

$\mathbb{J}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ К-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНТЕГРАЛОМ ХАНКЕЛЯ*

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Поступила в редакцию 10.02.2024 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя, построенных для сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром. Приведены прямое и обратное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Доказана инвариантность пространства основных функций относительно $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя, интеграл Ханкеля, пространства Шварца.

$\mathbb{J}$ -BESSEL TRANSFORM OF K-DISTRIBUTIONS GENERATED BY THE HANKEL INTEGRAL

Yu. N. Bulatov

Abstract. The work is devoted to the study of $\mathbb{J}$ -Bessel transformations constructed for the singular differential Bessel operator with a negative parameter. Direct and inverse $\mathbb{J}$ -Bessel transforms are given. The invariance of the space of basic functions under $\mathbb{J}$ -Bessel transformations is proven.

Keywords: singular differential Bessel operator, $\mathbb{J}$ -Bessel transform, Hankel integral, Schwarz spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Интегралом Ханкеля называется следующее равенство:

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(x\xi) \xi d\xi \int_0^\infty J_\nu(y\xi) f(y) y dy,$$

где J_ν — функции Бесселя первого рода, $\nu > -1/2$. Оно справедливо для функций $f \in L_2(0, \infty)$. Следующие функции

$$\mathbb{J}_\mu(x) = 2^\mu \Gamma(1 + \mu) x^\mu J_\mu(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma(1 + \mu)}{m! \Gamma(m + 1 + \mu)} \frac{x^{2m+2\mu}}{2^{2m}},$$

$$\mathbb{J}_{-\mu}(x) = 2^{-\mu} \Gamma(1 - \mu) x^\mu J_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma(1 - \mu)}{m! \Gamma(m + 1 - \mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

являются линейно независимыми решениями сингулярного уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma} \mathbb{J}_{\pm\mu}(\lambda x) + \lambda^2 \mathbb{J}_{\pm\mu}(\lambda x) = 0, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{-\gamma}{x} \frac{d}{dx}, \quad -1 < -\gamma < 0. \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00387)

© Булатов Ю. Н., 2024

в области $x \in \mathbb{R}_1^+ = \{x : x > 0\}$ [1].

ℐ-Функции Бесселя удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2\mu} \mathbb{J}_\mu(x) = 1, \quad \mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Решение $\mathbb{J}_{-\mu}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в работах [2], [3], [4].

ℐ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ ФУНКЦИЙ НА $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, $\mathbb{R}_1^+ = (0, \infty)$ будем обозначать подпространство пространства основных функций Л. Шварца [5], состоящее из четных функций по Киприянову [6].

Определение 1. Функцию, определенную на полуоси $\mathbb{R}_1^+$ будем называть четной по Киприянову, если она допускает четное продолжение по каждой координате своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

Пространство S_{ev} есть пространство бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову в $\mathbb{R}_1^+$ функций $\varphi \in C_{ev}^\infty$, для которых

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_1^+} |x^\alpha B_{-\gamma}^\beta \varphi(x)| < \infty$$

при любых натуральных α и β .

Замещая в интеграле Ханкеля функцию Бесселя первого рода функцией $\mathbb{J}_\mu$, получим равенство

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma^2(1+\mu) 2^{2\mu}} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-2\mu+1} d\xi \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) y^{-2\mu+1} f(y) dy. \quad (2)$$

В работе [1] введены следующие ℐ-преобразования Бесселя (прямое и обратное)

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx,$$

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\Gamma^2(\mu+1) 2^{2\mu}} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \hat{\varphi}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

На функциях $L_2^{-\gamma}(0, \infty)$ эти преобразования являются взаимно обратными:

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\hat{\varphi}](\xi) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\varphi](\xi) = \varphi(x), \quad (3)$$

что вытекает из формулы Фурье–Ханкеля (2).

Пусть $C_{ev,0}^\infty(\mathbb{R}_1^+) \subset S_{ev}$ множество финитных бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову функций. Ясно, что $C_{ev,0}^\infty(\mathbb{R}_1^+) \subset S_{ev}$. Из определения видно, что пространство S_{ev} инвариантно относительно В-дифференцирования и умножения на многочлены.

Следуя [7], введем систему норм:

$$|\langle \varphi \rangle|_N = \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}_1^+} |x^\alpha B_{-\gamma}^\beta \varphi(x)|,$$

где верхняя грань берется по всем $\sup_{x \in \mathbb{R}_1^+} |x^\alpha B_{-\gamma}^\beta \varphi(x)| < \infty$ и всем α и β , с β , а N пробегает все целые неотрицательные числа.

Так как основные функции φ из S_{ev} абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}_1^+$, то

$$|\hat{\varphi}| = \left| \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx \right| = C \left| \int_0^\infty J_\mu(x\xi) \varphi(x) x dx \right| \leq C \int_0^\infty |\varphi(x)| x dx < \infty.$$

В связи с этим на функциях пространства S_{ev} $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя определено.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in S_{ev}$. Тогда $\hat{\varphi} \in C_{ev}^\infty$ и имеют место следующие формулы

$$\begin{aligned} B_{-\gamma}^\alpha \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) &= \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[(-x)^{2\alpha} \varphi](\xi), \\ \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[B_{-\gamma}^\alpha \varphi](\xi) &= (-\xi)^{2\alpha} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Так как $B_{-\gamma, \xi} \mathbb{J}_\mu(x\xi) = (-x^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi)$, то первая из формул (4) достаточно просто вытекает из теоремы Лебега о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\begin{aligned} B_{-\gamma}^\alpha \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) &= B_{-\gamma, \xi}^\alpha \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \int_0^\infty B_{-\gamma, \xi}^\alpha \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_0^\infty (-x^2)^\alpha \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[(-x)^{2\alpha} \varphi](\xi). \end{aligned}$$

В результате видно, что в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя дифференцирование равносильно умножению на соответствующий полином. Но, если $\varphi \in S_{ev}$, то $x^{2\alpha} \varphi \in S_{ev}$. Следовательно, $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) \in C_{ev}^\infty$.

Докажем вторую формулу в (4). Так как $B_{-\gamma, x} \mathbb{J}_\mu(x\xi) = (-\xi^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[B_{-\gamma, x}^\alpha \varphi](\xi) &= \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) B_{-\gamma, x}^\alpha \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_0^\infty (-\xi^2)^\alpha \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \xi^{2\alpha} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = (-\xi)^{2\alpha} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Стоит также отметить, что $\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}$ переводит $x^{2\alpha} \varphi(x)$ на $(-B_{-\gamma})^\alpha \hat{\varphi}$. Докажем теперь инвариантность пространства S_{ev} относительно $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in S_{ev}$, тогда $\hat{\varphi} \in S_{ev}$.

Доказательство. Из формул (4) имеем

$$\begin{aligned} \left| \xi^{2\alpha} B_{-\gamma, x}^k \hat{\varphi} \right| &= \left| \xi^{2\alpha} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[x^{2k} \varphi](\xi) \right| = \left| \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \left[(-B_{-\gamma, x}^\alpha) \left(x^{2k} \varphi \right) \right] (\xi) \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) B_{-\gamma, x}^\alpha \left(x^{2k} \varphi(x) \right) x^{-\gamma} dx \right| \leq \int_0^\infty \left| (1+x^2) B_{-\gamma, x}^\alpha \left(x^{2k} \varphi(x) \right) \right| \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} \leq \\ &\leq \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1+x^2) \left| B_{-\gamma, x}^\alpha \left(x^{2k} \varphi(x) \right) \right| \int_0^\infty \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Представим интеграл из последнего выражения в следующем виде

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} = \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим интеграл J_1

$$J_1 \leq \int_0^1 \frac{x^{-\gamma}}{1} dx = \frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-\gamma} < \infty.$$

Теперь перейдем к J_2 , имеем

$$J_2 \leq \int_0^1 \frac{x^{-\gamma}}{x^2} dx = \int_0^1 x^{-\gamma-2} dx = \frac{x^{-\gamma-1}}{-\gamma-1} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{-\gamma-1} < \infty.$$

Тогда,

$$\sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1+x^2) \left| B_{-\gamma, x}^{\alpha} \left(x^{2k} \varphi(x) \right) \right| \leq C |\langle \varphi \rangle|_N.$$

Так как $\varphi \in S_{ev}$, то $|\langle \varphi \rangle|_{N'} < \infty$ для любого целого неотрицательного числа N' . Следовательно,

$$\left| \xi^{2\alpha} B_{-\gamma, x}^k \hat{\varphi} \right| \leq C |\langle \varphi \rangle|_{N'}$$

и, таким образом, мы доказали, что $\left| \xi^{2\alpha} B_{-\gamma, x}^k \hat{\varphi} \right| < \infty$. Из этого вытекает, что $\hat{\varphi} \in S_{ev}$. Кроме того,

$$C |\langle \varphi \rangle|_N = \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1+|x|)^{2\alpha} \left| B_{-\gamma}^k \hat{\varphi} \right| \leq C \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} |x|^{2\alpha} \left| B_{-\gamma}^k \hat{\varphi} \right|.$$

и, по предыдущему неравенству, получаем неравенство между нормами

$$\forall N \exists N' : |\langle \hat{\varphi} \rangle|_N \leq C_{N, N'} |\langle \varphi \rangle|_{N'}. \quad (5)$$

Доказательство закончено.

Отметим, что эта форма справедлива для функций определенных в $\mathbb{R}_n^+$. Напомним, что нормированные пространства Φ и $\hat{\Phi}$ называются изоморфными, если существуют взаимно однозначное соответствие $\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$ между их элементами $\varphi \in \Phi$ и $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}$, такое, что

1) $\varphi_1 \leftrightarrow \hat{\varphi}_1$ и $\varphi_2 \leftrightarrow \hat{\varphi}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \leftrightarrow \lambda_1 \hat{\varphi}_1 + \lambda_2 \hat{\varphi}_2$ для любых чисел λ_1, λ_2 .

2) Если $\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$, то существуют независимые от этих элементов константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \|\varphi\| \leq \|\hat{\varphi}\| \leq C_2 \|\varphi\|$$

Если вместо 2 выполняется равенство $\|\varphi\| = \|\hat{\varphi}\|$, то такие пространства называются изометрическими.

Следствие 1. ℑ-Преобразование Бесселя осуществляет непрерывный в обе стороны изоморфизм пространств S_{ev} .

Доказательство. Взаимно однозначное соответствие между элементами пространств S_{ev} и $\mathbb{F}_{B-\gamma}[S_{ev}]$ вытекает из формул обращения (3)

$$\mathbb{F}_{B-\gamma}^{-1} \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi] = \mathbb{F}_{B-\gamma} \mathbb{F}_{B-\gamma}^{-1}[\varphi] = \varphi.$$

Свойство **1** в определении изоморфизма нормированных пространств вытекает из линейности операции интегрирования. Непрерывность $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя вытекает из неравенства (5). И, наконец, непрерывность в обе стороны следует из связи прямого и обратного $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя, см. формулы (2) и (4).

Введем следующую весовую билинейную форму:

$$(u, \varphi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_1^+} u(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi \in S_{ev}$ и $u \in S_{ev}$, тогда

$$(\hat{u}, \varphi)_{-\gamma} = (u, \hat{\varphi})_{-\gamma}$$

Доказательство. Полагая $\varphi \in \mathcal{D}_{ev}[0, a)$ (основное пространство функций) и интегрируемой, получим

$$(\hat{u}, \varphi)_{-\gamma} = (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u], \varphi)_{-\gamma} = \int_0^\infty \int_0^\infty (\mathbb{J}_\mu(y\xi) u(y) y^{-\gamma} dy) \varphi(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Воспользуемся теоремой Фубини для изменения порядка интегрирования, тогда

$$(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u], \varphi)_{-\gamma} = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) \varphi(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi u(y) y^{-\gamma} dy = (u, \hat{\varphi})_{-\gamma}.$$

Доказательство закончено.

$\mathbb{J}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ К-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА $\mathbb{R}_1^+$

Определение 2. *K-Распределением* называется линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}_{ev}[0, a)$.

Множество всех распределений обозначается $\mathcal{D}'_{ev}[0, a)$.

Определение 3. Пространство линейных непрерывных функционалов, порожденное весовой билинейной формой $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$, над S_{ev} называется пространством распределений умеренного роста и обозначается S'_{ev} .

Легко заметить, что линейный функционал над S_{ev} принадлежит S'_{ev} только в том случае, если существуют такие индексы α и k и такая постоянная C , что выполнено неравенство

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|+|k| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}_1^+} |x^\alpha B_{-\gamma}^k \varphi(x)|, \quad \varphi \in S_{ev}.$$

Вначале отметим равенство Парсеваля.

Теорема 4. Пусть $\varphi, \psi \in S_{ev}$.

$$\int_0^\infty \hat{\varphi}(x) \psi(x) x^{-\gamma} dx = \int_0^\infty \varphi(x) \hat{\psi}(x) x^{-\gamma} dx.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему Фубини:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(xy) \varphi(y) y^{-\gamma} dy \psi(x) x^{-\gamma} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{J}_{\mu}(xy) \psi(x) x^{-\gamma} dx \int_0^{\infty} \varphi(y) y^{-\gamma} dy = \int_0^{\infty} \varphi(y) \hat{\psi}(y) y^{-\gamma} dy.$$

Определение 4. ℑ-Преобразование Бесселя К-распределений $u \in S'_{ev}$ называется функционалом $\mathbb{F}_{B-\gamma}[u]$, определяемый из равенства

$$(\mathbb{F}_{B-\gamma}[u], \varphi)_{-\gamma} = (u, \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi])_{-\gamma}. \quad (6)$$

Так как ℑ-преобразование Бесселя действует из S_{ev} в S_{ev} , то в правой части этого равенства — функционал, принадлежащий пространству распределений $u \in S'_{ev}$. Если же, при этом, этот функционал задан функцией $f \in S_{ev}$, то равенство (6) — формула Парсеваля (см. теорему 3). Это говорит о корректности введенного определения ℑ-преобразования Бесселя К-распределений $u \in S'_{ev}$.

Теорема 5. ℑ-Преобразование Бесселя непрерывно из S'_{ev} в S'_{ev} .

Доказательство. Пусть $u_k \in S'_{ev}$ и $u_k \rightarrow u$ в смысле пространства К-распределений S'_{ev} . Надо доказать, что и $\mathbb{F}_{B-\gamma}[u_k] \rightarrow \mathbb{F}_{B-\gamma}[u]$ в смысле S'_{ev} . Согласно определению 3

$$(\mathbb{F}_{B-\gamma}[u_k], \varphi)_{-\gamma} = (u_k, \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi])_{-\gamma},$$

а так как функция $\mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi] \in S_{ev}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{F}_{B-\gamma}[u_k], \varphi)_{-\gamma} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi])_{-\gamma} = (u, \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi])_{-\gamma} = (\mathbb{F}_{B-\gamma}[u], \varphi)_{-\gamma},$$

что и означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{F}_{B-\gamma}[u_k] = u$ в смысле К-распределений S'_{ev} .

Доказательство закончено.

Теорема 6. Для $u \in S'_{ev}$ справедливо следующее:

$$u(-x) = C_{\mu} \hat{u} \Leftrightarrow \mathbb{F}_{B-\gamma}^{-1} \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi] = \mathbb{F}_{B-\gamma} \mathbb{F}_{B-\gamma}^{-1}[\varphi] = \varphi.$$

Доказательство. Известно, что функционал не зависит от аргумента функции, к которой он применен. В записи функционала вида $u(x)$ аргумент x означает аргумент основной функции. Поэтому $(u(-x), \varphi) = (u, \varphi(-x))$. Из формулы обращения ℑ-преобразований Бесселя и связи прямого и обратного ℑ-преобразований Бесселя для основных функций u вытекает $u = \mathbb{F}_{B-\gamma}^{-1} \mathbb{F}_{B-\gamma}[\varphi] = C_{\mu} \hat{\varphi}(-x)$, тогда $\varphi(-x) = C_{\mu} \hat{\varphi}(x)$ и, следовательно

$$(u(-x), \varphi) = (u, \varphi(-x)) = (u, C_{\mu} \hat{\varphi}(x)).$$

Доказательство закончено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены линейно независимые решения сингулярного уравнения Бесселя, прямое и обратное ℑ-преобразования Бесселя. Доказана инвариантность пространства относительно ℑ-преобразования Бесселя. Как следствие приведено, что ℑ-преобразование Бесселя осуществляет непрерывный в обе стороны изоморфизм пространств S_{ev} . Доказаны равенство Парсеваля функций $\varphi, \psi \in S_{ev}$ и теорема о непрерывности ℑ-преобразований Бесселя из S'_{ev} в S'_{ev} .

Автор выражает благодарность профессору Ляхову Л. Н. за постановку задачи и своевременные консультации. Отдельная благодарность рецензентам за ценные замечания и предложения, которые способствовали улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рошчупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.
2. Сабитов, К. Б. Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123–131.
3. Сабитов, К. Б. Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2019. — Т. 10, № 1. — С. 75–86.
4. Сабитов, К. Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье–Бесселя / К. Б. Сабитов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — Т. 11, № 1. — С. 89–96.
5. Шварц, Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965.
6. Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997.
7. Агранович, М. С. Эллиптические псевдодифференциальные операторы / М. С. Агранович. — М. : МЦНМО, 2010.

REFERENCES

1. Lyakhov L.N., Bulatov Yu.N., Roshchupkin S.A., Sanina E.L. Pseudoshift and fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B -operator. [Lyahov L.N., Bulatov YU.N., Roshchupkin S.A., Sanina E.L. Pseudosdvg i fundamental'noe reshenie Δ_B -operatora Kipriyanova]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1654–1665.
2. Sabitov K.B., Zaitseva N.V. Initial value problem for a B-hyperbolic equation with an integral condition of the second kind. [Sabitov K.B., Zajceva N.V. Nachal'naya zadacha dlya B-giperbolicheskogo uravneniya s integral'nym uslovиеm vtorogo roda]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 123–131.
3. Sabitov K.B., Zaitseva N.V. Second initial boundary value problem for the B-hyperbolic equation. [Sabitov K.B., Zajceva N.V. Vtoraya nachal'no-granichnaya zadacha dlya B-giperbolicheskogo uravneniya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2019, vol. 10, no. 1, pp. 75–86.
4. Sabitov K.B. On the uniform convergence of the expansion of a function in a Fourier-Bessel series. [Sabitov K.B. O ravnomernoj skhodimosti razlozheniya funkicii v ryad Fur'e-Besselya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 89–96.
5. Schwartz L. Mathematical Methods for the Physical Sciences. [SHvarc L. Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk]. Moscow, 1965.
6. Kipriyanov I.A. Singular elliptic boundary value problems. [Kipriyanov I.A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi]. Moscow, 1997.
7. Agranovich M.S. Elliptic pseudodifferential operators. [Agranovich M.S. Ellipticheskie psevdodifferencial'nye operatory]. Moscow, 2010.

Булатов Ю. Н., аспирант, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: y.bulatov@bk.ru

Bulatov Yu. N., postgraduate student, Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: y.bulatov@bk.ru