УДК 511

О МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА, СОДЕРЖАЩЕГО РЕШЕТО СЕЛЬБЕРГА В СОЧЕТАНИИ С ВЕСАМИ БУХШТАБА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.04.2023 г.

Аннотация. В работе рассмотрен метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с последними весами Бухштаба (1985 г.). Приведено полное решение задачи по приложению этого метода весового решета к вопросу о получении оценки снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности целых чисел.

Проблема выбора оптимальных весов в методе решета Сельберга является очень трудной. Веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества в выборе параметров в методе весового решета в сравнении с более ранними весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г., веса Бухштаба–Лабордэ), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г.).

Ключевые слова: число, последовательность, веса, оценка сверху, оценка снизу.

WEIGHT SIEVE METHOD CONTAINING SELBERG SIEVE IN COMBINATION WITH BUCHSTAB WEIGHTS

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. The paper considers the weight sieve method containing the Selberg sieve in combination with the latest Buchstab weights (1985). A complete solution of the problem of applying this weight sieve method to the problem of obtaining a lower estimate for the number of almost prime numbers in a finite sequence of integers is given.

The problem of choosing the optimal weights in the Selberg sieve method is very difficult. Buchstab's weights (1985) provide an advantage in the choice of parameters in the weight sieve method in comparison with earlier Buchstab's weights (1967), and their continuous form obtained by Laborde (1979, weights of Buchstab–Laborde), of which Richert's (1969) weights are a special case.

Keywords: number, sequence, weights, lower estimation, upper estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Метод весового решета можно успешно применять при решении теоретико-числовых задач, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей. Такие числа называют почти простыми числами. Выбор оптимальных весов в методе решета Сельберга является очень трудной проблемой.

В работе рассмотрен метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с последними весами Бухштаба (1985 г.). Веса Бухштаба, анонсированные им в 1985 г. [1], исследованы в работе [2]. Сравнение различных весов приведено в работе [3] (глава 1, §5, с. 82 – 91). Веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества при выборе параметров в методе весового решета в сравнении с более раними весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г., веса Бухштаба–Лабордэ), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г.)

Приведено полное решение задачи по приложению метода весового решета, содержащего решето Сельберга в сочетании с последними весами Бухштаба (1985 г.) к вопросу о получении оценки снизу числа почти простых чисел в конечной последовательности целых чисел.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конечную последовательность A целых чисел a_n, где $n \in \mathbf{N}$. Через $\nu(a_n)$ обозначим количество простых чисел в разложении a_n с учетом их кратности. Поставим задачу: получить оценку снизу количества элементов из A, имеющих в своем разложении не более r простых чисел с учетом их кратности $(r \in \mathbf{N}, r \geqslant 2)$, то есть оценку снизу количества r-почти простых чисел в последовательности A. Для решения задачи применим метод одномерного весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.). Имеем:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{1/a} \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{1/a}}} 1 - \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{1/a} \\ \nu(a_n) > r+1}} 1,$$

где p_n – наименьший простой делитель числа a_n, X – достаточно большое положительное число, $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$, $r \in \mathbf{R}$, $r \geqslant 2$.

Приведем весовую функцию $T(X)$ в общем виде, о котором первому автору стало известно (1986 г.) из устного сообщения А. А. Бухштаба. А в работе [1] приведена весовая функция при значении параметра $g' = 3$:

$$\begin{gathered} T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \frac{1}{2c-b-1} \Bigg\{ (c-b) \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \\ + \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}} \Bigg(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{1-g'z}} S_k(A_p; X^z) \Bigg) dz + \\ + \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} \left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}} \right) + \\ + \frac{1}{g'} \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(bg' - a + g' - a(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X} \right) \times S_k\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}} \right) \Bigg\}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $k,n,d \in \mathbf{N}$, $a,b,c,g' \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant b \leqslant c \leqslant a$, $2c-b-1 > 0$, $1 \leqslant g' \leqslant a-1, z \in \mathbf{R}$,

$$S_k(A_d; z) := |\{a_n \in A | a_n \equiv 0 \pmod d, p_n \geqslant z\}|.$$

При $k = 1$ будем индекс k опускать: $S_1(A_d; z) = S(A_d; z)$.

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем обозначения: $\omega(n)$ – мультипликативная функция, $n \in \mathbf{N}$,

$$W(z) := \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p} \right),$$

где $z \in \mathbf{R}, z > 1, p$ – положительное простое число.

Теорема 1. *Пусть A – конечная последовательность целых чисел и выполнены первые три условия на A, неравенство (4) и $T(X)$ определено равенством (1) при $k = 1$. Тогда для $T(X)$ имеет место следующая оценка сверху:*

$$T(X) \leqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(B(\alpha,a,b,c,g') + \frac{C_{28}L}{\ln^{\delta} X}\right),$$

где параметр L определен во втором условии на A, $C_{28} > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \delta < 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством:

$$B(\alpha,a,b,c,g') := \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \right.$$

$$+ \int\limits_{\alpha a-c}^{g'} F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a - z}dz + \int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz +$$

$$\left. + \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} \frac{(b+1-(\alpha a/g'))z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}F(g')dz \right\}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть A – конечная последовательность целых чисел, выполнены все условия на A, неравенства (3), (4), $M > 1$, $a,b,c,g' \in \mathbf{R}$, причем $1 \leqslant b < c < \alpha a$, $g'+1 \leqslant \alpha a \leqslant 2g'+2$, $\alpha a - c \leqslant g'$, $(r+1)c - Ma = 2c-b-1$, $2c-b-1 > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда имеет место оценка снизу:*

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a) - B(\alpha,a,b,c,g') - \frac{C_{31}L}{\ln^{\delta} X}\right),$$

где $C_{31} > 0$, $L \geqslant 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (2).

Теорема 3. *Пусть A – конечная последовательность целых чисел, выполнены все условия на A, $f(\alpha a) := 1 - \eta(\alpha a)$, $F(z) := \sigma^{-1}(z)$, $a,b,c,g' \in \mathbf{R}$, $M > 1$, $1 \leqslant b < c < \alpha a$, $g'+1 \leqslant \alpha a \leqslant 2g'+2$, $\alpha a - c \leqslant g'$, $(r+1)c - Ma = 2c-b-1$, $2c-b-1 > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда имеет место оценка снизу:*

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a) - B(\alpha,a,b,c,g') - \frac{C_{28}L}{\ln^{1/2} X}\right),$$

где $C_{28} > 0$, $L \geqslant 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (2),

УСЛОВИЯ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Введем условия на последовательность A.

1. Существует постоянная $C_1' \geqslant 1$, такая, что

$$1 \leqslant \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leqslant C_1'$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ – мультипликативная функция, такая, что $\frac{\omega(d)}{d}X$ является приближением $|A_d|$, $d \in \mathbf{N}$, $X > 1$ и $\mu(d) \neq 0$,

$\mu(d)$ – функция Мебиуса: $\mu(d) = \begin{cases} 1, \textit{ если } \ d = 1, \\ (-1)^s, \textit{ если } \ d = p_1 p_2 ... p_s, \\ 0, \textit{ если } \ d \vdots p^2, \end{cases}$

$d,s \in \mathbf{N}, p_1,p_2,...,p_s$ – попарно различные положительные простые числа, p – простое число. Выполнимость первого условия дает возможность рассматривать $\prod\limits_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$.

2. Существуют постоянная $C_2' \geqslant 1$ и параметр L, такие, что

$$-L \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln\frac{v}{u} \leqslant C_2',$$

где $L \geqslant 1$ и не зависит от u и v $(2 \leqslant u \leqslant v)$.
Второе условие говорит о том, что $\omega(p)$, по крайней мере, в среднем по p, равно 1, иначе, будем рассматривать только те последовательности A, при просеивании которых возникает задача одномерного решета.

3. Существуют постоянные α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $C_3' \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^C X},$$

где $d \in \mathbf{N}$, $X \geqslant 2$, $C > 0$, $C_3' = C_3'(C)$, $R(X,d) := |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d}X$.

Третье условие говорит о достаточной малости остаточного члена $R(X,d)$.

4. Существует постоянная $C_4' \geqslant 1$, такая, что

$$\sum_{z \leqslant p < y} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 \leqslant C_4' \left(\frac{X \ln X}{z} + y\right),$$

если $2 \leqslant z \leqslant y \leqslant X$, $X > 1, p$ – простое число.
Четвертое условие необходимо для того, чтобы можно было нужным образом оценить величину R, входящую в неравенство теоремы E.

5. Существует некоторая постоянная M, такая, что $|a_n| \leqslant X^M$ для всех элементов a_n из последовательности A.

Пусть, кроме этого, выполнены условия: $c < \alpha a$, $2 < \alpha a$, где α берется из третьего условия на последовательность A.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем утверждения, которые будут необходимы в дальнейшем.

Теорема A. *Пусть выполнены условия на последовательность* A, $C > 0, L \geqslant 1$ *и* $z^2 \geqslant \frac{X^\alpha}{(\ln X)^A}$. *Тогда имеет место следующая оценка снизу:*

$$S(A;z) \geqslant X \cdot W(z) \left(1 - \eta_k\left(\alpha \frac{\ln X}{\ln z}\right) - C \frac{L(\ln\ln 3X)^{3k+2}}{\ln X}\right),$$

где

$$W(z) := \prod_{p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right).$$

Обозначим через $P(z)$ произведение положительных простых чисел $p<z$, где $z \geqslant 2$.

Теорема B. *Пусть выполнены первые два условия на A и $\xi > z$, $C>0, L \geqslant 1$. Тогда имеет место следующая оценка сверху:*

$$S(A_p;z) \leqslant \frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(z)\left(F_k\left(\frac{\ln\xi^2}{\ln X}\right)+C\frac{L}{\ln^{1/14}\xi}\right)+\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d|P(z)}}3^{\nu(d)}|R(X,pd)|.$$

Теорема C. *Пусть выполнены первые два условия на A, $L \geqslant 1$ и $\tau = (\ln\xi)/(\ln z)$. Тогда имеет место следующая оценка сверху:*

$$S(A_p;z) \leqslant \frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(z)\left(\frac{1}{\sigma_k(2\tau)}+O\left(\frac{L}{\ln^z}\left(\tau^{-k-1}+\tau^{2k+1}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d|P(z)}}3^{\nu(d)}|R(X,pd)|.$$

Теоремы A, B, C доказаны методом решета Сельберга в работе [4] (главы 7, 8, 6, теоремы 7.4, 8.3 и 6.3).

Функции $\eta_k(u), \sigma_k(u), f_k(u), F_k(u)$ являются функциями метода решета. При $k=1$ индекс функций будем опускать и записывать, например, $F(u)$, где $F(u) := F_1(u)$.

Из теоремы A при $z = X^{1/a}$, $f_k(u) := 1-\eta_k(u)$, $k=1$ получим, что при некоторой постоянной δ $(0<\delta\leqslant 1)$ для $S(A;X^{\frac{1}{a}})$ имеет место следующая оценка снизу:

$$S(A;X^{\frac{1}{a}}) \geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-C_1\frac{L}{\ln^{\delta}X}\right), \tag{3}$$

где $f(\alpha a) := f_1(\alpha a) > 0$, $C_1>0$,$L\geqslant 1$.

Для любого действительного числа ξ, $\xi>1$, удовлетворяющего неравенствам $\frac{1}{C_2} \leqslant a\dfrac{\ln\xi^2}{\ln X} \leqslant \alpha a - 1$, для всех простых чисел p из интервала $[X^{\frac{1}{a}};X^{\frac{c}{a}})$ при $z = X^{1/a}$, $k=1$ из теоремы B при $k=1$ и $F(u) := F_1(u)$ получим, что для $S(A_p;X^{\frac{1}{a}})$ имеет место следующая оценка сверху:

$$S(A_p;X^{\frac{1}{a}}) \leqslant \frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(F\left(a\frac{\ln\xi^2}{\ln X}\right)+C_3\frac{L}{\ln^{\delta}\xi}\right)+$$

$$+C_4\sum_{\substack{d<\xi^2\\ d|P(X^{\frac{1}{a}})}}3^{\nu(d)}|R(X,pd)|, \tag{4}$$

где для $u>0$ функция $F(u)$ является неотрицательной, убывающей и непрерывной, удовлетворяющей условию: $F(u_1)-F(u_2) \leqslant C_0\frac{u_2-u_1}{u_1}$, $\frac{1}{C_2} \leqslant u_1 < u_2$, $C_0>0$, $C_2>0, C_3>0, C_4>0$. Будем считать, что $X>C_6$, где C_6 – достаточно большое число. Выберем ξ^2 с учетом третьего условия на A: $\xi^2 = \dfrac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0}X}$.

Неравенство (4) можно применять с ξ^2/p вместо ξ^2. Действительно, при $p < X^{\frac{c}{a}}$ верно неравенство $\dfrac{\xi^2}{p} \geqslant \dfrac{X^{\alpha-\frac{c}{a}}}{\ln^{C_0} X}$. А так как $c < \alpha a$, то $\alpha - \dfrac{c}{a} > 0$. Тогда получим, что

$$a\frac{\ln(\xi^2/p)}{\ln X} \geqslant \frac{(\alpha-(c/a))\ln X - C_0\ln\ln X}{\ln X^{\frac{1}{a}}} = (\alpha a - c) - aC_0\frac{\ln\ln X}{\ln X} \geqslant \frac{1}{C_2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{\xi^2}{p} \leqslant \dfrac{X^{\alpha-\frac{1}{a}}}{\ln^{C_0} X}$, поэтому

$$a\frac{\ln(\xi^2/p)}{\ln X} \leqslant \frac{(\alpha-(1/a))\ln X - C_0\ln\ln X}{\ln X^{\frac{1}{a}}} \leqslant \alpha a - 1.$$

Таким образом, неравенства $\dfrac{1}{C_2} \leqslant a\dfrac{\ln\xi^2}{\ln X} \leqslant \alpha a - 1$ выполнены, поэтому неравенство (4) можно применить с (ξ^2/p).

Проведем еще замену ξ^2 на X^α в аргументе функции F. Учитывая условие для $F(u)$ и неравенство $\dfrac{\xi^2}{p} \geqslant \dfrac{X^{\alpha-c/a}}{\ln^{C_0} X}$, получим ($C_5 > 0$)

$$\Delta F = F\left(\frac{\ln(\xi^2/p)}{\ln X^{\frac{1}{a}}}\right) - F\left(\frac{\ln(X^\alpha/p)}{\ln X^{\frac{1}{a}}}\right) \leqslant C_5\frac{\ln(X^\alpha/p) - \ln(\xi^2/p)}{\ln(\xi^2/p)} = C_5\frac{\ln X^\alpha - \ln\xi^2}{\ln(\xi^2/p)}.$$

А так как из определения ξ^2 следует, что $X^\alpha/\xi^2 = \ln^{C_0} X$, то при $C_0 > 0, C_7 > 0$

$$\Delta F \leqslant C_0\frac{C_0\ln\ln X}{\ln(\xi^2/p)} \leqslant C_7\frac{\ln\ln X}{\ln X}.$$

Теорема D. *Пусть $\omega(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая второму условию на A, p – простое число, $\omega(p) < p$ для всех p, $z \geqslant 2$. Тогда имеет место оценка:*

$$\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B_1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

где B_1 – некоторая постоянная, $L \geqslant 1$.

Следствие 1.

$$\sum_{z<p\leqslant z^h}\frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right), \qquad \prod_{z<p\leqslant z^h}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{C}{h}\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, C – постоянная, $C > 0$, $L \geqslant 1$.

Следствие 2.

$$\sum_{\substack{p\leqslant z\\ p\,\|q}}\frac{\omega(p)}{p} = \ln\ln z + B_1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right), \qquad \sum_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|q}}\frac{\omega(p)}{p} = \ln h + O\left(\frac{L}{\ln z}\right),$$

$$\prod_{\substack{z<p\leqslant z^h\\ p\,\|q}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{C_1}{h}\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где $h > 1$, $q < z$, B_1, C_1 – постоянные, $B_1 > 0$,$C_1 > 0$, $L \geqslant 1$.

Следствие 3. *При* $2 \leqslant u \leqslant v$, $C_2'' > 0$

$$\sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \leqslant \ln \frac{\ln v}{\ln u} + \frac{C_2''}{\ln u}.$$

Доказательство теоремы D и следствий 1–3 приведено в работе [3] (глава 1, лемма 1.2.1).

Теорема E. *Пусть* A *– конечная последовательность целых чисел,* $T(X)$ *определено равенством (1), выполнено пятое условие на* A *и* $a,b,c,g' \in \mathbf{R}$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$, $1 \leqslant b \leqslant c \leqslant a$, $g' + 1 \leqslant a \leqslant 2g' + 2$, $a - c \leqslant g'$, $k = 1$. *Тогда имеет место неравенство:*

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant S(A; X^{\frac{1}{a}}) - T(X) - R,$$

где R *– число элементов из* A*, делящихся на квадрат простого числа* p *из интервала* $X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$, M определено в пятом условии на A.

Теорема E доказана в работе [3] (глава 1, теорема 1.1.1)

Лемма A. *Пусть для* $\omega(p)$ *выполнены первые два условия на* A, $2 \leqslant u \leqslant v$ *и* $W(z) := \prod_{p<z}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$1). \ \frac{W(u)}{W(v)} \leqslant \left(\frac{\ln v}{\ln u}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln u}\right)\right) = O\left(\frac{\ln v}{\ln u}\right).$$

$$2). \ \frac{1}{W(v)} = O(\ln v).$$

Доказательство леммы A приведено в работе [4] (глава 2, §3, лемма 2.3, оценки (3.5) и (3.6) при $k = 1$.)

Лемма B. *Пусть для* $\omega(p)$ *выполнены первые два условия на* A *и* $2 \leqslant u \leqslant v$, $C_2 > 0$, $L \geqslant 1$. *Тогда имеют место неравенства:*

$$-\frac{L}{\ln u} \leqslant \sum_{u \leqslant p \leqslant v} \frac{\omega(p)}{p} - \ln \frac{\ln v}{\ln u} \leqslant \frac{C_2}{\ln u}.$$

Доказательство леммы B приведено в работе [4] (глава 5, §2, лемма 5.2, неравенства (2.1) при $k = 1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Преобразуем отдельно слагаемые суммы $T(X)$, определенной равенством (1). При этом будем применять неравенство (3).

$$1) \ J_1(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} \left(\frac{\omega(p)}{p} X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(F(a\frac{\ln\frac{\xi^2}{p}}{\ln X}) + C_3 \frac{L}{\ln^{\delta}\frac{\xi}{\sqrt{p}}}\right) + \right.$$

$$\left. + C_4 \sum_{\substack{d < \frac{\xi^2}{p} \\ d | P(X^{1/a})}} 3^{\nu(d)} |R(X,pd)| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\Bigg(\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\frac{\omega(p)}{p}F(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{p}}{\ln X})+C_{15}\frac{L}{\ln^{\delta}X}\Bigg),$$

где C_3, C_4, C_{15} – положительные постоянные, $L\geqslant 1$. Учитывая, что

$$\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<v}\frac{\omega(p)}{p}=\ln\frac{\ln v}{\ln X^{\frac{1}{a}}}+O\Bigg(\frac{C_{16}L}{\ln X}\Bigg),\quad X^{\frac{1}{a}}\leqslant v\leqslant X^{\frac{a-1}{g'a}},$$

получим:

$$\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\frac{\omega(p)}{p}F\Bigg(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{p}}{\ln X}\Bigg)=\Bigg(\ln\frac{a-1}{g'}+O\Bigg(\frac{C_{16}L}{\ln X}\Bigg)\Bigg)\times$$

$$\times F\Bigg(a\frac{\ln(X^{\alpha}/X^{(a-1)/(g'a)})}{\ln X}\Bigg)-$$

$$-\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}\Bigg(\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<v}\frac{\omega(p)}{p}\Bigg)d\Bigg(F\Bigg(a\frac{\ln(X^{\alpha}/v)}{\ln X}\Bigg)\Bigg)=$$

$$=\ln\frac{a-1}{g'}F\Bigg(\frac{a\ln(X^{\alpha}/X^{(a-1)/(g'a)})}{\ln X}\Bigg)+O\Bigg(\frac{C_{17}L}{\ln X}\Bigg)-$$

$$-\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}\ln\frac{\ln v}{\ln X^{\frac{1}{a}}}d\Bigg(F\Bigg(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X}\Bigg)\Bigg)=\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}F\Bigg(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X}\Bigg)\frac{dv}{v\ln v}+O\Bigg(\frac{C_{17}L}{\ln X}\Bigg),$$

где C_{16}, C_{17}, C_{18} – положительные постоянные. Следовательно,

$$J_1(X)\leqslant\frac{1}{2}X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\Bigg(\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}F\Bigg(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X}\Bigg)\frac{dv}{v\ln v}+\frac{C_{18}L}{\ln^{\delta}X}\Bigg).$$

Сделаем замену: $z=a\ln\frac{X^{\alpha}}{v}/\ln X$, тогда $dv=-v\ln X^{\frac{1}{a}}dz$,

$$\frac{\ln X^{\frac{1}{a}}}{\ln v}=\frac{\ln X^{\frac{1}{a}}}{\ln X^{\alpha}-\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}=\frac{1}{\alpha a-z},\ X^{\frac{\alpha a-1}{g'a}}\leqslant X^{\frac{a-1}{g'a}},$$

$$\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}F\Bigg(a\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X}\Bigg)\frac{dv}{v\ln v}\leqslant\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g}}^{\alpha a-1}F(z)\frac{dz}{\alpha a-z}.$$

Таким образом,

$$J_1(X)\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\Bigg(\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{1}{2}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{C_{19}L}{\ln^{\delta}X}\Bigg),\qquad(5)$$

где C_{19} – положительная постоянная, $L \geqslant 1$.

$$2)\ J_2(X) := (c-b) \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \leqslant$$

$$\leqslant (c-b) \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(\frac{\omega(p)}{p} X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(F\left(a \frac{\ln \frac{\xi^2}{p}}{\ln X} \right) + C_3 \frac{L}{\ln^{\delta} \frac{\xi}{\sqrt{p}}} \right) + \right.$$

$$\left. + C_4 \sum_{\substack{d < \xi^2/p \\ d | P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)} |R(X,pd)| \right) \leqslant$$

$$\leqslant (c-b) X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a'}}} \frac{\omega(p)}{p} F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{p}}{\ln X} \right) + C_{15} \frac{L}{\ln^{\delta} X} \right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} = \ln \frac{\ln v}{\ln X^{\frac{1}{a}}} + O\left(\frac{C_{16} L}{\ln X} \right),\ X^{\frac{1}{a}} \leqslant v \leqslant X^{\frac{a-g'}{a}},$$

получим, что

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} = \ln \frac{\ln v}{\ln X^{\frac{a-1}{g'a}}} + O\left(\frac{C_{16} L}{\ln X} \right),\ X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant v \leqslant X^{\frac{a-g'}{a}}.$$

Поэтому

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \frac{\omega(p)}{p} F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{p}}{\ln X} \right) =$$

$$= \left(\ln \frac{g'(a-g')}{a-1} + O\left(\frac{C_{16} L}{\ln X} \right) \right) F\left(a \frac{\ln (X^{\alpha}/X^{(a-g)/a})}{\ln X} \right) -$$

$$- \int_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{\frac{a-g'}{a}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} d\left(F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X} \right) \right) \right) =$$

$$= \ln \frac{g'(a-g')}{a-1} F\left(a \frac{\ln (X^{\alpha}/X^{(a-g)/a})}{\ln X} \right) + O\left(\frac{C_{17} L}{\ln X} \right) -$$

$$- \int_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{\frac{a-g'}{a}}} \ln \frac{\ln v}{\ln X^{\frac{a-1}{g'a}}} d\left(F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X} \right) \right) = \int_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{\frac{a-g'}{a}} F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X} \right) \frac{dv}{v \ln v} + O\left(\frac{C_{17} L}{\ln X} \right).$$

Следовательно,

$$J_2(X) \leqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left((c-b) \times \int_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{\frac{a-g'}{a}} F\left(a \frac{\ln \frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln X} \right) \frac{dv}{v \ln v} + \frac{C_{18} L}{\ln^{\delta} X} \right).$$

Сделаем замену: $z = a\ln\frac{X^\alpha}{v}/\ln X$, тогда $dv = -v\ln X^{\frac{1}{a}}dz$,

$$\frac{\ln X^{\frac{1}{a}}}{\ln v} = \frac{\ln X^{\frac{1}{a}}}{\ln X^\alpha - \ln\frac{X^\alpha}{v}} = \frac{1}{\alpha a - z}, \quad X^{\frac{\alpha a-1}{g'a}} \leqslant X^{\frac{a-1}{g'a}},$$

тогда

$$\int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{\frac{a-g'}{a}}} F\left(a\frac{\ln\frac{X^\alpha}{v}}{\ln X}\right)\frac{dv}{v\ln v} \leqslant \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} F(z)\frac{dz}{\alpha a - z}.$$

Таким образом, ($C_{19} > 0, L \geqslant 1$)

$$J_2(X) \leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left((c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{C_{19}L}{\ln^\delta X}\right). \tag{6}$$

$$3)\ J_3(X) := \sum_{X^{1-\frac{g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\left(\frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(F\left(a\frac{\ln\frac{\xi^2}{p}}{\ln X}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_3\frac{L}{\ln^\delta\frac{\xi}{\sqrt{p}}}\right) + C_4\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\ d|P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)}|R(X,pd)|\right).$$

Учитывая, что $\Delta F \leqslant C_7\dfrac{\ln\ln X}{\ln X}$, получим:

$$J_3(X) \leqslant \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\left(\frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(F\left(a\frac{\ln\frac{X^\alpha}{p}}{\ln X}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_7\frac{\ln\ln X}{\ln X} + C_3\frac{L}{\ln^\delta\frac{\xi}{\sqrt{p}}}\right) + C_4\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\ d|P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)}|R(X,pd)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\left(\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}F\left(a\frac{\ln\frac{X^\alpha}{p}}{\ln X}\right)+\right.$$

$$\left.+C_8\frac{\omega(p)}{p}\frac{L}{\ln^\delta X}\right) + C_4\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\ \sum_{\substack{d<\xi^2/p\\ d|P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)}|R(X,pd)|,$$

C_3, C_4, C_7 – положительные постоянные, $L \geqslant 1$. Применим неравенство

$$\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}}\leqslant p< X^{\frac{c}{a}}}\frac{\omega(p)}{p} \leqslant \ln\frac{c}{a-g'} + \frac{C_2}{\ln 2},$$

которое следует из следствия 3 теоремы D, получим

$$J_3(X) \leqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\Bigg(\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p} F\left(a\frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X}\right) +$$

$$+ C_9 \frac{L}{\ln^\delta X}\Bigg) + C_4 \sum_{n<\xi^2} \mu^2(n) 3^{\nu(n)} |R(X,n)|,$$

где C_4, C_9 – положительные постоянные. Применим теперь третье условие на A и второе равенство леммы A, согласно которому

$$\frac{1}{W(v)} = O(\ln v),$$

тогда получим

$$J_3(X) \leqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}})\Bigg(\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p} F\left(a\frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X}\right) + \frac{C_{10} L}{\ln^\delta X}\Bigg),$$

$C_{10} > 0, L \geqslant 1$. При переходе в правой части полученного неравенства от суммы к интегралу применим неравенства леммы B, согласно которой $(C > 0, L \geqslant 1)$

$$-\frac{L}{\ln u} \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} - \ln\frac{\ln v}{\ln u} \leqslant \frac{C}{\ln u}.$$

Из этого неравенства и второго условия на A следует, что

$$\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < v} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p} = c \ln \frac{\ln v}{\ln X^{\frac{a-g'}{a}}} - \frac{\ln v}{\ln X^{\frac{1}{a}}} + (a - g') + O\left(\frac{C_{11} L}{\ln X}\right)$$

для $X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant v \leqslant X^{\frac{c}{a}}$, $C_{11} > 0$.

Введем обозначения. Если $X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant v \leqslant X^{\frac{c}{a}}$, то

$$D(v) := \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < v} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}, \quad E(v) := F\left(a\frac{\ln \frac{X^\alpha}{v}}{\ln X}\right).$$

Применим теперь лемму Абеля о частном суммировании:

$$\sum_{a \leqslant n < b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x) f'(x) dx + C(b) f(b),$$

получим:

$$\sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p} F\left(a\frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X}\right) =$$

$$= \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p} E(p) =$$

$$= \left(c\ln\frac{c}{a-g'} - c + a - g' + O\left(\frac{C_{12}L}{\ln X}\right)\right)E(X^{\frac{c}{a}}) - \int\limits_{X^{\frac{a-g'}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} D(v)d(E(v)) =$$

$$= \left(c\ln\frac{c}{a-g'} - c + a - g'\right)E(X^{\frac{c}{a}}) + O\left(\frac{C_{13}L}{\ln X}\right) -$$

$$- \int\limits_{X^{\frac{a-g'}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} \left(c\ln\frac{\ln v}{\ln X^{(a-g')/a}} - \frac{\ln v}{\ln X^{1/a}} + a - g'\right)d\,E(v),$$

где $C_{12} > 0, C_{13} > 0,\ L \geqslant 1$. Учитывая формулу интегрирования по частям, получим

$$J_3(X) \leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(\int\limits_{X^{\frac{a-g'}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} E(v)\left(c - a\frac{\ln v}{\ln X}\right)\frac{dv}{v\ln v} + O\left(\frac{C_{13}L}{\ln X}\right) + \frac{C_{10}L}{\ln^{\delta} X}\right).$$

Сделаем замену переменной: $z = \ln\frac{X^{\alpha}}{v}/\ln X^{\frac{1}{a}}$, тогда $E(v) = F(z)$, $v\ln X^{\frac{1}{a}}dz = -dv$,

$$\left(c - a\frac{\ln v}{\ln X}\right)\frac{1}{\ln v} = \frac{\ln\frac{X^{c/a}}{v}}{\ln X^{1/a}}\frac{1}{\ln v} = \frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v} - \ln X^{\alpha-\frac{c}{a}}}{\ln X^{\frac{1}{a}}(\ln X^{\alpha} - \ln\frac{X^{\alpha}}{v})} =$$

$$= \frac{z-(\alpha a - c)}{\ln X^{\frac{1}{a}}(\alpha a - z)}, \qquad X^{\frac{\alpha a - g'}{a}} \leqslant X^{\frac{a-g'}{a}},$$

следовательно,

$$\int\limits_{X^{\frac{a-g'}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} E(v)\left(c - a\frac{\ln v}{\ln X}\right)\frac{dv}{v\ln v} \leqslant \int\limits_{g'}^{\alpha a - c} F(z)\frac{(z-(\alpha a-c))}{\ln X^{\frac{1}{a}}(\alpha a - z)}\times$$

$$\times\frac{(-dz)v\ln X^{\frac{1}{a}}}{v} = \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z)\frac{z-(\alpha a - c)}{\alpha a - z}dz.$$

Таким образом,

$$J_3(X) \leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(\int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a - z}dz + \frac{C_{14}L}{\ln^{\delta} X}\right), \tag{7}$$

где $C_{14} > 0,\ L \geqslant 1$.

$$4)\ J_4(X) := a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p < X^{1-g'z}} S(A_p; X^z)\right)dz \leqslant$$

$$\leqslant a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p < X^{1-g'z}} \left(\frac{\omega(p)}{p}X\cdot W(X^z)\left(F\left(\frac{\ln\frac{\xi^2}{p}}{\ln X^z}\right) + \right.\right.\right.$$

$$+\frac{C_3L}{\ln^\delta \frac{\xi}{\sqrt{p}}}\Bigg) + C_4 \sum_{\substack{d<\frac{\xi^2}{p}\\ d|P(X^z)}} 3^{\nu(d)}|R(X,pd)|\Bigg)\Bigg)dz \leqslant$$

$$\leqslant a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} X\cdot W(X^z)\times\Bigg(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{1-g'z}} \frac{\omega(p)}{p}F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{p}}{\ln X^z}\Bigg) + C_{20}\frac{L}{\ln^\delta X}\Bigg)dz,$$

где $C_{20}>0$, $L\geqslant 1$. Учитывая, что

$$\sum_{X^u\leqslant p<v}\frac{\omega(p)}{p} = \ln\frac{\ln v}{\ln X^u} + O\Bigg(\frac{C_{21}L}{\ln X}\Bigg),\quad X^u\leqslant v\leqslant X^{1-g'z},$$

получим ($C_{21}>0$, $L\geqslant 1$)

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{1-g'z}} \frac{\omega(p)}{p}F\Bigg(\frac{\ln(X^\alpha/p)}{\ln X^z}\Bigg) =$$

$$=\Bigg(\ln\frac{g'a(1-g'z)}{a-1} + O\Bigg(\frac{C_{21}L}{\ln X}\Bigg)\Bigg)F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{X^{1-g'z}}}{\ln X}\Bigg) - \int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{1-g'z}}\Bigg(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<v}\frac{\omega(p)}{p}\Bigg)d\Bigg(F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{v}}{\ln X^z}\Bigg)\Bigg) =$$

$$=\ln\frac{g'a(1-g'z)}{a-1}F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{X^{1-g'z}}}{\ln X^z}\Bigg) + O\Bigg(\frac{C_{21}L}{\ln X}\Bigg) -$$

$$-\int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{1-g'z}} \ln\frac{\ln v}{\ln X^{\frac{a-1}{g'a}}} d\Bigg(F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{v}}{\ln X^z}\Bigg)\Bigg) = \int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{1-g'z}} F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{v}}{\ln X^z}\Bigg)\frac{dv}{v\ln v} + O\Bigg(\frac{C_{21}L}{\ln X}\Bigg).$$

Сделаем замену: $t=\dfrac{\ln v}{\ln X}$, тогда $dv = v\ln X dt$, $\dfrac{\ln\frac{X^\alpha}{v}}{\ln X^z} = \dfrac{\ln X^\alpha - \ln v}{z\ln X} = \dfrac{\alpha - t}{z}$, поэтому

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{1-g'z}} \frac{\omega(p)}{p}F\Bigg(\frac{\ln\frac{X^\alpha}{p}}{\ln X^z}\Bigg) = \int\limits_{\frac{a-1}{g'a}}^{1-g'z} F\Bigg(\frac{\alpha-t}{z}\Bigg)\frac{dt}{t} + O\Bigg(\frac{C_{21}L}{\ln X}\Bigg),$$

следовательно, полагая $C_{22}>0$,

$$J_4(X)\leqslant aX\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag^2}} W(X^z)\Bigg(\int\limits_{\frac{a-1}{g'a}}^{1-g'z} F\Bigg(\frac{\alpha-t}{z}\Bigg)\frac{dt}{t} + \frac{C_{22}L}{\ln^\delta X}\Bigg)dz.$$

Сделаем замену: $y=\dfrac{\alpha-t}{z}$ и $s=\dfrac{\alpha}{z}$, отсюда $zdy=-dt$, $(1/\alpha)ds = (-dz)/z^2$, тогда, учитывая первое неравенство леммы А, согласно которому

$$\frac{W(u)}{W(s)}\leqslant\frac{\ln s}{\ln u}\Bigg(1+O\Bigg(\frac{1}{\ln u}\Bigg)\Bigg),\ 2\leqslant u\leqslant s,$$

получим

$$\left(\frac{\alpha a-1}{g'a}\leqslant\frac{a-1}{g'a},\quad \frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)a+1}\leqslant\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}\right):$$

$$J_4(X)\leqslant aX\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{{g'}^2a}} W(X^{\frac{1}{a}})\frac{\ln X^{\frac{1}{a}}}{\ln X^z}\times\left(\int\limits_{\frac{a-1}{g'a}}^{1-g'z} F\left(\frac{\alpha-t}{z}\right)\frac{dt}{t}+\frac{C_{22}L}{\ln^\delta X}\right)dz\leqslant$$

$$\leqslant aX\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\int\limits_{\alpha a}^{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}\frac{s}{\alpha a}\times\left(\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}s}^{g'} F(y)\frac{-dy}{s-y}+\frac{C_{22}L}{\ln^\delta X}\right)\frac{(-\alpha)ds}{s^2}.$$

Таким образом, если заменить s на v, то получим:

$$J_4(X)\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\times\left(\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+\frac{C_{22}L}{\ln^\delta X}\right),\tag{8}$$

где $C_{22}>0, L\geqslant 1$.

$$5)\ J_5(X):=\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S_p\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\left(\frac{\omega(p)}{p}X\cdot W\left(\left(\frac{X}{p}\right)^{1/g'}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(F\left(g'\frac{\ln{(X^\alpha/p)}}{\ln{(X/p)}}\right)+C_3\frac{L}{\ln^\delta\frac{\xi}{\sqrt{p}}}\right)+C_4\sum_{\substack{d<\xi^2/p\\ d|P(X^{1/a})}}3^{\nu(d)}|R(X,pd)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{ga'}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}\frac{\ln X^{1/a}}{\ln(X/p)^{1/g'}}\times\right.$$

$$\left.\times F\left(g'\frac{\ln\frac{X^\alpha}{p}}{\ln{(X/p)}}\right)+C_{23}\frac{L}{\ln^\delta X}\right),$$

где $C_{23}>0$, $L\geqslant 1$. Учитывая, что

$$\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<v}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}=\frac{b+1}{2}\ln\frac{\ln v}{\ln X^{1/a}}-\frac{\ln v}{\ln X^{1/a}}+1+O\left(\frac{C_{24}L}{\ln X}\right)$$

при $X^{\frac{1}{a}}\leqslant v\leqslant X^{\frac{a-1}{g'a}}$, $C_{24}>0$, $L\geqslant 1$, получим

$$\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}\frac{1}{\ln\frac{X}{p}}F\left(g'\frac{\ln{(X^\alpha/p)}}{\ln{(X/p)}}\right)=$$

$$= \left(\frac{b+1}{2}\ln\frac{a-1}{g'} - \frac{a-1}{g'} + 1 + O\left(\frac{C_{25}L}{\ln X}\right)\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\ln X^{1-(a-1)/(g'a)}}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/X^{(a-1)/(g'a)})}{\ln X^{1-(a-1)/(g'a)}}\right)-$$

$$-\int\limits_{X^{1/a}}^{X^{(a-1)/(g'a)}}\left(\sum_{X^{1/a}\leqslant p<v}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}\right)\cdot d\left(\frac{1}{\ln\frac{X}{v}}F\left(g'\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln\frac{X}{v}}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{b+1}{2}\ln\frac{a-1}{g'} - \frac{a-g'-1}{g'}\right)\frac{1}{\ln X^{\frac{(g'-1)a+1}{g'a}}}\cdot F\left(g'\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{X^{\frac{a-1}{g'a}}}}{\ln X^{\frac{g'^2a+1}{g'a}}}\right) + O\left(\frac{C_{26}L}{\ln X}\right) -$$

$$-\int\limits_{X^{\frac{1}{a}}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}\ln\frac{\ln v}{\ln X^{1/a}} - \frac{\ln v}{\ln X^{1/a}} + 1\right)\cdot d\left(\frac{1}{\ln\frac{X}{v}}F\left(g'\frac{\ln\frac{X^{\alpha}}{v}}{\ln\frac{X}{v}}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{X^{1/a}}^{X^{\frac{a-1}{g'a}}}\frac{1}{\ln\frac{X}{v}}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/v)}{\ln(X/v)}\right)\left(\frac{b+1}{2} - \frac{\ln v}{\ln X^{1/a}}\right)\frac{dv}{v\ln v} + O\left(\frac{C_{26}L}{\ln X}\right),$$

где $C_{25} > 0$, $C_{26} > 0$, $L \geqslant 1$. Сделаем замену: $z = \dfrac{\ln(X/v)}{\ln v} = \dfrac{\ln X}{\ln v} - 1$, отсюда получим $\ln v = (\ln X)/(z+1)$,

$$dv = \frac{-v\ln^2 v dz}{\ln X},\ \frac{b+1}{2} - \frac{\ln v}{\ln X^{1/a}} = \frac{(b+1)z-(2a-b-1)}{2(z+1)},$$

следовательно,

$$\sum_{X^{1/a}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{\omega(p)}{p}\frac{\ln X^{1/a}}{\ln(X/p)^{1/g'}}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/p)}{\ln(X/p)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{g'}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz + O\left(\frac{C_{26}L}{\ln X}\right).$$

Таким образом,

$$J_5(X) \leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\times$$

$$\times\left(\frac{g'}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz + \frac{C_{27}L}{\ln^{\delta}X}\right), \tag{9}$$

где $C_{27} > 0$, $L \geqslant 1$.

$$6)\ J_6(X) := \frac{1}{g'}\times$$

$$\times\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}}\left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{g'} \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\omega(p)}{p} X \cdot W\left((X/p)^{1/g'} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(F\left(g' \frac{\ln(X^\alpha/p)}{\ln(X/p)} \right) + C_3 \frac{L}{\ln^\delta \frac{\xi}{\sqrt{p}}} \right) + C_4 \sum_{\substack{d<\xi^2/p \\ d|P(X^{1/a})}} 3^{\nu(d)} |R(X,pd)| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{g} X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\omega(p)}{p} \frac{\ln X^{1/a}}{\ln(X/p)^{1/g'}} F\left(g' \frac{\ln(X^\alpha/p)}{\ln(X/p)} \right) + C_{23} \frac{L}{\ln^\delta X} \right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{X^u \leqslant p < v} \left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X} \right) \frac{\omega(p)}{p} = (g'b - a + g') \ln \frac{\ln v}{\ln X^u} -$$

$$- \frac{\ln v}{\ln X^{1/(g'-1)a}} + (g'-1)au + O\left(\frac{C_{24} L}{\ln X} \right)$$

при $X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}$, получим

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X} \right) \times \frac{\omega(p)}{p} \frac{1}{\ln(X/p)} F\left(g \frac{\ln(X^\alpha/p)}{\ln(X/p)} \right) =$$

$$= \left((g'b - a + g') \ln \frac{a(a-g')}{a-1} - (g'-1)(a-g') + \right.$$

$$\left. + (a-1)(g'-1)/g + O\left(\frac{C_{25} L}{\ln X} \right) \right) \times \frac{1}{\ln X^{1-(a-g')/a}} F\left(g' \frac{\ln(X^\alpha / X^{(a-g')/a})}{\ln X^{1-(a-g')/a}} \right) -$$

$$- \int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < v} (g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}) \frac{\omega(p)}{p} \times \right.$$

$$\left. \times d\left(\frac{1}{\ln(X/v)} F\left(g' \frac{\ln(X^\alpha/v)}{\ln(X/v)} \right) \right) \right) =$$

$$= \left((g'b - a + g') \ln \frac{g'(a-g')}{a-1} - (g'-1)^2(a-1)/g' \right) \frac{1}{\ln X^{1-(a-g')/a}} \times$$

$$\times F\left(g' \frac{\ln(X^\alpha / X^{(a-g')/a})}{\ln X^{g'/a}} \right) + O\left(\frac{C_{26} L}{\ln X} \right) -$$

$$- \int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{\frac{a-g'}{a}}} \left((g'b - a + g') \ln \frac{\ln v}{\ln X^{1/a}} - \frac{\ln v}{\ln X^{1/(g'-1)a}} + (a-1)(g'-1)/g' \right) \times$$

$$\times d\left(\frac{1}{\ln(X/v)}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/v)}{\ln(X/v)}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{X^{\frac{a-1}{g'a}}}^{X^{\frac{a-g'}{a}}} \frac{1}{\ln(X/v)}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/v)}{\ln(X/v)}\right)\left(g'b-a+g'-\frac{\ln v}{\ln X^{1/(g'-1)a}}\right)\times$$

$$\times\frac{dv}{v\ln v}+O\left(\frac{C_{26}L}{\ln X}\right).$$

Сделаем замену: $z=\frac{\ln(X/v)}{\ln v}=\frac{\ln X}{\ln v}-1$, отсюда

$$\ln v=\frac{\ln X}{z+1},\ dv=\frac{-v\ln^2 vdz}{\ln X},$$

$$g'b-a+g'-\frac{\ln v}{\ln X^{1/(g'-1)a}}=g'b-a+g'-\frac{\ln X}{(z+1)\ln X^{1/(g'-1)a}}=$$

$$=g'\frac{(b+1-(a/g'))z-(a-b-1)}{z+1},$$

следовательно,

$$\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{\frac{a-g'}{a}}}(g'b-a+g'-(g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X})\frac{\omega(p)}{p}\cdot\frac{\ln X^{1/a}}{\ln(X/p)^{1/g'}}F\left(g'\frac{\ln(X^{\alpha}/p)}{\ln(X/p)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{{g'}^2}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}\frac{(b+1-(\alpha a/g'))z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}\times F(g')dz+O\left(\frac{C_{26}L}{\ln X}\right).$$

Таким образом,

$$J_6(X)\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\times$$

$$\times\left(\frac{g'}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}\frac{(b+1-(\alpha a/g'))z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}\times F(g')dz+\frac{C_{27}L}{\ln^{\delta}X}\right). \qquad (10)$$

Учитывая теперь неравенства (5) – (10), получим для $T(X)$:

$$T(X)\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})(B(\alpha,a,b,c,g')+\frac{C_{28}L}{\ln^{\delta}X}),$$

где $C_{28}>0$, $L\geqslant 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (2).

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

1. Применим оценку (3) и теорему 1, получим:

$$S(X):=S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)\geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-\frac{C_1L}{\ln^{\delta}X}\right)-X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\times$$

$$\times\left(B(\alpha,a,b,c,g')+\frac{C_{28}L}{\ln^{\delta}X}\right)=X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\biggl(f(\alpha a)-B(\alpha,a,b,c,g')-$$

$$-\frac{L}{\ln^{\delta}X}(C_1-C_{28})\biggr)\geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-B(\alpha a,a,b,c,g')-\frac{C_{29}L}{\ln^{\delta}X}\right),$$

где $C_1>0$, $C_{28}>0$, $C_{29}>0$, $L\geqslant 1$. Таким образом,

$$S(X):=S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)\geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-B(\alpha a,a,b,c,g')-\frac{C_{29}L}{\ln^{\delta}X}\right).$$

2. Применим теорему Е, тогда получим, что

$$\sum_{\substack{a_n\in A\\ \nu(a_n)\leqslant r}}1\geqslant S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)-R\geqslant$$

$$\geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-B(\alpha,a,b,c,g')-\frac{C_{29}L}{\ln^{\delta}X}\right)-R,$$

где R – число элементов последовательности A, делящихся на квадрат простого числа из интервала $[X^{\frac{1}{a}};X^{\frac{c}{a}})$, $C_{29}>0$, $L\geqslant 1$, $0<\delta<1$.

3. Оценим R следующим образом:

$$R\leqslant\sum_{X1/a\leqslant p<X^{c/a}}\ \sum_{\substack{a_n\in A\\ a_n\equiv\pmod{p^2}}}1\leqslant C_4\left(\frac{X\ln X}{X^{\frac{1}{a}}}+X^{\frac{c}{a}}\right)\leqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\frac{C_{30}L}{\ln X}$$

(воспользовались четвертым условием на последовательность А, $C_{30}>0$, $L\geqslant 1$).

Таким образом, имеет место оценка снизу:

$$\sum_{\substack{a_n\in A\\ \nu(a_n)\leqslant r}}1\geqslant X\cdot W(X^{\frac{1}{a}})\left(f(\alpha a)-B(\alpha,a,b,c,g')-\frac{C_{31}L}{\ln^{\delta}X}\right),$$

где $C_{31}>0$, $L\geqslant 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (2).

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Выберем функции $f(z)$ и $F(z)$. Рассмотрим функции $\eta(u)$ и $\sigma(u)$, которые определяются следующим образом:

$$\sigma(u)=\frac{ue^{-\gamma}}{2},\quad 0\leqslant u\leqslant 2,$$

где γ – постоянная Эйлера, $u\sigma'(u)=\sigma(u)-\sigma(u-2)$, $u>2$, причем $\sigma(u)$ непрерывна при $u=2$,

$$\eta(u)=\frac{1}{u}\int\limits_{u}^{\infty}\bigl(\sigma^{-1}(t-1)-1\bigr)\,dt,\quad u>1.$$

Свойства функций приведены в работе [4] (главы 6 и 7). Отметим некоторые из них. 1) $\lim\limits_{u\to\infty}\sigma(u)=1$, 2) $0\leqslant\sigma(u)\leqslant 1$, $u\geqslant 0$, 3) $\sigma'(u)>0$, $u>0$ (при $k=1$ индекс опустили).

Условие $f(\alpha a)>0$ означает условие $\alpha a>2$, следовательно, получим условие на a: $a>2/\alpha$. Четвертое условие на последовательность A может быть реализовано по теореме С при $k=1$ с

$$F(t):=\sigma^{-1}(t),\ \sigma(t):=\sigma_1(t).$$

Кроме того, при таком выборе $F(t)$ выполнено условие на $F(t)$ в силу перечисленных выше свойств функции $\sigma(u)$. Согласно теоремам А и С, величина δ может быть любой положительной постоянной, меньшей 1, а теоремы доказаны методом решета Сельберга.

В дальнейшем вместо второго условия на последовательность A будем использовать другое условие:

$$-C_2' \ln\ln 3X \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leqslant C_2',$$

где $2 \leqslant u \leqslant v, C_2' > 0$.

Из теоремы 2, учитывая это условие и выбор функций $f(z)$ и $F(z)$:

$$f(\alpha a) := 1 - \eta(\alpha a),\ F(z) := \sigma^{-1}(z),$$

получим оценку снизу:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leqslant r}} 1 \geqslant X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(f(\alpha a) - B(\alpha,a,b,c,g') - \frac{C_{28} L}{\ln^{1/2} X} \right),$$

где $W(z) := \prod\limits_{p<z}(1 - \frac{\omega(p)}{p})$, $\delta = 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $C_{28} > 0$, $L \geqslant 1$, $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством(2).

Теорема 3 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [5] получена оценка снизу с помощью метода решета Бруна с весами Бухштаба (1967 г.), где параметры решета α,a,b,c,d, функции решета $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$.

В работе [4] (теорема 9.1) получена оценка снизу с помощью метода решета Сельберга с весами Рихерта для случая, когда выполнено условие на параметры: $\alpha a \leqslant 4$, это существенно ограничивает возможности в выборе параметров a и c в методе весового решета (α,a,c – параметры решета и функции решета $f(z)$ и $F(z)$).

В работе [6] (теорема 2) получена оценка снизу с помощью метода решета Сельберга с весами Бухштаба (1967 г.) в усовершенствованном виде, а именно, в непрерывной форме, полученной Лабордэ (1979 г., веса Бухштаба–Лабордэ). Параметры решета α,a,b,c и функции решета $f(z)$ и $F(z)$. Функции решета впервые ввел А. А. Бухштаб [7], [8]. Это признано (см. [4], глава 8, с. 237 и [9], глава 4, с. 167). Учитывая соотношения между функциями $\Lambda(z)$ и $F(z)$, получим, что веса Бухштаба–Лабордэ можно получить из весов Бухштаба (1967 г.) при $d = 1$. А веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба–Лабордэ и получаются из них при $b = 1$.

Выполнив преобразования весов Бухштаба (1967 г.) и весов Бухштаба (1985 г.) получим, что веса Бухштаба (1967 г.) можно получить из весов Бухштаба (1985 г.) при замене параметра g' на $\frac{\alpha a - 1}{d}$. Параметры во вторых весах: α,a,b,c,g', функции решета $f(z)$ и $F(z)$. Веса Рихерта являются частным случаем и весов Бухштаба (1985 г.) и получаются из них при $g' = \alpha a - 1$. Подробное сравнение весов приведено в работе [3].

Отметим что в работах [10] и [11] оценка снизу получена в другом виде.

Таким образом, доказанная авторами теорема 3 позволяет получить преимущества при выборе параметров в методе весового решета в сравнении с другими весами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб, А. А. Новый тип весового решета / А. А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

2. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова. — М. : Изд–во МПГУ «Прометей», 2002. — 268 с.

3. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 332 с.

4. Halberstam, H. Sieve methods / H. Halberstam, H.–E. Richert. — London : Acad. Press, 1974. — 364 p.

5. Бухштаб, А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // УМН. — 1967. — Т. 22, № 3 (135). — С. 199–226.

6. Laborde, M. Buchstabs sifting weights / M. Laborde // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250–257.

7. Бухштаб, А. А. Асимптотическая оценка одной общей теоретикочисловой функции / А. А. Бухштаб // Матем. сб. — 1937. — Т. 2(44), № 6. — С. 1239–1246.

8. Бухштаб, А. А. Новые исследования по методу эратосфенова решета : дис. ... д-ра физико-матем. наук : 01.01.06 / Бухштаб Александр Адольфович. — М., 1944. — 129 с.

9. Greaves, G. Sieves in number theory / G. Greaves // Ergebnisse der Mathematik. — 2001. — V. 43, № 3. — 304 p.

10. Greaves, G. A weighted sieve of Brun type / G. Greaves // Acta arith. — 1982. — V. 40. — P. 297–332.

11. Greaves, G. The weighted linear sieve and Selbergs λ^2-method / G. Greaves // Acta arith. — 1986. — V. 47. — P. 71–96.

REFERENCES

1. Bukhstab A.A. A new type of weight sieve. [Buhshtab A.A. Novyj tip vesovogo resheta]. Number theory and its applications: tez. dokl. All-Union. conf., Tbilisi, 1985, p. 22–24.

2. Vakhitova E.V. Methods of a sieve with weights of the Buchstab and their applications. [Vahitova E.V. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Moscow, 2002, 268 p.

3. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of a sieve with Buchstab weights and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Voronezh, 2014, 332 p.

4. Halberstam H., Richert H.–E. Sieve methods, London: Acad. Press, 1974, 364 p.

5. Bukhshtab A.A. Combinatorial enhancement of the sieve of eratosthenes method. [Buhshtab A.A. Kombinatornoe usilenie metoda eratosfenova resheta]. *Uspexi matematicheskix nauk — Uspexi matematicheskix nauk*, 1967, vol. 22, no. 3 (135), pp. 199–226.

6. Laborde M. Buchstabs sifting weights. Mathematika, 1979, vol. 26, pp. 250–257.

7. Bukhshtab A.A. Asymptotic estimate of one general number-theoretic function. [Buhshtab A.A. Asimptoticheskaya ocenka odnoj obshchej teoretikochislovoj funkcii]. *Matematicheskij sbornik — Matematicheskij sbornik*, 1937, vol. 2(44), no. 6, pp. 1239–1246.

8. Bukhshtab A.A. New research on the eratosthenes sieve method. [Buhshtab A.A. Novye issledovaniya po metodu eratosfenova resheta]. dis. ... d-r of physical and mathem. sciences: 01.01.06. Bukhshtab Alexander Adolphovich, Moscow, 1944, 129 p.

9. Greaves G. Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathematik, 2001, vol. 43, no. 3, 304 p.

10. Greaves G. A weighted sieve of Brun type. Acta arith., 1982, vol. 40, pp. 297–332.

11. Greaves G. The weighted linear sieve and Selbergs λ^2-method / G. Greaves // Acta arith., 1986, vol. 47, pp. 71–96.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru