорирует $|\{f\}_n|$. Таким образом, вместо того чтобы решать задачу оценки $|\{f\}_n|$ можно решать задачу минимизации целевой функции h_n.

Выпишем целевые функции для начальных n. Возьмём $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, согласно рекомендациям предыдущего пункта. При $n = 1$ имеем $h_1(x_1) = |\{F\}_1|$, при $n = 2$

$$h_2(x_1,x_2) = \frac{|x_1\{F\}_1 - \{F\}_2| + |x_2\{F\}_1 - \{F\}_2|}{|x_1 - x_2|},$$

при $n = 3$

$$h_3(x_1,x_2,x_3) = \left|\frac{x_2x_3\{F\}_1 - (x_2+x_3)\{F\}_2 + \{F\}_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right| + \\ + \left|\frac{x_1x_3\{F\}_1 - (x_1+x_3)\{F\}_2 + \{F\}_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\right| + \left|\frac{x_1x_2\{F\}_1 - (x_1+x_2)\{F\}_2 + \{F\}_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|.$$

при $n = 4$

$$h_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \\ = \left|\frac{x_2x_3x_4\{F\}_1 - (x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)\{F\}_2 + (x_2 + x_3 + x_4)\{F\}_3 - \{F\}_4}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}\right| + \ldots$$

Легко видеть, что функция h_n инвариантна относительно перестановок своих аргументов. Другими словами h_n — симметрическая функция.

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{C}$, $x_j \neq x_k$, $j \neq k$ и $i_1,\ldots,i_n$ — любая перестановка индексов $1,\ldots,n$. Если $h_n(x_1,\ldots,x_n) = m$, то $h_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) = m$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что

$$h_n(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{i_k}(x_1,\ldots,x_n)| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x_1,\ldots,x_n)| = h_n(x_1,\ldots,x_n).$$

∎

Из утверждения 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \coloneqq \{(e^{i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_n}) : 0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_n < 2\pi\}$ и пусть $A_2 \coloneqq \{(x_1,\ldots,x_n) : |x_j| = 1,\ x_j \neq x_k,\ j \neq k,\ j,k = 1,\ldots,n\}$. Тогда $h_n(A_1) = h_n(A_2)$.*

Предположим, что нам необходимо найти наименьшее значение целевой функции $h_n(e^{i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_n})$ методом полного перебора на равномерной сетке, разбивающей n-мерный куб $\mathcal{C}_n \coloneqq \{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) : 0 \leqslant \varphi_k < 2\pi, k = 1,\ldots,n\}$. Пусть φ_k пробегает m значений. Так как h_n — симметрическая функция, то из следствия 1 следует, что нам достаточно вычислить значения h_n в C_m^n точках вместо того, чтобы вычислять значения h_n в m^n точках.

8. ГИПОТЕЗА КШИЖА

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [5, 6], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi}F(e^{i\varphi}z^n,1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \varphi,\psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Это предположение мы будем называть гипотезой Кшижа, а задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B — проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана до пятого тейлоровского коэффициента включительно [7]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе семейство функций (в топологии локально равномерной сходимости).

Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z,t)$.

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов [15] на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [3], с теорией пространств Харди [8] и с классической проблемой моментов [10].

Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных [7]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Класс B посредством класса Ω_0, связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели [10] между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде (см. также (1))

$$f(z) = e^{-t\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. Фактически можно считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t.

9. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ КШИЖА

В работе [7] подробно описаны так называемые «асимптотические оценки» коэффициентов на классах B_t при больших и малых значениях параметра t. Интересно, что эти оценки являются точными на B_t, то есть не нуждаются в улучшении. В частности, в [7] сказано, что начиная с $n = 3$ имеются интервалы, на которых этим методом оценки получить не удаётся:

$$\begin{aligned} n = 1:& \quad \varnothing, \\ n = 2:& \quad \varnothing, \\ n = 3:& \quad \left(\frac{3}{2},\, 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}\right), \\ n = 4:& \quad (3-\sqrt{3},\, 6), \\ n = 5:& \quad (1.129\ldots,\, 7.899\ldots), \\ n = 6:& \quad (1.037\ldots,\, 9.785\ldots). \\ n = 7:& \quad (0.972\ldots,\, 11.672\ldots). \end{aligned}$$

Обозначим начальные точки этих интервалов через $t_1(n)$, а конечные через $t_2(n)$.

На этих интервалах изменения параметра t, пользуясь теоремой 1, утверждениями $1, 2$ и следствием 1 можно провести минимизацию целевой функции h_n численными методами и таким образом получить оценки для $|\{f\}_n|$, $n = 1, \ldots ,6$, на B_t.

Заметим, что $1 < t_1(6) < \ldots < t_1(1)$, но $t_1(7) < 1$. Так как $t_1(n) < 1$, то если гипотеза Кшижа верна при $n \leqslant 6$, то существует $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ такое, что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_n| < 2/e - \varepsilon, \qquad t \in (t_1(n), t_2(n)), \quad n \leqslant 6.$$

То есть при $n \leqslant 6$ и $t \in (t_1(n), t_2(n))$ мы можем имея даже не точную оценку $|\{f\}_n|$ на B_t получить точную оценку $|\{f\}_n|$ на B. При $n \geqslant 7$ описанным методом получить оценки, точные на B уже невозможно.

Численный метод и обоснование корректности такого подхода даны в работе [7]. Также в работе [7] содержится достаточно подробный обзор по состоянию дел в вопросе об оценке модулей начальных тейлоровских коэффициентов в проблеме Кшижа.

В работе [7] получены точные оценки коэффициентов $|\{f\}_n|$, $n = 1,\ldots,6$, на классах B_t. Однако, на указанных выше интервалах они получены численным методом, возможно с недостаточной точностью, поэтому вопрос о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 6$ формально остаётся открытым. Тем не менее, результаты статьи [7] говорят в пользу справедливости гипотезы Кшижа при $n = 1,\ldots,6$.

В работе [10] описанным здесь методом сделан вывод о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 4$, а в статье [14] тем же методом сделан вывод о справедливости гипотезы Кшижа при $n = 5$. О том почему эти выводы не вполне корректны в строгом математическом смысле подробно сказано в работе [7]. Далее, в работе [11] этим же методом были проведены оценки первых шести коэффициентов, правда справедливость гипотезы Кшижа при $n = 6$ не была установлена.

Во всех перечисленных работах вычисления проводились при $x_i \in \partial\Delta$. При $n = 1$ и при $n = 2$, данный метод позволяет получить оценки точные на B_t, $t > 0$. При $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ оценки получаются точными на B, но не на B_t.

Вероятно, что при $n = 6$ этим методом невозможно получить оценку точную хотя бы на B. Поэтому метод можно отнести к «асимптотическим» методам.

Почему вычисления этим методом можно проводить только на единичной окружности, а не на всём замкнутом единичном круге, сказано в пункте 4.

Описываемый в этой работе метод интересен тем, что в большинстве методов мы переходим от задачи максимизации функционала к задаче максимизации функции, а здесь мы перешли к задаче минимизации функции. Кроме того, обычно такая функция находится для каждого n отдельно, а в этой работе получена достаточно простая аналитическая зависимость от n.

10. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ШЕСТОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Так как мы решаем задачу оценки $|\{f\}_n|$ на B, то нам достаточно найти не наименьшее значение h_n, а лишь значение, меньшее чем $2/e$. Эту задачу можно сформулировать так: найти наименьшее значение целевой функции $h_n(e^{i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_n})$ на множестве $\mathcal{C}_n$, введённом нами в конце пункта 7. Здесь мы займёмся случаем $n = 6$. Случаи $n = 1,\ldots,5$ см. в [11].

Имеет место

Теорема 2. *Если $f \in B$, то $|\{f\}_6| < 2/e + 0.001163$.*

Доказательство. Для доказательства будем исследовать на минимум функцию $h_6(1, e^u, e^{-u}, e^v, e^v, -1)$. Как видно, при фиксированном t это функция двух переменных u и v. Такой подход позволяет существенно уменьшить пространство поиска. Далее простым подбором находим хорошие значения для u и v. Наша задача состоит в том, чтобы сделать это на интервале $(t_1(6), t_2(6))$, так как на $[0, +\infty)\backslash(t_1(6), t_2(6))$ нужная нам оценка уже имеется (см. начала пункта 9).

Если $u = 1.00619$, $v = -0.09788t + 3.217$, то

$$\psi_1(t) := h_6(1, e^{\pi/3+u}, e^{-(\pi/3+u)}, e^{2\pi/3+v}, e^{-(2\pi/3+v)}, -1) < 2/e, \quad t \in [1.015,1.175].$$

Если $u = -3.1113953$, $v = 2.015 + \sqrt{-t^2 + 2.0699886t + 0.1341}$, то при $t \in [1.175,1.407]$

$$\psi_2(t) := h_6(1, e^{\pi/3+u}, e^{-(\pi/3+u)}, e^{2\pi/3+v}, e^{-(2\pi/3+v)}, -1) < 2/e + 0.001163.$$

Если $u = 1.033$, $v = -0.3385t + 3.52914$, то

$$\psi_3(t) := h_6(1, e^{\pi/3+u}, e^{-(\pi/3+u)}, e^{2\pi/3+v}, e^{-(2\pi/3+v)}, -1) < 2/e, \quad t \in [1.407,1.607].$$

Если $u = 1.033$, $v = -0.5076t + 3.7689$, то

$$\psi_4(t) \coloneqq h_6(1, e^{\pi/3+u}, e^{-(\pi/3+u)}, e^{2\pi/3+v}, e^{-(2\pi/3+v)}, -1) < 2/e, \quad t \in [1.418{,}1.725].$$

Если $u = 1.4$, $v = 2.3$, то

$$\psi_5(t) \coloneqq h_6(1, e^{u}, e^{-u}, e^{v}, e^{v}, -1) < 2/e, \quad t \in [1.71{,}t_2(6)].$$

$\blacksquare$

11. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

В основном, численный метод, используемый здесь, заключается в том, что n-мерный куб $\mathcal{C}_n$, введённый в конце пункта 7 разбивается равномерным образом на достаточно маленькие n-мерные кубы, после чего в каждой точке получившейся сети проводится поиск локального минимума (подробности в [7]). Для поиска локального минимума используется метод М. Дж. Д. Пауэлла, также известный как метод сопряжённых направлений. Расчёты производятся параллельно. Все вычисления, описанные в этой работе проведены на компьютере автора. Результаты вычислений представлены ниже в графическом виде, что позволяет сравнить результаты, полученные описанным выше методом с результатами, полученными в [7]. Напомним, что согласно изложенному в начале пункта 9, вычисления достаточно провести на интервале $(t_1(n), t_2(n))$, так как на $[0, +\infty)\backslash(t_1(n), t_2(n))$ нужная нам оценка уже имеется.

На рисунке 1 изображены графики функций $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_3|$ и $\min h_3(x_1,x_2,x_3)$ в зависимости от t на промежутке, содержащем промежуток $[t_1(3),t_2(3)]$. Как и ожидалось график второй функции мажорирует график первой.

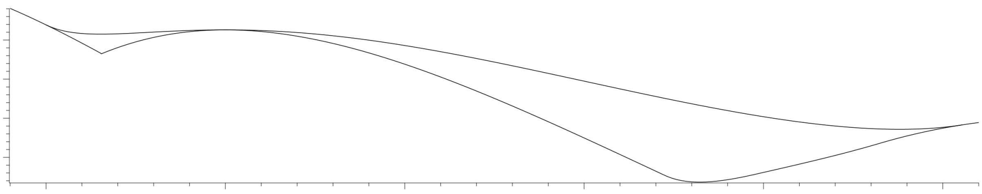

Рис. 1. *Кривые* $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_3|$ *и* $\min\limits_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,2,3}} h_3(x_1,x_2,x_3)$ *на промежутке* $[1.4{,}4.1]$.

На рисунке 2 изображены графики функций $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_4|$ и $\min h_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$ в зависимости от t на промежутке, содержащем промежуток $[t_1(4),t_2(4)]$. Как и ожидалось график второй функции мажорирует график первой.

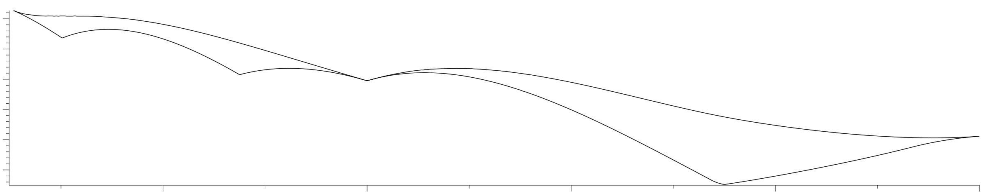

Рис. 2. *Кривые* $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_4|$ *и* $\min\limits_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,2,3,4}} h_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$ *на промежутке* $[1.25{,}6]$.

На рисунке 3 изображены графики функций $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_5|$ и $\min h_5(x_1,\ldots,x_5)$ в зависимости от t на промежутке, содержащем промежуток $[t_1(5),t_2(5)]$. Как и ожидалось график второй функции мажорирует график первой.

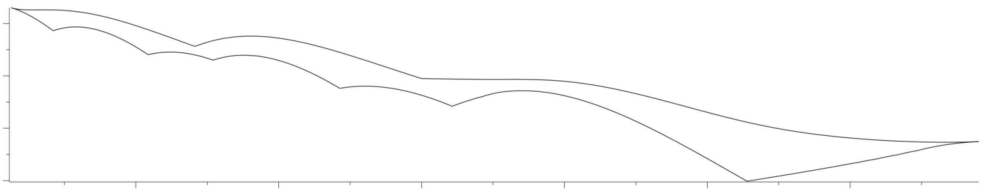

Рис. 3. *Кривые* $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_5|$ *и* $\min\limits_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,\ldots,5}} h_5(x_1,\ldots,x_5)$ *на промежутке* $[1.12,7.9]$.

На рисунке 4 изображены графики функций $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_6|$ и $\min h_6(x_1,\ldots,x_6)$ в зависимости от t на промежутке, содержащем промежуток $[t_1(6),t_2(6)]$. Как и ожидалось график второй функции мажорирует график первой.

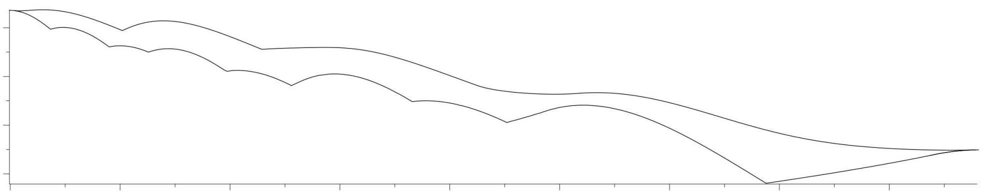

Рис. 4. *Кривые* $\max\limits_{f\in B_t}|\{f\}_6|$ *и* $\min\limits_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,\ldots,6}} h_6(x_1,\ldots,x_6)$ *на промежутке* $[1,9.8]$.

Увеличим рисунок 4 для того, чтобы подробнее рассмотреть верхний график на промежутке $[1.175,1.407]$. На полученном таким образом рисунке 5 изображены графики функций $2/e$ и $\min h_6(x_1,\ldots,x_6)$ в зависимости от t на промежутке, содержащем промежуток $[1.175,1.407]$. По всей видимости, $\min h_6 > 2/e$ при $t \in [1.175,1.407]$, при этом $\min h_6 < 0.73691965$ $(0.73691965 \approx 2/e + 0.00116077)$. Необходимо заметить, что, рисунок 5 сильно растянут в вертикальном направлении (примерно в 200 раз). Заметим, что автоматические численные расчёты дали результат несколько лучший, чем был получен в пункте 10. Тем не менее, улучшить оценку до величины не превосходящей $2/e$ автору не удалось.

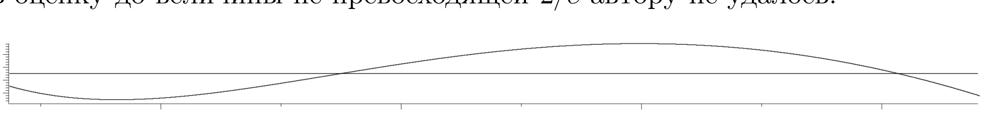

Рис. 5. *Кривые* $2/e$ *и* $\min\limits_{\substack{|x_i|=1,\\ x_i\neq x_j,\ i\neq j,\\ i,j=1,\ldots,6}} h_6(x_1,\ldots,x_6)$ *на промежутке* $[1.037,1.44]$.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный здесь метод в неявной и менее общей форме впервые появился в работе В. Шапеля [10]. В статье [10] изложение строится вокруг теории меры, хотя по сути, для получения основного результата в [10] используется именно метод, которому посвящена эта работа. Основной целью настоящей статьи является конструктивное изложение метода без всяких отсылок к теории меры и в наиболее общей форме. Связи с теорией меры, найденные в [10] весьма интересны, но с точки зрения приложений к оценке коэффициентов — второстепенны.

Здесь описан подход к решению задачи получения оценок модулей начальных тейлоровских коэффициентов на произвольных классах подчинённых функций M_F. Описаны приложения метода на B_t, $t \geqslant 0$. В частности, указано на возможность использования численных методов глобальной липшицевой оптимизации для доказательства гипотезы Кшижа при малых n. Корректность этого подхода в строгом математическом смысле доказана в [7].

В работе используются результаты, полученные в основном методом подчинения [3, 9]. Методами линейной алгебры задача сведена к задаче о поиске условного минимума действительнозначной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств.

Все изложенные здесь подходы можно применять не только на классах B_t, а также и на других классах подчинённых функций.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе B, а также на других классах голоморфных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindelöf, E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel / E. Lindelöf // Acta Soc. Sci. Fenn. — 1909. — V. 35, № 7. — P. 1–35.

2. Littlewood, J. E. Lectures on the theory of functions / J. E. Littlewood. — Oxford university press, 1947.

3. Rogosinski, W. On the coefficients of subordinate functions / W. Rogosinski // Proc. London Math. Soc. — 1943. — V. 48. — P. 48–82.

4. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1: Основные алгоритмы / Д. Кнут. — Москва : Мир, 1976.

5. Krzyz, J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions / J. G. Krzyz // Ann. Polon. Math. — 1967–1968. — V. 20. — P. 314.

6. Krzyz, J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions / J. G. Krzyz // Ann. Polon. Math. — 1968. — V. 70. — P. 314.

7. Ступин, Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций / Д. Л. Ступин // Вестник российских университетов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 145. — С. 98–120.

8. Hummel, J. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions / J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman // J. d'Analyse Mathematique. — 1977. — V 31. — P. 169–190.

9. Peretz, R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions / R. Peretz // Compl. Var. — 1992. — V. 17, iss. 3–4. — P. 213–222.

10. Szapiel, W. A new approach to the Krzyz conjecture / W. Szapiel // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. — 1994. — V. 48. — P. 169–192.

11. Ступин, Д. Л. Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа / Д. Л. Ступин // Применение функционального анализа в теории приближений. — 2015. — С. 36–49.

12. Ступин, Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа / Д. Л. Ступин // Применение функционального анализа в теории приближений. — 2010. — С. 52–60.

13. Stupin, D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem / D. L. Stupin // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.

14. Samaris, N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient / N. Samaris // Compl. Var. Theory and Appl. — 2003. — V. 48. — P. 753–766.

15. Ступин, Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения / Д. Л. Ступин // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 28, № 143. — С. 277–297.

REFERENCES

1. Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. Acta Soc. Sci. Fenn. 1909, vol. 35, no. 7, pp. 1–35.

2. Littlewood J.E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press, 1947.

3. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc., 1943, vol. 48, pp. 48–82.

4. Knuth D.E. The art of computer programming. T. 1: Fundamental Algorithms. [Knut D. Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM. T. 1: Osnovnye algoritmy]. Moscow, Mir, 1976.

5. Krzyz J.G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. Ann. Polon. Math. 1967–1968, vol. 20, p. 314.

6. Krzyz J.G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. Ann. Polon. Math. 1968, vol. 70, p. 314.

7. Stupin D.L. A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on a class of bounded nonvanishing functions. [Stupin D.L. Novyj metod ocenki modulej nachal'nyh tejlorovskih koefficientov na klasse ogranichennyh ne obrashchayushchihsya v nul' funkcij]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika — Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, no. 145, pp. 98–120.

8. Hummel J.A., Scheinberg S., Zalcman L.A. *A coefficient problem for bounded nonvanishing functions.* J.d'Analyse Mathematique, 1977, vol. 31, pp. 169–190.

9. Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. Compl. Var. 1992, vol. 17, iss. 3-4, pp. 213–222.

10. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994, vol. 48, pp. 169–192.

11. Stupin D.L. The measure theory and the estimation of the moduli of the first six coefficients in the Krzyz problem. [Stupin D.L. Teoriya mery i ocenka modulej pervyh shesti koefficientov v probleme Kshizha]. *Primenenie funkcional'nogo analiza v teorii priblizhenij — Applications of functional analysis to approximation theory*, 2015, pp. 36–49.

12. Stupin D.L. The Sharp estimates of the coefficients in the Krzyz problem. [Stupin D.L. Tochnye ocenki koefficientov v probleme Kzhizha]. *Primenenie funkcional'nogo analiza v teorii priblizhenij — Applications of functional analysis to approximation theory*, 2010, pp. 52–60.

13. Stupin D.L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. Electronic archive / Cornell University Library, 2011.

14. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. Compl. Var. Theory and Appl., 2003, vol. 48, pp. 753–766.

15. Stupin D.L.. [The coefficient problem for bounded functions and its applications]. *Stupin D.L. Problema koefficientov dlya ogranichennyh funkcij i eyo prilozheniya — Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika*, Russian Universities Reports. Mathematics. 2023, vol. 28, no. 143, pp. 277–297

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет, Тверь, Россия
E-mail: dstupin@mail.ru

Stupin Denis L., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tver State University, Tver, Russia
E-mail: dstupin@mail.ru