УДК 517.9

СОСТОЯНИЯ ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Баскаков[1], Г. В. Гаркавенко[1], Л. Н. Костина[1], Н. Б. Ускова[2]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 20.03.2024 г.

Аннотация. В работе рассматриваются следующие понятия: подобные операторы, сплетаемые операторы, эквивалентные операторы, состояние обратимости оператора, сильно эквивалентные операторы. Приведены леммы, касающиеся свойств состояний обратимости и примеры операторов, находящихся в определенных состояниях обратимости. А также примеры эквивалентных операторов.

Ключевые слова: подобные операторы, состояние обратимости, эквивалентные операторы, сплетаемые операторы, спектр.

INVERTIBILITY STATES OF SOME CLASSES OF OPERATORS

A. G. Baskakov, G. V. Garkavenko, L. N. Kostina, N. B. Uskova

Abstract. The following concepts are considered in the paper: similar operators, intertwining operators, equivalent operators, strongly equivalent operators, invertibility states. Lemmas concerning the properties of invertibility states and examples of operators in certain invertibility states are given, as well as examples of equivalent operators.

Keywords: similar operators, invertibility states, equivalent operators, intertwining operators, spectrum.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. Напомним следующее

Определение 1. Два оператора $B_i : D(B_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой обратимый оператор U, что $UD(B_2) = D(B_1)$ и $B_1Ux = UB_2x$, $x \in D(B_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора B_1 в оператор B_2.

Подобные операторы достаточно широко используются в современной математике. Это связано с совпадением их спектров, а также с тем, что зная спектральные характеристики одного из подобных операторов, можно получить соответствующие характеристики другого.

Обобщением подобных операторов является понятие сплетаемых операторов. В этом случае обратный к оператору U не обязан существовать или не обязан быть ограниченным. Спектры сплетаемых операторов могут не совпадать, а сами операторы преобразования могут быть неограниченными. Историю и современное состояние теории операторов преобразования и ее разнообразные применения можно посмотреть в [1]. Подобные операторы являются частным случаем сплетаемых операторов.

Другим обобщением подобных операторов являются эквивалентные операторы (см. Определение 3). Эквивалентные операторы, могут иметь не совпадающие спектры, но одинаковые состояния обратимости (см. Определение 2). Понятие состояния обратимости было введено в работе [2] и использовалось, например, в статьях [2] – [5]. В данной работе мы хотим систематизировать метод эквивалентных операторов и привести примеры его применения, а также примеры состояний обратимости для разных классов операторов. Заметим, что наряду с известными примерами, в частности, из цитируемых выше работ, мы также выписываем состояния обратимости и для других классов операторов, например, для оператора с компактной резольвентой.

Работа организована следующим образом. Во втором параграфе вводятся используемые в статье функциональные пространства. В третьем параграфе приводятся основные определения статьи: определение состояния обратимости оператора (Определение 2) и определение эквивалентных операторов (Определение 3). А также несколько лемм, касающихся свойств состояния обратимости и примеры операторов, находящихся в определенных состояниях обратимости. В четвертом параграфе приводятся примеры эквивалентных и спектрально (сильно) эквивалентных операторов.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Сначала напомним стандартные обозначения. Как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначена группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — банахово пространство ограниченных линейных операторов (гомоморфизмов), $\mathrm{End}\,\mathcal{X} = \mathrm{Hom}\,(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов (эндоморфизмов) со стандартной нормой $\|Xx\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{X}$, $X \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{X}$ — группа обратимых операторов (автоморфизмов) из $\mathrm{End}\,\mathcal{X}$. Символом I обозначен тождественный оператор, а символом $J \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ — оператор инволюции. Напомним, что оператор $J \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2 = I$.

Далее в примерах используются следующие функциональные пространства. Символом $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{Y})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначено банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) последовательностей векторов из банахова пространства $\mathcal{Y}$. Нормы в этих пространствах задаются формулами

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}^p \Big)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}, \qquad x \in l_\infty.$$

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью p функций с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}^p \, dt \Big)^{1/p}, \qquad x \in L_p, \qquad p \in [1, \infty),$$

со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{Y}$. Через $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ — банахово пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой $\|x\|_\infty = \mathrm{vrai}\,\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}$.

2. СОСТОЯНИЯ ОБРАТИМОСТИ. ПРИМЕРЫ

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — замкнутый линейный оператор, имеющий плотную в $\mathcal{X}$ область определения $D(A)$. Так как далее мы рассматриваем только замкнутые операторы, то термин замкнутый будет опускаться. В $D(A)$ вводится норма графика $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}$.

Определение 2 ([2]). Рассмотрим следующие условия:

1) $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ (оператор A инъективен);

2) $1 \leqslant n \leqslant \dim \operatorname{Ker} A \leqslant \infty$;

3) $\operatorname{Ker} A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$, либо в $\mathcal{X}$;

4) $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \operatorname{Ker} A} \frac{\|Ax\|}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} A)},$$

где $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} A) = \inf_{x_0 \in \operatorname{Ker} A} \|x - x_0\|$;

5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т. е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$ (в этом случае $\|Ax\| \geqslant \gamma \|x\|$);

6) $\operatorname{Im} A$ — замкнутое, дополняемое в $\mathcal{Y}$ подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;

7) $\operatorname{Im} A$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{Y}$ коразмерности $1 \leqslant m = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A \leqslant \infty$, где $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A = \dim \mathcal{Y} / \operatorname{Im} A$;

8) $\operatorname{Im} A = \mathcal{Y}$, т. е. оператор A сюръективен;

9) оператор A непрерывно обратим.

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $S_0 = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 9$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии S_0. Множество состояний оператора A обозначим символом $St_{inv}(A)$. Также через $St_{ker}(A)$ обозначим множество состояний обратимости по ядру, $St_{Im}(A)$ — по образу.

Заметим, что в работе [6] некоторые свойства из определения 2 рассматривались по отдельности, и для операторов $I - ST$ и $I - TS$, T, $S \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ доказывалось их одновременное выполнение.

Если оператор A имеет несколько состояний обратимости (по ядру или по образу), то мы иногда будем указывать только некоторые, наиболее важные, из них.

Пример 1. Очевидно, что $St_{inv}(I) = St_{inv}(J) = \{9\}$. Для любого $A \in \operatorname{Aut} \mathcal{X}$ имеем $St_{inv}(A) = \{9\} = \{1, 8\}$.

Пример 2. Пусть пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде прямой суммы замкнутых подпространств $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \bigoplus \mathcal{X}_2$ и P_1, P_2 — два проектора, осуществляющих это разложение.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. Тогда $\mathcal{X} / \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X} / \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1$.*

Доказательство следует из представления любого вектора $x \in \mathcal{X}$ в виде $x = x_1 + x_2$ и определения фактор-пространства.

Каждому оператору $A \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ поставим в соответствие матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} = P_i A P_j$, i, $j = 1, 2$, $A_{ii} \in \operatorname{End} \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, $A_{21} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $A_{12} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1)$. Оператор A назовем блочно-диагональным, если $A_{12} = A_{21} = 0$. Пусть сначала оператор A блочно-диагональный вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 \end{pmatrix},$$

где λ_1, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $St_{inv}(A) = \{9\}$. Пусть теперь $\lambda_2 = 0$, т. е. $A = \lambda_1 P_1$. Тогда $\operatorname{Ker} A = \mathcal{X}_2$, $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{X}_1$ и $St_{inv}(A) = \{2, 4\}$.

Пример 3. Рассмотрим оператор $I + J$ в пространстве $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$, где $(Jx)(n) = x(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2$. Спектральные свойства как его, так и более общих разностных с инволюцией операторов описаны в [8], [9]. Очевидно, что $\sigma(I + J) = \{0, 2\}$, $\dim \operatorname{Ker}(I + J) = \infty$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(I + J) = \infty$, и пространство l_2 есть прямая сумма $l_2 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, где $\mathcal{X}_1$ — подпространство нечетных последовательностей, $\mathcal{X}_2$ — четных (см. [8]). Поэтому $St_{ker}(I+J) = \{2\}$, $St_{inv}(I+J) = \{2,4,6,7\}$, $St_{Im}(I+J) = \{4,6,7\}$.

Пример 4. Пусть теперь только $A_{12} = 0$, т. е. оператор A имеет блочную нижнетреугольную матрицу. Введем следующие подпространства

$$\mathcal{X}_1^0 = \{x \in \mathcal{X}_1 \,|\, x \in \operatorname{Ker} A_{11}, A_{21}x \in \operatorname{Im} A_{22}\},$$

$$\mathcal{X}_2^0 = \operatorname{Im} A_{22} + A_{21}(\operatorname{Ker} A_{11}).$$

Тогда для оператора A имеет место (см. [7, p. 23]) следующая лемма, позволяющая вычислить размерности $\dim \operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $\operatorname{Im} A_{11}$ *— замкнутое подпространство и* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A_{11} < \infty$*;*

2) $\operatorname{Im} A_{22}$ *— замкнутое подпространство и* $\dim \operatorname{Ker} A_{22} < \infty$*;*

3) $\dim \mathcal{X}_1^0 < \infty$*;*

4) $\operatorname{codim} \mathcal{X}_2^0 < \infty$*.*

Тогда $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A_{22} + \dim \mathcal{X}_1^0$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A_{11} + \operatorname{codim} \mathcal{X}_2^0$.

Таким образом, в этом случае оператор A находится в состоянии $\{2,7\}$ с конечными числами n и m.

Пример 5. ([4]). Рассмотрим два оператора $C, R \in End\, l_p$, действующих по формулам $(Cx)(n) = x(n+1)$, $Rx(n) = p(n)x(n-1)$, $(Rx)(1) = 0$, где $x \in l_p$ и

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad p(n) = \begin{cases} 1, & n = 1,3,5,\dots, \\ 0, & n = 2,4,6,\dots. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $I - CR$ действует следующим образом

$$((I - CR)x)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1,3,5,\dots, \\ 0, & n = 2,4,6,\dots, \end{cases}$$

и образ оператора $I - CR$ является замкнутым и дополняемым подпространством в l_p. Поэтому $St_{inv}(I - CR) = \{2,6\}$.

Пример 6. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — оператор с компактной резольвентой. Есть два возможных случая: $0 \in \sigma(A)$ и $0 \notin \sigma(A)$. Во втором случае $St_{inv}(A) = \{9\}$.

Пусть теперь $0 \in \sigma(A)$. В этом случае тождественный оператор представим в виде $I = P_0 + P^0$, где $P_0 = P(\{0\}, A)$ — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{0\}$ и $P^0 = I - P_0$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}_0 = \operatorname{Im} P_0$, $A|_{\mathcal{X}_0}$ — ограниченный квазинильпотентный оператор, размерность ядра которого $\dim \operatorname{Ker} A$ совпадает с алгебраической кратностью собственного значения нуль.

Таким образом, $\mathcal{X}_0$ состоит из нильпотентных векторов и является замкнутым и дополняемым подпространством в $\mathcal{X}$, $St_{ker}(A) = \{2,3\}$, причем размерность его конечна.

Заметим, что $A|_{\mathcal{X}^0}$ — обратимый оператор, причем обратный к нему является компактным оператором, $St_{inv}(A|_{\mathcal{X}^0}) = \{9\}$.

Перейдем к описанию $\operatorname{Im} A$. Очевидно, что $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$, т. е. $St_{Im}(A) = \{4\}$ и оператор A нормально разрешим. Таким образом, в случае $0 \in \sigma(A)$ имеем $St_{inv}(A) = \{2,4\}$.

Из леммы 1 следует, что $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$. Таким образом, $St_{Im}(A) = \{4,6,7\}$ и $St_{inv}(A) = \{2,7\}$ с конечным числом $n = m$.

Пример 7. Рассмотрим оператор $I + K$, где K — компактный оператор, действующий в K. Если (-1) не входит в спектр $\sigma(K)$ оператора K, то $St_{inv}(T + K) = \{9\}$. Если же $(-1) \in \sigma(K)$, то его кратность конечна ввиду компактности K и $\dim \operatorname{Ker}(I + K) < \infty$, т. е. $St_{ker}(I + K) = \{2\}$ с конечным числом n.

Определение 3. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$ называются эквивалентными, если $St_{inv}(A_1) = St_{inv}(A_2)$.

Лемма 3. *Множество $St_{inv}(A)$ не изменится, если оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ умножить слева на $U \in \operatorname{Aut}\mathcal{Y}$ (или справа на $V \in \operatorname{Aut}\mathcal{X}$).*

Доказательство. Пусть $U \in \operatorname{Aut}\mathcal{Y}$, $V \in \operatorname{Aut}\mathcal{X}$. Тогда $\dim\operatorname{Ker} AV = \dim\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} AV = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} UA = \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} UA = U\operatorname{Im} A$. Откуда и следует утверждение леммы. □

Замечание 1. Константы $\gamma(A)$ и $\gamma(UA)$, а также $\gamma(A)$ и $\gamma(AV)$ отличаются, но в определении 2 используется не конкретное значение этих констант, а условие $\gamma(A) > 0$. При $\gamma(A) > 0$ величины $\gamma(UA)$ и $\gamma(AV)$ также положительны.

Следствие 1. *(см. также [4, Лемма 1]). Пусть операторы A из $\operatorname{End}\mathcal{X}$ и B из $\operatorname{End}\mathcal{Y}$ связаны соотношением $A = UBV$, где U и V — обратимые операторы из $\operatorname{Hom}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ и $\operatorname{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, соответственно. Тогда $St_{inv}(A) = St_{inv}(B)$.*

Итак, одна из идей применения (но не единственная) метода эквивалентных операторов состоит в построении таких обратимых операторов U и V, при умножении на которые слева или справа (или справа и слева) мы получим эквивалентный оператор, множество состояний обратимости которого или хорошо известно, или легко считается.

В случае выполнения условий леммы 3 имеют место следующие свойства [4, Леммы 2, 9], которые удобно оформить в виде леммы.

Лемма 4. *1) Если ядро оператора B дополняемо в $\mathcal{Y}$ и известен проектор $P_{\operatorname{Ker} B} \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$ на ядро $\operatorname{Ker} B$, то ядро оператора A также дополняемо в $\mathcal{X}$ и оператор $P_{\operatorname{Ker} A} = V^{-1}P_{\operatorname{Ker} B}V$ является проектором на ядро $\operatorname{Ker} A$.*

2) Если образ оператора B замкнут и дополняем в $\mathcal{Y}$, $P_{\operatorname{Im} B} \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$ — проектор на $\operatorname{Im} B$, то образ оператора A также дополняем в $\mathcal{X}$ и $P_{\operatorname{Im} A} = UP_{\operatorname{Im} B}U^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — проектор на образ $\operatorname{Im} A$.

Не всегда возможно применить конструкцию из леммы 3 для построения эквивалентного оператора, иногда приходится пользоваться более сложной конструкцией и строить сопровождающий оператор.

Определение 4. [10, Определение 2] Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Оператор $B \in \operatorname{End}\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — комплексное банахово пространство, называется сопровождающим для оператора A, если существуют линейные операторы $R \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $T \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, $K : D(A) \to \mathcal{Y}$, $N : \mathcal{Y} \to D(A)$, обладающие свойствами:

1) $\operatorname{Im} A = R^{-1}(\operatorname{Im} B)$;

2) $\operatorname{Im} B = T^{-1}(\operatorname{Im} A)$;

3) $RT = I + \alpha B$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторое число;

4) $K : D(A) \to \mathcal{Y}$ — ограниченный оператор (с нормой графика в $D(A)$);

5) $N : \mathcal{Y} \to D(A)$ — ограниченный оператор, если в $D(A)$ рассматривать норму пространства $\mathcal{X}$;

6) каждый из операторов K и N осуществляет изоморфизм пространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} B$.

Теорема 1. *[10, Теорема 1] Оператор A и сопровождающий оператор B эквивалентны.*

Таким образом, для построения эквивалентного оператора можно использовать не только лемму 3, но и определение 4. Именно такой подход использовался в работе [5], где для дифференциального оператора первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом строится сопровождающий разностный оператор.

Определение 5. Два оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $B : D(B) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ называются спектрально эквивалентными (или сильно эквивалентными), если они эквивалентны и их спектры совпадают, т. е. $St_{inv}(A - \lambda I)^{-1} = St_{inv}(B - \lambda I)^{-1}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Подобные операторы спектрально эквивалентны.*

3. ПРИМЕРЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пример 8 (см. [4]). Рассмотрим два ограниченных оператора: оператор $I - CR$ из примера 5 и оператор $I - RC$, где R и C определены в примере 5. Известно (см., например, [11, Гл. 1, § 1]), что $\sigma(RC)\backslash\{0\} = \sigma(CR)\backslash\{0\}$. Непосредственный подсчет показывает, что $(I - RC)x = \{x(1), x(2), 0, x(4), 0, \dots\}$. Имеет место

Теорема 2. *[4, Теорема 1] Операторы $I - CR$ и $I - RC$ эквивалентны, т. е. $St_{inv}(I - CR) = St_{inv}(I - RC)$.*

Отметим, что для оператора $I - CR$ легко строится проектор на образ оператора

$$(Px)(n) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четном}, \\ 1, & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Тогда с использованием леммы 4 можно получить проектор на образ ему эквивалентного оператора $I - RC$, соответствующая формула приведена в [4, Пример 2].

Пример 9. Сведение дифференциального оператора первого порядка с инволюцией к оператору Дирака (см. [12]). В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор $(Ax)(t) = x'(t) + q(t)x(1 - t)$, $t \in [0, 1]$, $D(A) = \{x \in W_2^1[0, 1] : x(0) = x(1)\}$. Переход от оператора A к соответствующему оператору Дирака осуществляется с помощью замены. Пусть $y(t) = \{x(t), x(1 - t)\} = \{y_1(t), y_2(t)\}$.

Теорема 3. *(см. также [12, Лемма 1]). Оператор A спектрально эквивалентен оператору $B : D(B) \subset L_2([0, 1], \mathbb{C}^2) \to L_2([0, 1], \mathbb{C}^2)$ вида*

$$(By)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} 0 & q(t) \\ q(1-t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \qquad t \in [0, 1],$$

и $y_1(1/2) = y_2(1/2)$.

Пример 10. [5]. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор. Рассмотрим операторный полином второй степени

$$\mathcal{A} = B_0 A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

с областью определения $D(\mathcal{A}) = \{x \in D(A), Ax \in D(A)\}$, где $B_k \in \operatorname{End} \mathcal{X}$. Также введем оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$, с помощью операторной матрицы

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & B_0 A + B_1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, B_2 x_1 + B_0 A x_2 + B_1 x_2)$, $(x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$.

Теорема 4. *(См. [5]) Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ эквивалентны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shishkina, E. L. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik. — Elsevier : Academic Press, 2020. — 592 p.

2. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 3–68.

3. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, вып. 1(409). — С. 77–128.

4. Диденко, Д. Б. Спектральные свойства операторов AB и BA / Д. Б. Диденко // Матем. заметки. — 2018. — Т. 103, вып. 2. — С. 196–209.

5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ операторных полиномов и дифференциальных операторов второго порядка / А. Г. Баскаков, Д. Б. Диденко // Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, вып. 4. — С. 490–506.

6. Barnes, B. A. Common operator properties of the linear operators RS and SR / B. A. Barnes // Proc. A. M. S. — 1998. — V. 126, № 4. — P. 1055–1061.

7. Litvinchuk, G. S. Factorization of Measurable Matrix Functions / G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii. — Oper. Th. : Adv. Appl. 25. Birkhäuser Basel, 1987.

8. Баскаков, А. Г. Некоторые свойства разностных операторов с инволюцией / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2023. — № 2. — С. 36–45.

9. Баскаков, А. Г. Об ограниченных разностных операторах с инволюцией / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 229. — С. 12–21.

10. Баскаков, А. Г. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков, В. Б. Диденко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, вып. 1. — С. 3–16.

11. Бурбаки, Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. — М. : Мир, 1972. — 184 с.

12. Бурлуцкая, М. Ш. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 10–20.

REFERENCES

1. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering, Elsevier. Academic Press, 2020, 592 p.

2. Baskakov A.G. Spectral analysis of differential operators whis unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz differencial'nyh operatorov s neogranichennymi operatornymi koefficientami, raznostnye otnosheniya i polugruppy raznostnyh otnoshenij]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 3–68.

3. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyh differencial'nyh uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyh operatorov i linejnyh otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, iss. 1(409), pp. 77–128.

4. Didenko D.B. Spectral properties of the operators AB and BA. [Didenko D.B. Spektral'nye svojstva operatorov AB i BA]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2018, vol. 103,

iss. 2, pp. 196–209.

5. Baskakov A.G., Didenko D.B. Spectral analysis of operator polynomials and second-order differential operators. [Baskakov A.G., Didenko D.B. Spektral'nyj analiz operatornyh polinomov i differencial'nyh operatorov vtorogo poryadka]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, iss. 4, pp. 490–506.

6. Barnes B.A. Common operator properties of the linear operators RS and SR. Proc. A.M.S., 1998, vol. 126, no. 4, pp. 1055–1061.

7. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. Factorization of Measurable Matrix Functions. Oper. Th.: Adv. Appl. 25. Birkhäuser Basel, 1987.

8. Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Uskova N.B. Some properties of difference operators with involution. [Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Uskova N.B. Nekotorie svoyctva raznostnih operatorah s involuciey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2023, no. 2, pp. 36–45.

9. Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Uskova N.B. On bounded difference operators with involution. [Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Uskova N.B. Ob ogranichennih raznostnih operatorah s involuciey]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory — Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, 2023, vol. 229, pp. 12–21.

10. Baskakov A.G., Didenko D.B. On invertibility states of differential and difference operators. [Baskakov A.G., Didenko D.B. O sostoyaniyah obratimosti raznostnyh i differencial'nyh operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 3–16.

11. Bourbaki N. Elements de mathematique, Fasc. XXXII: Theories spectrales. [Burbaki N. Spektral'naya teoriya]. Moscow, 1972, 184 p.

12. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Mixed problem for simplest hyperbolic first order equations with involution. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Smeshannaya zadacha dlya prostejshego giperbolicheskogo uravneniya pervogo poryadka s involyuciej]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 10–20.

Баскаков Анатолий Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Baskakov Anatoly G., Professor of the Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Garkavenko Galina V., Assistant Professor of the Department of Computer Software, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Костина Любовь Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Kostina Lubov N., Assistant Professor of the Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: nat-uskova@mail.ru

Uskova Natalia B., Associate Professor Department of Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: nat-uskova@mail.ru