УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 10.07.2023 г.

Аннотация. Рассматривается краевая задача

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \quad \alpha \in (n-1, n], \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n > 2)$$
$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0,$$
$$x(1) = \int_0^1 x(s)\,ds.$$

С помощью специальных топологических средств нелинейного анализа доказано существование по крайней мере двух положительных решений рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий, обеспечивающих однозначную разрешимость поставленной задачи. Полученные результаты дополняют исследования автора, посвященным вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально–дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально–дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина.

ON THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY PROBLEM FOR NONLINEAR FUNCTIONAL–DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract. The boundary value problem is considered

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \quad \alpha \in (n-1, n], \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n > 2)$$
$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0,$$
$$x(1) = \int_0^1 x(s)\,ds.$$

With the help of special topological tools of nonlinear analysis, the existence of at least two positive solutions of the problem under consideration is proved. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions that ensure the unique solvability of the problem. The results obtained complement the author's research on the existence and uniqueness of positive solutions to boundary value problems for non-linear functional-differential equations.

Keywords: functionally–differential equation of fractional order, positive solution, boundary value, Green's function.

ВВЕДЕНИЕ

Дробные дифференциальные уравнения всегда представляли большой интерес. Это вызвано как интенсивным развитием самой теории дробного исчисления, так и приложений. Помимо различных областей математики такие уравнения возникают в реологии, динамических процессах в самоподобных и пористых структурах, при изучении деформационно - прочностных свойств полимерных материалов, потоки жидкости, электрические сети, химическая физика вязкоупругости и многие другие области науки. В последнее время появились работы, посвященные существованию решений дробных дифференциальных уравнений с использованием методов нелинейного анализа (теоремы о неподвижной точке, теория Лерэ-Шаудера, метод разложения Адомиана и др.): см. [1-4]. Особенно большое внимание привлекли краевые задачи для дробных дифференциальных уравнений: см. [5-12]. Как известно, задача решения краевых задач имеет первостепенное значение в различных областях прикладной математики. В настоящее время, кажется, появился новый интерес к исследованию краевых задач для дробных дифференциальных уравнений.

Несмотря на бурное развитие теории дробно - дифференциальных уравнений отметим, что статей в которых подробно рассматривались бы краевые задачи для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений дробного порядка сравнительно мало. Особенностью рассматриваемой в работе задачи является то, что на одном из концов отрезка исследования граничное условие задано в интегральной форме. Подобные задачи составляют очень интересный и важный класс граничных задач и возникают в различных областях прикладной математики и физики, в частности в теплопроводности, потоках подземных вод, термоупругости и физике плазмы. Такого типа задачи для дифференциальных уравнений второго порядка рассматривались автором в работах [13,14]. В данной статье предпринята попытка обобщить полученные результаты и помощью специальных топологических средств нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах доказано существование по крайней мере двух положительных решений краевой задачи для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения дробного порядка с интегральным граничным условием. В заключении приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем для удобства выкладок через C обозначим пространство $C[0,1]$, $\mathbb{L}_p$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и $\mathbb{W}^n$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной $(n-1)$ производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + f\left(t,(Tx)\,(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x'(0) = \dots x^{(n-2)}(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(1) = \int_0^1 x(s)\,ds, \tag{3}$$

где $\alpha \in (n-1,n] \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n > 2)$ — некоторое действительное число, D_{0+}^{α} — дробная производная Римана-Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори, причем $f(\cdot,0) \neq 0$.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s,(Tx)\,(s)\right)\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина [15] оператора $-D^{\alpha}_{0+}x(t)$ с краевыми условиями (2), (3):

$$G(t,s) = \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-1+s) - (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-1}, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-1+s), & \text{если } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Несложно видеть, что для функции Грина справедливы следующие свойства

1. $0 \leqslant G(t,s) \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-1+s), \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1],$

2. $\varphi(t)\psi(s) \leqslant G(t,s) \leqslant \psi(s), \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, где
   $\psi(s) = \dfrac{(\alpha-1)^2+1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}s(1-s)^{\alpha-1}, \quad \varphi(t) = \dfrac{\alpha t^{\alpha-1}(1-t)}{(\alpha-1)^2+1}.$

Определение 1. *Под положительным решением задачи* (1)–(3) *будем подразумевать функцию* $x \in \mathbb{W}^n$ *положительную в интервале* (0,1), *удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (1) *и граничным условиям* (2), (3).

Предположим, что функция $f(t,u)$ при $t \in [0,1]$ и любых неотрицательных u удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leqslant a(t) + bu^{p/q}, \tag{5}$$

где $a(t) \in \mathbb{L}_q$, $b > 0$, $1 < q < \infty$.

Запишем уравнение (4) в операторном виде

$$x = GNTx,$$

где $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon \mathbb{L}_q \to C$— оператор, определяемый функций Грина $G(t,s)$.

Обозначим через K конус неотрицательных и непрерывных на отрезке [0,1] функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \varphi(t)\|x\|_C, \quad t \in [0,1].$$

Несложно проверить, что оператор A, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен и в силу свойства 2 функции Грина оставляет инвариантным конус K.

Кроме того, ввиду равностепенной непрерывности и ограниченности оператора A на основании теоремы Арцела - Асколи следует его полная непрерывность.

Определим конус $\widetilde{K}$ по правилу $\widetilde{K} = \{x \in K : \|x\|_C \leqslant \gamma\}$, где $\gamma > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (5) *и*

$$\frac{\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\left(\|a\|_{\mathbb{L}_q} + b\tau^{\frac{p}{q}}\gamma^{\frac{p}{q}}\right) \leqslant \gamma, \tag{6}$$

где $g(s) = (1-s)^{\alpha-1}(\alpha-1+s), \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1, \quad \tau$ *— норма оператора* T.
Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет не менее двух положительных решений* u^* *и* v^* *таких что* $0 < \|u^*\|_C \leqslant \|v^*\|_C \leqslant \gamma$. *Кроме того, итерационные последовательности* $u_{k+1} = Au_k$, $v_{k+1} = Av_k$ *сходятся по норме пространства* C *к положительным решениям* u^* *и* v^* *соответственно, где* $u_0(t) = 0$, $v_0(t) = \gamma t^{\alpha-1}$. *Более того*

$$u_0(t) \leqslant u_1(t) \leqslant \dots u_k(t) \leqslant \dots u^*(t) \leqslant v^*(t) \leqslant \dots v_k(t) \leqslant \dots v_1(t) \leqslant v_0(t), \quad t \in [0,1].$$

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) совпадает с неподвижными точками оператора A, поэтому достаточно показать существование неподвижных точек оператора A.

Условие (6) теоремы гарантирует инвариантность конуса $\widetilde{K}$ относительно оператора A. Действительно, для всех $x \in \widetilde{K}$ в силу свойства 1 функции Грина и (5) имеем

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant (Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \leqslant \\
\leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} (\alpha - 1 + s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 g(s) a(s)\, ds + b \int_0^1 g(s) \left(Tx\right)^{\frac{p}{q}} (s)\, ds \right) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \right) \leqslant \\
\leqslant \frac{\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\|a\|_{\mathbb{L}_q} + b \tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_C^{\frac{p}{q}} \right) \leqslant \frac{\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\|a\|_{\mathbb{L}_q} + b \tau^{\frac{p}{q}} \gamma^{\frac{p}{q}} \right).
\end{aligned}
$$

В силу (6) $\|Ax\|_C \leqslant \gamma$. Следовательно, $A(\widetilde{K}) \subseteq \widetilde{K}$.

Покажем, что итерации u_k и v_k монотонно сходятся соответственно к u^* и v^*, являющимся в свою очередь положительными решениями краевой задачи (1)–(3).

Очевидно, $u_0 \in \widetilde{K}$. Инвариантность $\widetilde{K}$ относительно A влечет $u_k \in A(\widetilde{K}) \subseteq \widetilde{K}$, $k = 1,2,\ldots$. Ввиду полной непрерывности оператора A последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ представляет собой секвенциально компактное множество. Поскольку $u_1 = Au_0 = A0 \in \widetilde{K}$

$$\gamma \geqslant u_1(t) = (Au_0)(t) = (A0)(t) \geqslant 0 = u_0(t), \qquad t \in [0,1].$$

В силу монотонности A

$$u_2(t) = (Au_1)(t) \geqslant (Au_0)(t) = u_1(t), \qquad t \in [0,1].$$

Таким образом, по индукции имеем

$$u_{k+1}(t) \geqslant u_k(t), \qquad t \in [0,1], \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Следовательно, существует $u^* \in \widetilde{K}$ такое что $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|_C = 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношении $u_{k+1} = Au_k$, получим $Au^* = u^*$. Более того, поскольку ноль не является решением задачи (1)–(3) $\|u^*\|_C > 0$. Непосредственно из определения конуса $\widetilde{K}$ следует $u^*(t) \geqslant \varphi(t)\|u^*\|_C > 0$, т.е $u^*(t)$ является положительным решением задачи (1)–(3).

Докажем теперь, что последовательность $\{v_k\}$ убывает и сходится к положительному решению v^* задачи (1)–(3), т.е. $\lim_{k\to\infty} \|v_k - v^*\|_C = 0$.

Очевидно, $v_0 \in \widetilde{K}$. Инвариантность $\widetilde{K}$ относительно A влечет $v_k \in A(\widetilde{K}) \subseteq \widetilde{K}$, $k = 1,2,\ldots$. Ввиду полной непрерывности оператора A последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ представляет собой секвенциально компактное множество. Поскольку $v_1 = Av_0 \in \widetilde{K}$ в силу свойства 1 функции Грина, (5) и (6) имеем

$$
\begin{aligned}
(Av_0)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tv_0)(s)\right) ds \leqslant \\
\leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} (\alpha - 1 + s) f\left(s, (Tv_0)(s)\right) ds \leqslant \\
\leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 g(s) a(s)\, ds + b \int_0^1 g(s) \left(Tv_0\right)^{\frac{p}{q}} (s)\, ds \right) \leqslant
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\left(\|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}+b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|Tv_0\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}}\right)$$

$$\leqslant \frac{t^{\alpha-1}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\left(\|a\|_{\mathbb{L}_q}+b\tau^{\frac{p}{q}}\|v_0\|_{C}^{\frac{p}{q}}\right)\leqslant \frac{t^{\alpha-1}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\left(\|a\|_{\mathbb{L}_q}+b\tau^{\frac{p}{q}}\gamma^{\frac{p}{q}}\right)\leqslant \gamma t^{\alpha-1}=v_0(t).$$

Таким образом,

$$v_1(t)\leqslant v_0(t), \quad t\in[0,1].$$

В силу монотонности A

$$v_2(t)=(Av_1)(t)\leqslant (Av_0)(t)=v_1(t), \quad t\in[0,1].$$

По индукции получим

$$v_{k+1}(t)\leqslant v_k(t), \qquad t\in[0,1], \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Следовательно, существует $v^*\in\widetilde{K}$ такое что $\lim_{k\to\infty}\|v_k-v^*\|_C=0$. Из непрерывности оператора A и определения конуса K следует, что v^* является положительным решением задачи (1)–(3).

Наконец, с учетом того, что $u_0(t)\leqslant v_0(t)$ получим

$$u_1(t)=(Au_0)(t)=\int_0^1 G(t,s)f\left(s,\left(Tu_0\right)(s)\right)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^1 G(t,s)f\left(s,\left(Tv_0\right)(s)\right)\,ds=(Av_0)(t)=v_1(t), \quad t\in[0,1].$$

По индукции получим

$$u_k(t)\leqslant v_k(t), \qquad t\in[0,1], \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Заметим, что в случае $u^*=v^*$ задача (1)–(3) имеет только одно положительное решение. Теорема доказана.

Пример 1. Приведем простой пример, иллюстрирующий полученные результаты. Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{5/2}x(t)+t+\left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)^2=0, \qquad 0<t<1, \tag{7}$$

$$x(0)=x'(0), \tag{8}$$

$$x(1)=\int_0^1 x(s)\,ds. \tag{9}$$

Здесь, очевидно, $\alpha=5/2$, $p/q=2$ и $f(t,u)=t+u^2$.

Возьмем для удобства и простоты вычислений $q=2$, $a(t)=t$ и $b=1$. Определим некоторые величины, входящие в неравенство (6) теоремы 1:

$$\|g\|_{\mathbb{L}_2}=\sqrt{\int_0^1 g^2(s)\,ds}=\sqrt{\int_0^1 (1-s)^3\left(\frac{3}{2}+s\right)^2\,ds}=\sqrt{\frac{35}{48}},$$

$$\|a\|_{\mathbb{L}_2}=\sqrt{\int_0^1 s^2\,ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В рассматриваемом примере линейный оператор $T\colon C \to \mathbb{L}_q$ определен равенством $(Tx)(t) = \displaystyle\int_0^1 x(s)\,ds$. Очевидно, $\tau = 1$. Неравенство (6) соответственно примет вид

$$\frac{\sqrt{\frac{35}{48}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \gamma^2\right) \leqslant \gamma$$

или

$$\frac{2}{27}\sqrt{\frac{35}{\pi}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{35}{3\pi}}\gamma^2 \leqslant \gamma.$$

Несложно проверить, что последнему неравенству, в частности, удовлетворяет значение $\gamma = 1$. Следовательно, теорема 1 гарантирует существование не менее двух положительных решений задачи задача (7)–(9) таких что $0 < \|u^*\|_C \leqslant \|v^*\|_C \leqslant 1$.

Более того, мы имеем две итерационные схемы

$$u_0(t) = 0, \quad t \in [0,1],$$

$$u_{k+1}(t) = \frac{4t^{3/2}}{9\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-s)^{3/2}(3+2s)\left[\int_0^1 u_k(s)\,ds + s\right]ds \\ - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-s)^{3/2}\left[\int_0^1 u_k(s)\,ds + s\right]ds, \qquad t \in [0,1], \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

и

$$v_0(t) = t^{3/2}, \quad t \in [0,1],$$

$$v_{k+1}(t) = \frac{4t^{3/2}}{9\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-s)^{3/2}(3+2s)\left[\int_0^1 v_k(s)\,ds + s\right]ds \\ - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-s)^{3/2}\left[\int_0^1 v_k(s)\,ds + s\right]ds, \qquad t \in [0,1], \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

После некоторых упрощений итерационные схемы соответственно можно записать так

$$u_0(t) = 0, \quad t \in [0,1],$$

$$u_{k+1}(t) = \frac{8t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{21} - \frac{t}{5}\right)\int_0^1 u_k(s)\,ds + \frac{16t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{27} - \frac{t^2}{35}\right), \qquad t \in [0,1], \quad k = 0,1,2,\ldots$$

и

$$v_0(t) = t^{3/2}, \quad t \in [0,1],$$

$$v_{k+1}(t) = \frac{8t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{21} - \frac{t}{5}\right)\int_0^1 v_k(s)\,ds + \frac{16t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{27} - \frac{t^2}{35}\right), \qquad t \in [0,1], \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

В частности, непосредственным вычислением несложно получить второй и третий приближения соответственно

$$u_1(t) = \frac{16t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{27} - \frac{t^2}{35}\right),$$

$$u_2(t) = \frac{16t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{576 + 3969\sqrt{\pi}}{107163\sqrt{\pi}} - \frac{64}{4900\sqrt{\pi}}t - \frac{1}{35}t^2\right),$$

и

$$v_1(t) = \frac{16t^{3/2}}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{80}{189} - \frac{t}{5} - \frac{t^2}{7}\right),$$

$$v_2(t) = \frac{16t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{5472 + 19845\sqrt{\pi}}{535815\sqrt{\pi}} - \frac{608}{70875\sqrt{\pi}} t - \frac{1}{35} t^2 \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование по крайней мере двух положительных решений двухточечной краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения дробного порядка с граничным условием в интегральной форме. Доказательство опирается на принцип неподвижной точки. Приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий выполнение условий теоремы существования положительных решений рассматриваемой задачи.

Полученные результаты дополняют исследования автора, посвященные данной тематике и могут представлять определенный теоретический интерес для специалистов, занимающихся вопросами существования положительных решений краевых задач для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Delbosco, D. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation / D. Delbosco, L. Rodino // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — V. 204. — P. 609–625.

2. Zhang, S. The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equation / S. Zhang // J. Math. Anal. Appl. — 2000. — V. 252. — P. 804–812.

3. Zhang, S. Existence of positive solutions for some class of nonlinear fractional equation / S. Zhang // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — V. 278. — P. 136–148.

4. Jafari, H. Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method / H. Jafari, G. V. Daftardar // Appl. Math. Comput. — 2006. — V. 180. — P. 700–706.

5. Karaca, I. Y. Existence of solutions for a fractional order boundary value problem / I. Y. Karaca, D. Oz // Ukr. Math. J. — 2021. — V. 72. — P. 1907–1920.

6. Bachar, I. Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional nonlinear boundary value problems under mild assumptions / I. Bachar, H. Maagli, H. Eltaeb // Adv. Differ. Equ. — 2021. — V. 22. — P. 1–11.

7. Caballero, J. Existence and uniqueness of positive solutions for a class of singular fractional differential equation with infinite-point boundary value conditions / J. Caballero, J. Harjani, K. Sadarangani // RACSAM. — 2021. — V. 115, iss. 48. — P. 1–9.

8. Sang, Y. Existence of an approximate solution for a class of fractional multi-point boundary value problems with the derivative term / Y. Sang, L. He // Bound. Value Probl. — 2021. — V. 20. — P. 1–28.

9. Existence of positive solutions for a class of fractional differential equations with the derivative term via a new fixed point theorem / Y. Sang, L. He, Y. Wang et al. // Adv. Differ. Equ. — 2021. — V. 156. — P. 1–17.

10. Existence of positive solutions for p-Laplacian boundary value problems of fractional differential equations / F. Chabane, M. Benbachir, M. Hachama et al. // Bound. Value Probl. — 2022. — V. 65. — P. 1–38.

11. Dilna, N. Unique solvability of the boundary value problems for nonlinear fractional functional differential equations / N. Dilna, M. Gromyak, S. Leshchuk // J. Math. Sci. — 2022. — V. 265. — P. 577–588.

12. Liu, Y. Existence of the positive solutions for boundary value problems of mixed differential equations involving the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives / Y. Liu, C. Yan, W. Jiang // Bound. Value Probl. — 2023. — V. 9. — P. 1–15.

13. Абдурагимов, Г. Э. О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — № 199. — С. 3–6.

14. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями / Г. Э. Абдурагимов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2022. — Т. 25, № 4. — С. 5–14.

15. Yuan, C. Two positive solutions for $(n-1,1)$-type semipositone integral boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations / C. Yuan // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2012. — V. 17. — P. 930–942.

REFERENCES

1. Delbosco D., Rodino L. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl., 1996, vol. 204, pp. 609–625.

2. Zhang S. The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl., 2000, vol. 252, pp. 804–812.

3. Zhang S. Existence of positive solutions for some class of nonlinear fractional equation. J. Math. Anal. Appl., 2003, vol. 278, pp. 136–148.

4. Jafari H., Daftardar G.V. Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method. Appl. Math. Comput., 2006, vol. 180, pp. 700–706.

5. Karaca I Y., Oz D. Existence of solutions for a fractional order boundary value problem. Ukr. Math. J., 2021, vol. 72, pp. 1907–1920.

6. Bachar I., Maagli H., Eltaeb H. Existence and uniqueness of solutions for a class of fractional nonlinear boundary value problems under mild assumptions. Adv. Differ. Equ., 2021, vol. 22, pp. 1–11.

7. Caballero J., Harjani J., Sadarangani K. Existence and uniqueness of positive solutions for a class of singular fractional differential equation with infinite-point boundary value conditions. RACSAM, 2021, vol. 115, iss. 48, pp. 1–9.

8. Sang Y., He L. Existence of an approximate solution for a class of fractional multi-point boundary value problems with the derivative term. Bound. Value Probl., 2021, vol. 20, pp. 1–28.

9. Sang Y., He L., Wang Y. et al. Existence of positive solutions for a class of fractional differential equations with the derivative term via a new fixed point theorem. Adv. Differ. Equ., 2021, vol. 156, pp. 1–17.

10. Chabane F., Benbachir M., Hachama M. et al. Existence of positive solutions for p-Laplacian boundary value problems of fractional differential equations. Bound. Value Probl., 2022, vol. 65, pp. 1–38.

11. Dilna N., Gromyak M., Leshchuk S. Unique solvability of the boundary value problems for nonlinear fractional functional differential equations. J. Math. Sci., 2022, vol. 265, pp. 577–588.

12. Liu Y., Yan C., Jiang W. Existence of the positive solutions for boundary value problems of mixed differential equations involving the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives. Bound. Value Probl., 2023, vol. 9, pp. 1–15.

13. Abduragimov G.E. On the existence of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear second-order ordinary differential equation. [Abduragimov G.E. O sushchestvovanii polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i yeye pril. Temat. obz. — Results of science and technology. Ser. Modern mat. and her app. Subject. review*, 2021, no. 199, pp. 3–6.

14. Abduragimov G.E. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear second order differential equation with integral boundary

conditions. [Abduragimov G.E. O sushchestvovanii i yedinstvennosti polozhitel 'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s integral'nymi granichnymi usloviyami]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoye modelirovaniye — Mathematical physics and computer modeling*, 2022, vol. 25, no. 4, pp. 5–14.

15. Yuan, C. Two positive solutions for $(n-1,1)$-type semipositone integral boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2012, vol. 17, pp. 930–942.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderkhanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru