

# О КРИТЕРИИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ НА ПОЛУОСИ

Е. А. Павлов, А. И. Фурменко

*Крымский инженерно-педагогический университет;  
Военно-воздушная академия им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина*

Поступила в редакцию 09.02.2024 г.

**Аннотация.** Изучается интегральный оператор свертки в симметрических пространствах измеримых, в смысле Лебега, функций, заданных на полуоси  $(0, +\infty)$ . Эти пространства, независимо друг от друга, были введены Е.М. Семеновым и В. Люксембургом под названием перестановочно-инвариантные пространства.

В данной статье доказано, что для того, чтобы интегральный оператор свертки на полуоси ограниченно действовал в симметричном пространстве  $E$ , удовлетворяющем определенным условиям, необходимо и достаточно, чтобы ядро оператора  $K(t) \geq 0$  было суммируемо на  $(0, +\infty)$ .

Отметим, что из теоремы 4 (см. [8]) вытекает, в частности, что для того, чтобы оператор свертки ограниченно действовал в лебеговом пространстве  $L_p$ , необходимо и достаточно, чтобы его ядро было суммируемо. Это утверждение обобщается на произвольные интерполяционные между  $L_1$  и  $L_\infty$  пространства.

**Ключевые слова:** ограниченность оператора, интегральный оператор, симметричные пространства.

## ON THE CRITERION FOR THE CONTINUITY OF THE INTEGRAL CONVOLUTION OPERATOR ON THE SEMI-AXIS

E. Pavlov, A. Furmenko

**Abstract.** The integral convolution operator is studied in symmetric spaces of measurable, in the Lebesgue sense, functions defined on the half-axis  $(0, +\infty)$ . These spaces, independently of each other, were introduced by E.M. Semenov and V. Luxemburg called permutation-invariant spaces. This article proves that in order for the integral convolution operator on the half-axis to act boundedly in a symmetric space  $E$  satisfying certain conditions, it is necessary and sufficient that the kernel of the operator  $K(t) \geq 0$  be summable on  $(0, +\infty)$ .

Note that from Theorem 4 (see [8]) it follows, in particular, that in order for the convolution operator to act boundedly in the Lebesgue space  $L_p$ , it is necessary and sufficient that its kernel be summable. This statement is generalized to arbitrary interpolation ones between  $L_1$  and  $L_\infty$  space.

**Keywords:** boundedness of the operator, integral convolution operator, symmetric spaces.

## ВВЕДЕНИЕ

Интегральные операторы разными учеными изучались в различных пространствах. Одни из первых теорем о непрерывности интегральных операторов принадлежат одному из основателей функционального анализа С. Банаху.

Задача получения критерия ограниченности интегрального оператора в различных классах функциональных пространств является одной из сложных задач функционального анализа.

Известно множество достаточных условий ограниченности интегрального оператора, действующего из одного функционального пространства в другое, доказанных известными учеными (см. [1], [2], [3], [4], [5], [7] и др.). В частности достаточные условия ограниченности интегрального оператора свертки на оси  $(-\infty, \infty)$  приведены в монографиях (см. [1], [4], [7]).

Несколько критериев непрерывности общих интегральных операторов в терминах существования функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , удовлетворяющих вместе с ядром  $K(t)$  ряду неравенств, приведены в монографии [1].

Интегральному оператору свертки на полуоси было уделено меньшее внимание. Известны достаточные условия ограниченности интегрального оператора свертки на полуоси в симметрическом пространстве (см. [9], [10], [11]).

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. Функциональное банахово пространство  $E$  называется идеальной структурой, если из условия  $|x| \leq |y|$ , где  $x(t)$  измеримая функция, а  $y(t) \in E$  следует, что  $x(t) \in E$  и  $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ .

Определение 2. Пусть  $S(0, \infty)$  пространство всех, измеримых по Лебегу, функций, определенных на полуоси  $(0, \infty)$  и почти всюду конечных. Функцией распределения для  $x(t)$  называется функция заданная равенством

$$\eta_x(\tau) = \text{mes} \{t : x(t) > \tau\}, \quad x(t) \geq 0$$

Определение 3. Две неотрицательные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называются равноизмеримыми, если выполняется равенство

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau)$$

Рассматриваются только такие функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , для которых

$$\eta_x(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, \infty)$$

$$\eta_y(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, \infty).$$

Определение 4. Перестановкой неотрицательной функции  $x(t)$  называется функция, определенная равенством

$$x^*(t) = \inf\{\tau : \eta_x(\tau) < t\}.$$

Определение 5. Функциональное банахово пространство на  $(0, +\infty)$  с мерой Лебега называется симметричным или перестановочно - инвариантным в другой терминологии (см. [7], [14]), если

1)  $E$  является идеальной структурой

2) Из того, что  $|x(t)|$  и  $|y(t)|$  равноизмеримы и  $y(t) \in E$  следует, что  $x(t) \in E$  и  $\|x\|_E = \|y\|_E$ .

Определение 6 (см. [7]). Пусть  $\psi(t)$  положительная всюду конечная функция на полуоси  $(0, \infty)$ . Функцией растяжения для функции  $\psi(t)$  называется функция  $M_\psi(s)$  определяемая формулой

$$M_\psi(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\psi(s \cdot t)}{\psi(t)}.$$

Теорема (см. [7], стр. 76). Если функция растяжения конечна в некоторой окрестности единицы, то она конечна в каждой точке  $S \in (0, \infty)$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть  $E((0, +\infty), dt)$ , интерполяционное, а, следовательно симметричное (см. [7], стр. 129) пространство между  $L_1((0, +\infty), dt)$ , и  $L_p((0, +\infty), dt)$ , . Пусть функция растяжения фундаментальной функции  $\varphi_E(t)$  конечна в некоторой окрестности единицы.

Тогда, для того, чтобы интегральный оператор свертки с неотрицательным ядром  $K(t)$

$$T_k x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s) ds, \quad (1)$$

ограниченно действовал в  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы ядро  $K(t)$  было суммируемо на  $(0, +\infty)$ , т.е.  $K(t) \in L_1((0, +\infty), dt)$ .

Доказательство.

Необходимость. Пусть оператор  $T_k$  ограниченно действует в  $E$ . Пусть  $x(t) \in E$ .

Получаем

$$\int_0^t K(t-s)x^*(s) ds \geq x^*(t) \int_0^t K(t-s) ds \quad (2)$$

Делая замену переменной  $t-s=\tau$  в интеграле правой части (2), получим неравенство

$$\int_0^t K(t-s)x^*(s) ds \geq x^*(t) \int_0^t K(\tau) d\tau \quad (3)$$

Так как оператор  $T_k$  ограниченно действует в  $E$ , то справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^t K(t-s)x^*(s) ds \right\|_E \leq C \cdot \|x(t)\|_E, \quad (4)$$

где константа  $C$  не зависит от  $x$ . Беря норму от обеих частей (3), получим неравенство

$$\left\| \int_0^t K(t-s)x^*(s) ds \right\|_E \geq \|x^*(t) \int_0^t K(\tau) d\tau\|_E. \quad (5)$$

Из неравенств (4), (5) получаем неравенство

$$\|x^*(t) \int_0^t K(\tau) d\tau\|_E \leq C \cdot \|x(t)\|_E. \quad (6)$$

Далее, очевидно, неравенство

$$\|\chi_{[\xi, 2\xi]} x^*(t) \int_0^t K(\tau) d\tau\|_E \leq C \cdot \|x(t)\|_E. \quad (7)$$

Учитывая, что интеграл  $\int_0^t K(\tau) d\tau$  является возрастающей функцией аргумента  $t$ , получаем неравенство для  $\xi > 0$

$$\int_0^\xi K(\tau) d\tau \|\chi_{[\xi, 2\xi]}(t)x^*(t)\|_E \leq C \cdot \|x(t)\|_E \quad (8)$$

Полагая  $x(t) = \chi_{[\xi, 2\xi]}(t)$  получим неравенство

$$\int_0^{\xi} K(\tau) d\tau \cdot \varphi_E(\xi) \leq C \cdot \varphi_E(2\xi) \quad (9)$$

Из (9) получаем неравенство

$$\int_0^{\xi} K(\tau) d\tau \leq C \cdot \frac{\varphi_E(2\xi)}{\varphi_E(\xi)} \leq C \cdot M_{\varphi_E}(2), \quad (10)$$

где  $M_{\varphi_E}(t)$  функция растяжения для функции  $\varphi_E(t)$ .

По условию  $M_{\varphi_E}(t)$  конечна в некоторой окрестности единицы тогда в силу полумультимпликативности она конечна в каждой точке (см.[7], стр. 76). Следовательно  $C \cdot M_{\varphi_E}(2)$  конечное число, не зависящее от  $\xi$ .

В левой части неравенства (10) записана функция возрастающая по аргументу  $\xi$  ограниченная сверху числом  $C \cdot M_{\varphi_E}(2)$ .

По известной теореме она имеет предел

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{\xi} K(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau \leq C \cdot M_{\varphi_E}(2) \quad (11)$$

Неравенство (11) означает, что

$$K(t) \in L_1((0, +\infty), dt) \quad (12)$$

Достаточность. Пусть ядро

$$K(t) \in L_1((0, +\infty), dt)$$

Получаем, пользуясь теоремой Фубини-Тонелли

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \int_0^t K(s)x(t-s) ds \right| dt &\leq \int_0^{\infty} \int_0^t K(s) |x(t-s)| ds dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_s^{\infty} K(s) |x(t-s)| dt \right) ds = \int_0^{\infty} K(s) \left( \int_s^{\infty} |x(t-s)| dt \right) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Делая замену переменной  $t-s=\tau$ , получаем

$$\int_s^{\infty} \left| \int_s^t K(s)x(t-s) ds \right| dt = \int_0^{\infty} |x(\tau)| d\tau \quad (14)$$

Учитывая неравенства (13) и (14), получаем неравенство

$$\left\| \int_0^t K(s)x(t-s) ds \right\|_{L_1} \leq \int_0^{\infty} x(s) ds \|x\|_{L_1} \quad (15)$$

Далее получаем

$$\left| \int_0^t K(s)x(t-s) ds \right| \leq \int_0^t K(s) |x(t-s)| ds. \quad (16)$$

Очевидно неравенство

$$|x(t-s)| \leq \|x(t)\|_{L_\infty} \quad (17)$$

Из (16) и (17) получаем неравенство

$$\left| \int_0^t K(s)x(t-s) ds \right| \leq \int_0^t K(s) ds \|x\|_{L_\infty} \leq \int_0^\infty K(s) ds \cdot \|x\|_{L_\infty}, \quad (18-19)$$

Из (18), очевидно, следует неравенство

$$\left\| \int_0^t K(s)x(t-s) ds \right\|_{L_\infty} \leq \|K\|_{L_1} \cdot \|x\|_{L_\infty}, \quad (20)$$

Из интерполяционности  $E$  теперь следует, что оператор  $T_k$  ограниченно действует в  $E$ .

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть ядро  $K(t)$  определено и неотрицательно на  $(0, +\infty)$ . Тогда, для того, чтобы интегральный оператор свертки  $T_k$ , заданный равенством (1) ограниченно действовал в  $L_p((0, +\infty), dt)$ , где  $p \leq 1$ , необходимо и достаточно, чтобы ядро  $K(t)$  было суммируемо на  $(0, +\infty)$ .

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 1 для случая  $E = L_p$ . Действительно, (см. [7]) пространство  $L_p$  и симметрично, и интерполяционно между  $L_1$  и  $L_\infty$ . Далее,  $\varphi_E(t) = t^{\frac{1}{p}}$ ,

$$M_{\varphi_E}(\tau) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\varphi_E(\tau \cdot t)}{\varphi_E(t)} = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\tau^{\frac{1}{p}} \cdot t^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{p}}} = \tau^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (21)$$

для всех  $\tau \in (0, +\infty)$ . В частности  $M_{\varphi_{L_p}}(\tau) < \infty$  в окрестности точки  $\tau = 1$ .

Теорема доказана.

Замечание. Известно (см. [9], [10], [11]), что для того, чтобы интегральный оператор с ядром  $K(t)$  был регулярным из  $E$  в  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы интегральный оператор с ядром  $|K(t)|$  ограниченно действовал в  $E$ . Фактически Теорема 1 и Теорема 2 могли быть сформулированы так: Для того, чтобы интегральный оператор свертки был регулярным в  $E$  или в  $L_p$ , необходимо и достаточно, чтобы  $K(t) \in L_1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коротков, В. Б. Интегральные операторы / В. Б. Коротков. — Наука, Сибирское отделение, 1983.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.
3. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. Н. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966.
4. Халмош, П. Ограниченные интегральные операторы в пространстве  $L$  / П. Халмош, В. Сандер. — М. : Наука, 1985.
5. Забрейко, П. П. Нелинейные интегральные операторы / П. П. Забрейко // Труды сем. по функ. ан. — 1966. — Вып. 8. — С. 1–148.
6. Грибанов, Ю. И. Непрерывность линейных интегральных операторов в метризуемых векторных топологических пространствах измеримых функций / Ю. И. Грибанов // Уч. Записки Казанского университета. Функциональный анализ и теория функций. — 1967. — сб. 4. — С. 110–113.

7. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М. : Наука, 1978.
8. Павлов, Е. А. Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств  $L_p, L_r$  / Е. А. Павлов, А. И. Фурменко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2023. — № 83. — С. 52–58.
9. Павлов, Е. А. Об интегральных операторах свертки / Е. А. Павлов // Математические заметки. — 1985. — Т. 38, № 1. — С. 74–79.
10. Павлов, Е. А. Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Известия вузов. Математика. — 1982. — Т. 2. — С. 36–40.
11. Павлов, Е. А. Об операторах свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Успехи математических наук. — 1976. — Т. 18, № 1. — С. 80–85.
12. Пелешенко, Б. Н. Об интегральных операторах свертки / Б. Н. Пелешенко, В. А. Катан // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, вып. 4. — С. 551–555.
13. Семенов, Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций / Е. М. Семенов // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1292–1295.
14. Luxemburg, W. A. Rearrangement invariant Banach function spaces / W. A. Luxemburg // Queen's Papers Pur Appl. Math. — 1967. — V. 10. — P. 83–144.
15. Функциональный анализ / под общей редакцией С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1972.

## REFERENCES

1. Korotkov V.B. Integral operators. [Korotkov V.B. Integral'nye operatory]. Science, Siberian Branch, 1983.
2. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. [Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funkcional'nyj analiz]. Moscow, 1977, 744 p.
3. Krasnoselsk M.A., Zabreiko P.P., Pustynnik E.N., Sobolevsky P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnoselsk M.A., Zabreiko P.P., Pustynnik E.N., Sobolevsky P.E. Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsij]. Moscow, 1966.
4. Halmos P., Sander V. Bounded integral operators in the space  $L$ . [Halmos P., Sander V. Ogranichennye integral'nye operatory v prostranstve  $L$ ]. Moscow: Nauka, 1985.
5. Zabreiko P.P. Nonlinear Integral Operators. [Nelinejnye integral'nye operatory]. *Trudy sem. po funk. an. — Proceedings of the Seminar on Functional Analysis*, 1966, iss. 8, pp. 1–148.
6. Gribanov Yu.I. Continuity of linear integral operators in metrizable vector topological spaces of measurable functions. [Gribanov YU.I. Nepreryvnost' linejnykh integral'nykh operatorov v metrizuemykh vektornykh topologicheskikh prostranstvakh izmerimyh funktsij]. *Uch. Zapiski Kazanskogo universiteta. Funkcional'nyj analiz i teoriya funktsij — Scientific Notes of Kazan University Functional Analysis and Theory of Functions*, 1967, sat. 4, pp. 110–113.
7. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolation of linear operators. [Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolyaciya linejnykh operatorov]. Moscow: Nauka, 1978.
8. Pavlov E.A., Furmenko A.I. On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces  $L_p$  and  $L_r$ . [Pavlov E.A., Furmenko A.I. Ob ogranichennosti integral'nogo operatora svertki v pare klassicheskikh lebegovykh prostranstv  $L_p, L_r$ ]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Journal of Mathematics and Mechanics*, 2023, no. 83, pp. 52–58.
9. Pavlov E.A. On integral convolution operators. [Pavlov E.A. Ob integral'nykh operatorah svertki]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1985, vol. 38, no. 1, pp. 74–79.
10. Pavlov E.A. On the limitation of convolution operators in symmetric spaces. [Pavlov E.A. Ob ogranichennosti operatorov svertki v simmetrichnykh prostranstvakh]. *Izvestiya vuzov. Matematika — Russian Mathematics*, 1982, vol. 2, pp. 36–40.
11. Pavlov E.A. On convolution operators in symmetric spaces. [Pavlov E.A. Ob operatorah

svertki v simmetrichnyh prostranstvakh]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1976, vol. 18, no. 1, pp. 80–85.

12. Peleshchenko B.N., Katan V.A. On integral convolution operators. [Peleshchenko B.N., Katan V.A. Ob integral'nyh operatorah svertki]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, iss. 4, pp. 551–555.

13. Semenov E.M. Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions. [Semenov E.M. Teoremy vlozheniya dlya banahovyh prostranstv izmerimyh funkciy]. *Dokl. AN SSSR — Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1964, vol. 156, no. 6, pp. 1292–1295.

14. Luxemburg W.A. Rearrangement invariant Banach function spaces. *Queen's Papers Pur Appl. Math.*, 1967, vol. 10, pp. 83–144.

15. Functional Analysis, under the general editorship of S.G. Krein. [Funkcional'nyj analiz, pod obshchej redakciej S.G. Krejna]. Moscow, 1972.

Павлов Евгений Александрович, д.ф.-м.н.,  
профессор, профессор кафедры математики и физики, Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, Российская Федерация  
E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Pavlov Evgeniy A., Doctor of Physical and  
Mathematics Sciences, Professor, of the  
Department of Mathematics and Physics,  
The Crimean State Engineering Pedagogical  
University, Simferopol, Russian Federation  
E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Фурменко Александр Иванович, к.ф.-м.н.,  
доцент, доцент кафедры математики,  
Военно-воздушная академия им. профессора  
Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воро-  
неж, Российская Федерация  
E-mail: furmenko@mail.ru

Furmenko Aleksandr I., Candidate of  
Physicals and Mathematics Sciences,  
Associate Professor of the Department  
of Mathematics, N. E. Zhukovskiy and  
Yu. A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh,  
Russian Federation  
E-mail: furmenko@mail.ru