УДК 517.957:531.395

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Ю. А. Чиркунов, М. Ю. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 06.10.2023 г.

Аннотация. В данной работе методами группового анализа исследовано нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка, задающее модель продольного динамического деформирования вязкоупругого стержня со степенной зависимостью напряжения от деформации и скорости деформации. Найдена основная группа Ли преобразований этого уравнения. Все инвариантные решения этого уравнения получены либо в явном виде, либо их поиск сводится к решению систем дифференциальных уравнений первого порядка. Для этих систем изучаются краевые задачи, имеющие физический смысл. Для некоторых конкретных значений входящих в них параметров эти задачи решаются численно. Проведенные исследования особенно актуальны в ракетостроении, авиастроении, судостроении и других областях.

Ключевые слова: деформирование вязкоупругого стержня, степенная зависимость напряжения от деформации и скорости деформации, инвариантные решения.

NONLINEAR DYNAMIC LONGITUDINAL DEFORMATION OF A VISCOELASTIC ROD WITH POWER-WAY NONLINEARITY

Yu. A. Chirkunov, M. Yu. Chirkunov

Abstract. In this paper, a nonlinear third-order partial differential equation that specifies a model of longitudinal dynamic deformation of a viscoelastic rod with a power-law dependence of stress on strain and strain rate is studied using group analysis methods. The main Lie group of transformations of this equation is found. All invariant solutions of this equation are obtained either explicitly, or their search is reduced to solving systems of first-order differential equations. For these systems, boundary value problems that have a physical meaning are studied. For some specific values of the parameters included in them, these problems are solved numerically. The research carried out is especially relevant in rocket science, aircraft manufacturing, shipbuilding and other areas.

Keywords: deformation of a viscoelastic rod, power-law dependence of stress on strain and strain rate, invariant solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Деформирование изделий из новых вязкоупругих материалов при динамических нагрузках плохо описывается с помощью линейных моделей теории упругости и нелинейной модели динамического деформирования вязкоупругой среды с линейной зависимостью вязкой части напряжения от скорости деформации (модель Кельвина-Фойгта). По этой причине во многих статьях различные нелинейные модели изучались аналитически и численно. См., например, [1–11] и ссылки в них. Получение и исследование таких моделей особенно актуально для ракетостроения, авиастроения, судостроения и других областей, где используются новые вязкоупругие материалы.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В данной работе исследуется модель продольного динамического деформирования вязкоупругого стержня со степенной зависимостью напряжения от деформации и скорости деформации. Эта модель задается следующим нелинейным дифференциальным уравнением

$$v_{t't'} = \lambda v_{x'}^{\beta} v_{x'x'} + \mu v_{t'x'}^{-\alpha} v_{t'x'x'}, \tag{1}$$

где t' — время, x' — координата поперечного сечения стержня, $v = v\,(t',x')$ — продольное перемещение сечения стержня за время t'; $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ являются произвольными действительными числами такими, что

$$\alpha\beta\lambda\mu\,(\alpha-1)\,(\beta+1) \neq 0. \tag{2}$$

С помощью, безразмерных переменных в силу (2)

$$t = \left(\lambda^{\alpha}\mu^{-\beta}\right)^{\frac{1}{(\alpha\beta+2\alpha+\beta)}} t', x = x', u = \left(\lambda^{\alpha+1}\mu^{2}\right)^{\frac{-1}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}} v \tag{3}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u_{tt} = u_x^{\beta} u_{xx} + u_{tx}^{-\alpha} u_{txx}, \tag{4}$$

где α, β являются произвольными действительными числами такими, что

$$\alpha\beta\,(\alpha-1)\,(\beta+1) \neq 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) является основным объектом исследования в настоящей статье. Все полученные для него результаты переносятся на физические переменные с помощью преобразований (3). Основным методом исследования является метод группового анализа дифференциальных уравнений (см., например, [12 – 14]), являющийся одним из самых эффективных способов получения информации о решениях дифференциальных уравнений. Все алгоритмы группового анализа направлены на достижение этой цели.

2. СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА

Оператор, допускаемый уравнением (4), ищется в виде

$$X = \xi^0\,(t,x,u)\,\partial_t + \xi\,(t,x,u)\,\partial_x + \eta\,(t,x,u)\,\partial_u$$

где ξ^0, ξ, η — неизвестные функции своих переменных.

Условие инвариантности многообразия, заданного уравнением (4) при условии (5), относительно этого оператора и расщепление по параметрическим производным дает переопределенную систему определяющих уравнений. После второго продолжения эта система приводится в инволюцию. Решение этой системы показывает, что основной алгеброй Ли уравнения (4) при условии (5) является пятимерная алгебра L_5 с базисом

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_u, X_4 = t\partial_u,\\ &X_5 = 2\,(\alpha+\beta)\,t\partial_t + (\beta\,(\alpha+1)+2\alpha)\,x\partial_x + (\alpha\,(\beta+4)+\beta-2)\,u\partial_u. \end{aligned}$$

Эти свойства симметрии позволяют получить формулу, порождающую новые решения уравнения (4), из уже найденных ранее его решений. Пусть $u = f(t,x)$ — любое решение уравнения (4). Тогда решением этого уравнения является следующая функция

$$u = b_5^{-\alpha(\beta+1)-2\alpha} f\left(b_5^{2(\alpha+\beta)}(t+b_1), b_5^{\beta(\alpha+1)+2\alpha}(x+b_2)\right) + b_4(t+b_1) + b_3, \qquad (6)$$

где $b_m\,(m = 1, 2, ..., 4), b_5 > 0$ — произвольные вещественные числа.

Основная алгебра Ли L_5 уравнения (4) порождает группу Ли преобразований G_5. Действие группы G_5 на алгебру L_5 разбивает ее на непересекающиеся классы изоморфных подалгебр. Выбирая в каждом классе простейшего представителя, содержащего наименьшее число произвольных постоянных, мы получили оптимальную систему подалгебр этой алгебры. Каждой подалгебре из оптимальной системы подалгебр соответствует порождаемая ею подгруппа группы G_5. Тем самым, мы получили оптимальную систему подгрупп группы G_5. Применяя критерий инвариантности функции относительно группы Ли преобразований, мы нашли в пространстве $R^3(t,x,u)$ универсальный инвариант каждой подгруппы из этой оптимальной системы.

Уравнение (4) для любых α, β имеет тривиальное решение

$$u = c_1tx + c_2t + c_3x + c_4,$$

где $c_m\,(m = 1,2,3,4)$ — произвольные вещественные числа.

Далее мы рассматриваем только нетривиальные решения. Поэтому в оптимальные системы подгрупп мы включили только подгруппы, которые мы назвали нетривиальными. Для этих подгрупп, во-первых, выполняются необходимые условия существования инвариантного решения; во-вторых, решения, инвариантные относительно этих подгрупп, не являются тривиальными.

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы G_5 содержит 13 подгрупп. Из них только 9 подгрупп нетривиальны. Оптимальная система этих подгрупп и их универсальные инварианты приведены в таблице 1, где γ, ε — произвольные вещественные числа. В последнем столбце указаны дополнительные ограничения на параметры $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$.

Таблица 1. *Однопараметрические подгруппы* $\theta_{1.k}$.

k	Базис подалгебры	Универсальный инвариант	Ограничения на параметры
1	X_5	$tx^{\frac{-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}, x^{\frac{-2(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}u$	$\alpha\beta + 2\alpha + \beta \neq 0$
2	X_5	$x, t^{\frac{2}{\beta}}u$	$\alpha\beta + 2\alpha + \beta = 0$
3	$X_1 + \gamma X_5$	$x\exp(\gamma\beta(\beta+1)t), ux^{-\frac{\beta+2}{\beta}}$	$\alpha + \beta = 0, \gamma \neq 0$
4	$\gamma X_4 + X_5$	$tx^{\alpha-2}, \left(u + \frac{\gamma t}{2}\ln x\right)x^{\alpha-2}$	$\beta = -2, (\alpha-2)^2 + \gamma^2 \neq 0$
5	$\gamma X_3 + X_5$	$tx^{\frac{\alpha-2}{\alpha+1}}, u + \frac{\gamma}{2(\alpha-1)}\ln x$	$\alpha\beta + 4\alpha + \beta - 2 = 0, \alpha \neq 2$
6	$X_1 + \gamma X_4$	$x, u - \frac{\gamma t^2}{2}$	$\alpha < 0, \gamma \neq 0$
7	$X_1 \pm X_2$	$t \mp x, u$	—
8	$\gamma X_1 + \varepsilon X_4 + X_5$	$t + \frac{\gamma}{2}\ln x, u - \frac{\varepsilon t^2}{2\gamma}$	$\alpha = 2, \beta = -2, \varepsilon\gamma \neq 0$
9	$X_1 + \gamma X_5$	$x - \frac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}\ln t, ut^{\frac{2}{\beta}}$	$\alpha\beta + 2\alpha + \beta = 0, \gamma \neq 0$

В оптимальной системе двухпараметрических подгрупп нетривиальна только подгруппа $H_0 = \langle X_1 + \gamma X_4, X_5\rangle \left(\gamma \neq 0, \alpha = \frac{3\beta+2}{\beta}, \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)\right)$. Ее универсальным инвариантом является функция $\left(u - \frac{\gamma t^2}{2}\right)x^{-\frac{\beta+2}{\beta+1}}$.

Оптимальная система m-параметрических $(m = 3, 4)$ подгрупп не представлена, так как эти подгруппы тривиальны.

Базисные инвариантные подмодели определяются инвариантными решениями уравнения (4), вид которых определяют универсальные инварианты нетривиальных подгрупп из построенных оптимальных систем. В силу формулы (6) каждое такое решение порождает пятипараметрическое семейство инвариантных решений. Далее мы рассматриваем только базисные инвариантные решения, опуская при этом термин базисные и будем назвать эти решения просто инвариантными.

Во всех последующих формулах величины $c_m\,(m = 0{,}1{,}2{,}3)\,, u_0, u_1, u_2{,}t_0 \geqslant 0, x_0$ являются произвольными вещественными постоянными,

3. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 0

Уравнение (4) имеет только одно инвариантное решение ранга 0, которое определяется по формуле

$$u = \frac{\gamma t^2}{2} + \frac{1}{\beta+2}\left(\gamma\left(\left(\beta+1\right)x\right)^{\beta+2}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}, \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right). \tag{7}$$

При $\gamma > 0, x > 0, t \geqslant 0$ подмодель, задаваемая этим решением имеет физический смысл для всех указанных в (5) значений α, β. Продольное перемещение в каждом сечении стержня увеличивается со временем по квадратичному закону. Это означает, что стержень со временем разрушится.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 1

Таблица 1 определяет вид всех существенно различных (не связанных точечными преобразованиями) инвариантных решений ранга 1 уравнения (4).

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.1}$ при $\alpha + \beta \neq 0$ является автомодельным и имеет вид

$$u = x^{\frac{\alpha\beta+4\alpha+\beta-2}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}} w(\xi), \xi = t x^{\frac{-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}. \tag{8}$$

Функция $w(\xi)$ определяет динамическую составляющую продольного перемещения поперечного сечения стержня. Для этого решения величина $u\,(t{,}x)\cdot x^{-\frac{\alpha\beta+4\alpha+\beta-2}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 t^{\frac{\alpha\beta+2\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)}}$.

Подстановка (8) в (4) дает фактор-уравнение

$$\begin{gathered}2\left(\tfrac{(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)w-2(\alpha+\beta)\xi w'}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}\right)^{\beta}\left(\left(\alpha-1\right)\left(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2\right)w-\right.\\ \left.-2\left(\alpha+\beta\right)^2\xi^2 w''-\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-1\right)\left(\beta+4\right)\xi w'\right)+\\ +\left(\tfrac{(\alpha-1)(\beta+2)w'-2(\alpha+\beta)\xi w''}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}\right)^{-\alpha}\left(\left(\alpha-1\right)\left(\beta+1\right)w'-\right.\\ \left.\left.-\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha\beta+8\alpha+3\beta-4\right)\xi w''-2\left(\alpha+\beta\right)^2\xi^2 w'''\right)\right)=\left(\alpha\beta+2\alpha+\beta\right)^2 w'',\end{gathered} \tag{9}$$

где штрих означает, как и везде ниже, производную по переменной ξ.

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$\begin{gathered}w' = \tfrac{(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)w-q}{2(\alpha+\beta)\xi}, q' = p{,}p' = \tfrac{q^{\beta}p^{\alpha}}{(\alpha\beta+2\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\left(\tfrac{\alpha-1}{(\alpha+\beta)\xi}q - p\right)-\\ -\tfrac{\beta+1}{(\alpha+\beta)\xi}p+\tfrac{p^{\alpha}}{(\alpha+\beta)^2(\alpha\beta+2\alpha+\beta)^{\alpha-2}\xi^2}\left(p-\tfrac{(\alpha-1)(\beta+2)(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)w-q}{2(\alpha+\beta)\xi}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Действительно, для любого решения $w = w(\xi)$ уравнения (9) функции $w = w\,(\xi)\,, q = (\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)\,w - 2\,(\alpha+\beta)\,\xi w', p = q'$ являются решением системы (10). Обратно, для любого решения $w = w\,(\xi)\,, q = q\,(\xi)\,, p = p\,(\xi)$ системы (10) функция $w = w\,(\xi)$ является решением уравнения (9).

Решение (8) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ заданы продольное перемещение, скорость и ускорение его изменения:

$$u\left(t_0,x_0\right) = u_0 > 0, u_t\left(t_0,x_0\right) = u_1, u_{tt}\left(t_0,x_0\right) = u_2. \tag{11}$$

В этом случае начальные данные для системы (10) имеют вид

$$\begin{gathered} w\left(\xi_0\right) = u_0 x_0^{\frac{-(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}, q\left(\xi_0\right) = \left(\left(\alpha\beta + 4\alpha + \beta - 2\right) u_0 \; -2\left(\alpha+\beta\right) t_0 u_1\right) x_0^{\frac{-(\alpha\beta+4\alpha+\beta-2)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}, \\ p\left(\xi_0\right) = \left(\left(\alpha-1\right)\left(\beta+2\right) u_1 - 2\left(\alpha+\beta\right) t_0 u_2\right) x_0^{\frac{-(\alpha-1)(\beta-2)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}, \xi_0 = t_0 x_0^{\frac{-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2\alpha+\beta}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 0.4, \alpha = 2, \beta = 1$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$, определяющей зависимость продольного перемещения от времени, показан на Рис. 1. Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для системы (10) с условиями (12).

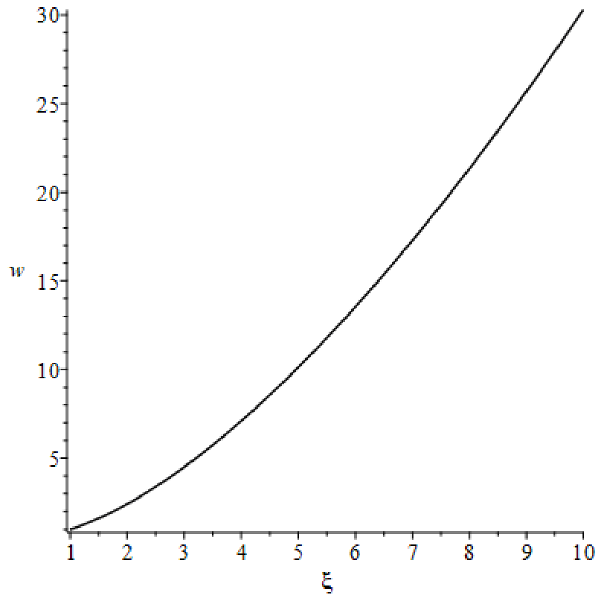

Рис. 1. *Динамическая составляющая продольного перемещения.*

В силу (8) из этого рисунка следует, что продольное перемещение для каждой точки x монотонно увеличивается со временем t. Это означает, что стержень со временем разрушится.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.1}$ при $\alpha + \beta = 0$ тоже является автомодельным и имеет вид

$$u = x^{\frac{\beta-2}{\beta}} w(t). \tag{13}$$

Для этого решения величина $u\left(t,x\right) \cdot x^{-\frac{\beta-2}{\beta}}$ постоянна в каждый фиксированный момент времени.

Подстановка (13) в (4) дает фактор-уравнение для динамической составляющей продольного перемещения

$$w'' = \frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)^{\beta+1}\left(w'^{\beta+1} + w^{\beta+1}\right). \tag{14}$$

Замечание 1. С помощью новой неизвестной функции $q\,(w) = w'\,(t)$ порядок уравнения (14) понижается. Функция $q\,(w)$ является решением уравнения

$$qq' = \frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)^{\beta+1}\left(q^{\beta+1} + w^{\beta+1}\right).$$

Функция $w(t)$ определяется квадратурой $\int \frac{dw}{q(w)} = t + c_1$. В частности, для $\beta = 1$ эта квадратура имеет вид $\int \frac{dw}{\sqrt{c_2\exp(36w) - 648w^2 - 36w - 1}} = 18\sqrt{2}\,(t + c_1)$.

Решение (13) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 \geqslant 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ заданы продольное перемещение и скорость его изменения:

$$u\,(t_0,x_0) = u_0 > 0, u_t\,(t_0,x_0) = u_1.$$

В этом случае начальные данные для уравнения (14) имеют вид

$$w\,(t_0) = u_0 x_0^{\frac{-(\beta+2)}{\beta}} > 0, w'\,(t_0) = u_1 x_0^{\frac{-(\beta+2)}{\beta}}. \tag{15}$$

Пусть $t_0 = 0, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, \beta = 5$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$, определяющей зависимость продольного перемещения от времени, показан на Рис. 2. Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для уравнения (14) с условиями (15).

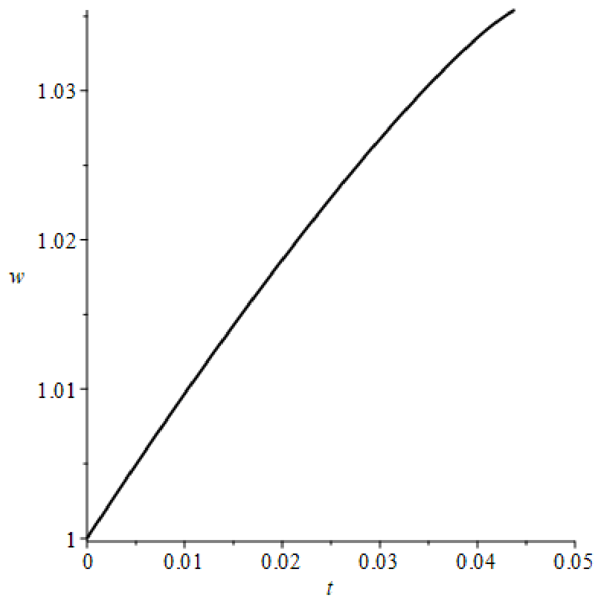

Рис. 2. *Динамическая составляющая продольного перемещения.*

Из этого рисунка следует, что продольное перемещение для каждой точки x монотонно увеличивается со временем t. Это означает, что стержень со временем разрушится.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.2}$ имеет вид

$$u = t^{\frac{-2}{\beta}} w(x). \tag{16}$$

Подстановка (16) в (4) дает фактор-уравнение

$$w''\left(w'^{\beta} + \left(\left(\frac{4}{\beta^2}\right)^{\beta+1} w'^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta+2}}\right) = \frac{2\,(\beta+2)}{\beta^2} w.$$

Порядок этого уравнения понижается с помощью функции $q(w) = w'(t)$, удовлетворяющей уравнению, неявное решение которого имеет вид

$$\frac{\beta+1}{\beta^2}w^2 + c_1 = \frac{q^{\beta+2}}{\beta+2} + \left(\frac{4}{\beta^2}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \begin{cases} \frac{\beta+2}{3\beta+4}q^{\frac{3\beta+4}{\beta+2}}, \beta \neq -\frac{4}{3}, \\ \ln q, \beta = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Функция $w(t)$ определяется квадратурой $\int \frac{dw}{q(w)} = t + c_1$.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.3}$ имеет вид

$$u = x^{\frac{\beta+2}{\beta}} w(\xi), \xi = x \exp\left(\gamma\beta\left(\beta+1\right)t\right). \tag{17}$$

Функция $w(\xi)$ определяет динамическую составляющую продольного перемещения поперечного сечения стержня. Для этого решения величина $u(t,x)\, x^{-\frac{\beta+2}{\beta}}$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 \exp\left(-\gamma\beta\left(\beta+1\right)t\right)$.

Подстановка (17) в (4) дает фактор-уравнение

$$\left(\gamma\beta\left(\beta+1\right)\right)^2 \xi \left(w' + \xi w''\right) = \left(\xi w' + \frac{\beta+2}{\beta}w\right)^{\beta} \left(\frac{2}{\beta}\left(\xi w' + \frac{\beta+2}{\beta}w\right) + \left(\xi w'' + \frac{2(\beta+1)}{\beta}w'\right)\right) +$$
$$\left(\gamma\beta\left(\beta+1\right)\xi\right)^{\beta+1}\left(\xi w'' + \frac{2(\beta+1)}{\beta}w'\right)^{\beta}\left(\frac{\beta+2}{\beta}\left(\xi w'' + \frac{2(\beta+1)}{\beta}w'\right) + \xi\left(\xi w''' + \frac{3\beta+2}{\beta}w''\right)\right).$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$\begin{gathered} w' = \frac{1}{\xi}q - \frac{\beta+2}{\beta}w, q' = p, \\ p' = -\frac{\beta+2}{\beta\xi}p + \frac{\left(\gamma(\beta+1)\right)^2\left(\beta^2\xi p - (\beta+2)(\beta q - (\beta+2)w)\right) - q^{\beta}\left(\frac{2}{\beta}q + p\right)}{\left(\gamma\beta(\beta+1)\right)^{\beta(\beta+1)}\xi^{\beta+2}p^{\beta}}. \end{gathered} \tag{18}$$

Решение (17) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ заданы продольное перемещение, скорость его изменения и скорость изменения его градиента:

$$u\left(t_0,x_0\right) = u_0 > 0, u_t\left(t_0,x_0\right) = u_1, u_{tx}\left(t_0,x_0\right) = u_2. \tag{19}$$

В этом случае начальные данные для системы (18) имеют вид

$$\begin{gathered} w\left(\xi_0\right) = u_0 x_0^{-\frac{\beta+2}{\beta}}, q\left(\xi_0\right) = \frac{\left(u_1 + \gamma(\beta+1)(\beta+2)u_0\right)}{\gamma\beta(\beta+1)} x_0^{-\frac{\beta+2}{\beta}}, \\ p\left(\xi_0\right) = \frac{u_2}{\gamma\beta(\beta+1)} x_0^{-\frac{\beta+2}{\beta}} \exp\left(-\gamma\beta\left(\beta+1\right)t_0\right), \xi_0 = x_0 \exp\left(\gamma\beta\left(\beta+1\right)t_0\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \beta = 2, \gamma = 1$. График функции $w = w(\xi)$ показан на Рис. 3. Он получен в результате решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши (18), (20).

В силу (17) из этого рисунка следует, что продольное перемещение для каждой точки x монотонно со временем уменьшается и становится равным нулю. Это означает, что разрушения стержня не произойдет.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.4}$ при имеет вид

$$u = -\frac{\gamma}{2}t\ln x + x^{2-\alpha}w(\xi), \xi = tx^{2-\alpha}. \tag{21}$$

Подстановка (21) в (4) дает фактор-уравнение

$$\begin{gathered} \frac{(\alpha-1)\left(-\frac{\gamma}{2}\xi + (\alpha-2)(\xi w' - w)\right) + (\alpha-2)\xi\left(-\frac{\gamma}{2} + (\alpha-2)\xi w''\right)}{\left(-\frac{\gamma}{2}\xi + (\alpha-2)(\xi w' - w)\right)^2} + \\ + \frac{-\frac{\gamma}{2} + (\alpha-2)\xi w'' + (\alpha-2)^2\xi(\xi w''' + w'')}{\left(-\frac{\gamma}{2} + (\alpha-2)\xi w''\right)^{\alpha}} + w'' = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

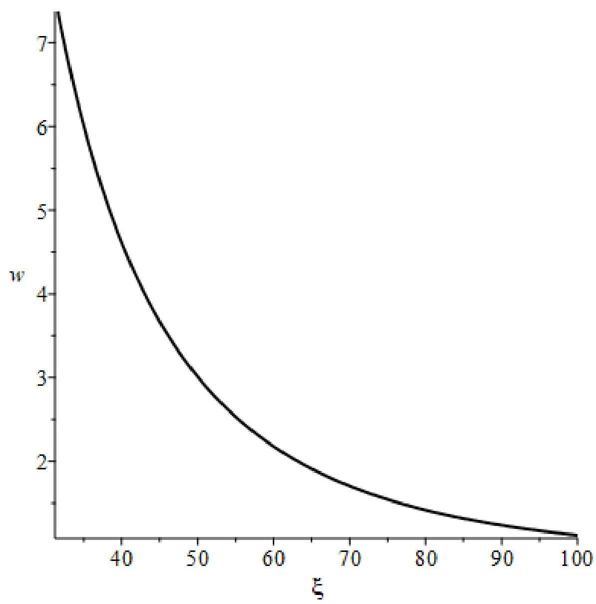

Рис. 3. *Динамическая составляющая продольного перемещения.*

Из (21), (22) следует, что при $\alpha = 2$ продольное перемещение определяется по следующей формуле

$$u = -\frac{\gamma}{2} t \ln x + \frac{t}{\gamma} (2 \ln t + t) + c_1 t + c_2.$$

Продольное перемещение в каждом сечении стержня увеличивается со временем. Это означает, что стержень со временем разрушится.

При $\alpha \neq 2$ уравнение (22) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &w' = \tfrac{w+v}{\xi}, q' = p, \\ &p' = -\tfrac{1}{(\alpha-2)^2 \xi} \left(\left(-\tfrac{\gamma}{2} + (\alpha-2) p \right)^{\alpha} \left(\tfrac{p}{\xi} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \tfrac{(\alpha-1)\left(-\frac{\gamma}{2}\xi + (\alpha-2) q\right) + (\alpha-2)\xi\left(-\frac{\gamma}{2} + (\alpha-2) p\right)}{\left(-\frac{\gamma}{2}\xi + (\alpha-2) q\right)^2} \right) - \tfrac{\gamma}{2} + (\alpha-2) p \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Для этого решения величина $\left(u\,(t,x) + \frac{\gamma}{2} t \ln x\right) x^{\alpha-2}$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 t^{\alpha-2}$,

Это решение можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ заданы продольное перемещение, скорость и ускорение его изменения: заданы формулами (11).

В этом случае начальные данные для системы (23) имеют вид

$$\begin{aligned} &w\,(\xi_0) = \left(u_0 + \tfrac{\gamma}{2} t_0 \ln x_0\right) x_0^{\alpha-2}, q\,(\xi_0) = (t_0 u_1 - u_0)\, x_0^{\alpha-2}, \\ &p\,(\xi_0) = t_0 u_2, \xi_0 = t_0 x_0^{\alpha-2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \alpha = -2, \gamma = 1$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$показан на Рис. 4. Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для системы (23) с условиями (24).

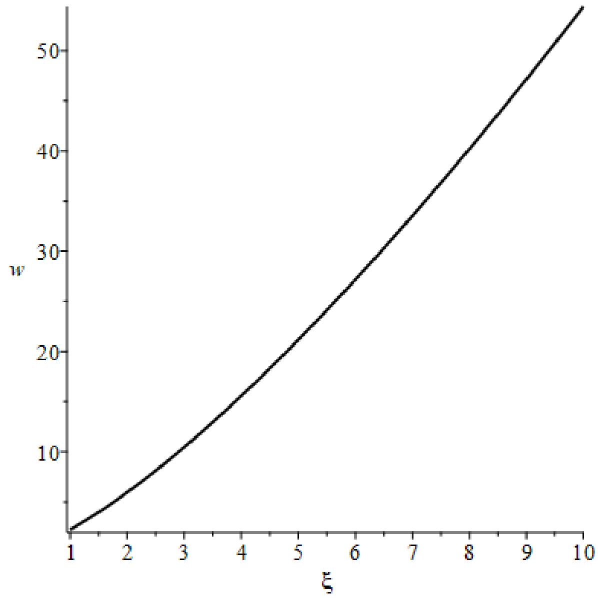

Рис. 4. *Распределение функции* $w(\xi)$.

В силу (21) из этого рисунка следует, что для принятых значений величин $t_0, x_0, u_0, u_1, u_2, \alpha, \gamma$ продольное перемещение для каждой точки x монотонно увеличивается со временем t. Это означает, что стержень со временем разрушится**.**

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.5}$ при имеет вид

$$u = -\frac{\gamma}{2\left(\alpha-1\right)}\ln x + w(\xi), \xi = tx^{\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}. \tag{25}$$

Для этого решения величина $u\left(t,x\right) + \frac{\gamma}{2(\alpha-1)}\ln x$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 t^{\frac{\alpha+1}{2-\alpha}}$.

Подстановка (25) в (4) дает фактор-уравнение

$$w'' - \left(-\tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)} + \tfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\xi w'\right)^{\frac{2-4\alpha}{\alpha+1}} \left(-\tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)} + \tfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\xi w' + \tfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha+1}\xi\left(w' + \xi w''\right)\right) + \\ \tfrac{(\alpha-2)^{1-\alpha}}{(\alpha+1)^{2-\alpha}}\left(w' + \xi w''\right)^{-\alpha}\left(-3\left(w' + \xi w''\right) + (\alpha-2)\,\xi\left(2w'' + \xi w'''\right)\right).$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$w' = q, q' = \tfrac{p-q}{\xi}, p' = \left(\tfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^{\alpha-2}\tfrac{p^{\alpha}}{\xi}\left(\tfrac{p-q}{\xi} - \left(-\tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)} + \right.\right. \\ \left.\left. + \tfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\xi q\right)^{\frac{2-4\alpha}{\alpha+1}}\left(-\tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)} + \tfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\xi q + \tfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha+1}\xi p\right)\right) + \tfrac{3p}{(\alpha-2)\xi}. \tag{26}$$

Решение (25) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ заданы продольное перемещение, его градиент и скорость изменения градиента:

$$u\left(t_0,x_0\right) = u_0 > 0, u_x\left(t_0,x_0\right) = u_1, u_{tx}\left(t_0,x_0\right) = u_2. \tag{27}$$

В этом случае начальные данные для системы (26) имеют вид

$$w\left(\xi_0\right) = u_0 + \tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)}\ln x_0, q\left(\xi_0\right) = \tfrac{(\alpha+1)}{(\alpha-2)t_0}\left(t_0 u_1 + \tfrac{\gamma}{2(\alpha-1)}\right)x_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha+1}}, \\ p\left(\xi_0\right) = \tfrac{(\alpha+1)}{(\alpha-2)}x_0^{\frac{3}{\alpha+1}}u_2, \xi_0 = t_0 x_0^{\frac{\alpha-2}{\alpha+1}}. \tag{28}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \alpha = -2, \gamma = 1$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$, определяющей зависимость продольного перемещения от времени, показан на Рис. 5. Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для системы (26) с условиями (28). В силу (25) из этого рисунка следует, что для принятых значений величин $t_0, x_0, u_0, u_1, u_2, \alpha, \gamma$ продольное перемещение для каждой точки x монотонно увеличивается со временем t. Это означает, что стержень со временем разрушится.

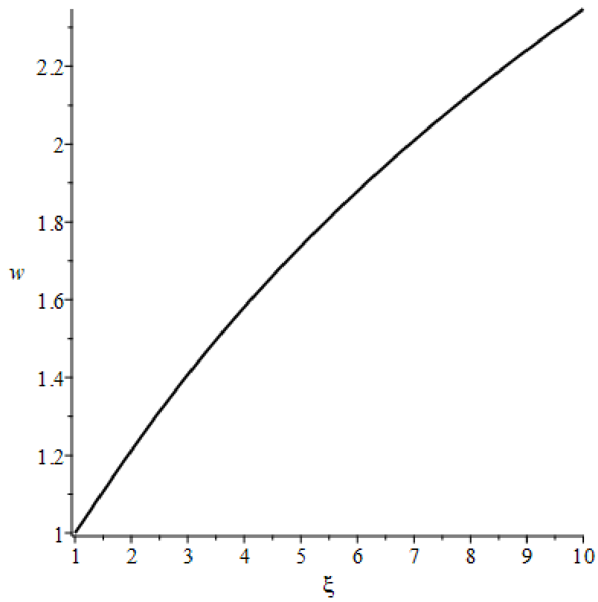

Рис. 5. *Динамическая составляющая продольного перемещения.*

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.6}$ при $\alpha < 0, \gamma \neq 0$ определяется по формуле

$$u = \frac{\gamma t^2}{2} + c_2 + \left(\frac{4}{\beta^2}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \begin{cases} \frac{(\gamma(\beta+1)x+c_1)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}}{\gamma(\beta+2)}, \beta \neq -2, \\ -\frac{1}{2\gamma} \ln\left(-\gamma x + c_1\right), \beta = -2. \end{cases}$$

Продольное перемещение увеличивается по квадратичному закону в зависимости от времени. Например, при $\beta = -1.5, \gamma = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0$ перемещение изменяется по закону $u = \frac{t^2}{2} + \frac{9}{4(1-x)}$ В этом случае разрушение стержня произойдет в окрестности точки $x = 1$. При $\beta = -2, \gamma = 0.5, c_1 = 5, c_2 = 7$ перемещение изменяется по закону $u = \frac{t^2}{4} + 7 - \ln\frac{10-x}{2}, x < 10$ В этом случае разрушение стержня произойдет в окрестности точки $x = 10$.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.7}$ имеет вид

$$u = w\left(\xi\right), \xi = t \mp x.$$

Это решение описывает бегущую волну. Функция $w\left(\xi\right)$ определяется квадратурой $\int \frac{dw}{q(w)} = \xi + c_1$, где функция $q\left(w\right)$является решением уравнения

$$w + c_2 = \left(2\left(\mp 1\right)^{\alpha}\left(1-\alpha\right)\right)^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \int \left(\frac{\left(\pm q\right)^{\beta+1}}{\beta+1} + q + c_3\right)^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} dq.$$

Например, при $\alpha = 1.5$ для верхнего знака функция $q\left(w\right)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{q^2}{2} - c_3 q - w - c_2 = \begin{cases} \frac{q^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}, \beta \neq -2, \\ \ln q, \beta = -2. \end{cases}$$

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.8}$ при $\alpha = 2, \beta = -2, \varepsilon\gamma \neq 0$ имеет вид

$$u = \frac{\varepsilon t^2}{2\gamma} + w\left(\xi\right), \xi = t + \frac{\gamma}{2} \ln x. \tag{29}$$

Для этого решения величина $u\left(t,x\right) - \frac{\varepsilon t^2}{2\gamma}$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 \exp\left(-\frac{2t}{\gamma}\right)$.

Подстановка (29) в (4) дает фактор-уравнение

$$\frac{\varepsilon}{\gamma}\left(w'w''\right)^2 + w''^3\left(w'^2 - 1\right) + \frac{2}{\gamma} w'w''\left(w'' + w'\right) - w'^2 w''' = 0. \tag{30}$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$w' = \frac{1}{q}, q' = \frac{q^2}{q - p}, p' = \frac{1}{q - p} - \frac{2}{\gamma} p - \frac{\varepsilon}{\gamma}. \tag{31}$$

Решение (29) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ продольное перемещение, его градиент и скорость изменения градиента заданы формулами (27).

В этом случае начальные данные для системы (31) имеют вид

$$w\left(\xi_0\right) = u_0 + \frac{\varepsilon}{2\gamma} t_0^2, q\left(\xi_0\right) = \frac{\gamma}{2x_0 u_1}, p\left(\xi_0\right) = \frac{\gamma}{2x_0 u_1}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1}\right), \xi_0 = t_0 + \frac{\gamma}{2} \ln x_0. \tag{32}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \gamma = 10$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$ показан на Рис. 6. Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для системы (31) с условиями (32).

В силу (29) из этого рисунка следует, что для принятых значений величин $t_0, x_0, u_0, u_1, u_2, \gamma$ продольное перемещение для каждой точки x монотонно увеличивается со временем t. Это означает, что стержень со временем разрушится.

Замечание 2. Уравнение (30) с помощью функции $\varphi\left(w\right) = w'\left(\xi\right)$ сводится к уравнению

$$\varphi\varphi'' = \left(\varphi^2 - 1\right)\varphi'^3 + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\varphi + \frac{2}{\gamma} - 1\right)\varphi'^2 + \frac{2}{\gamma}\varphi\varphi',$$

которое с помощью функции $\psi\left(\varphi\right) = \varphi'\left(w\right)$ сводится к уравнению

$$\varphi\psi' = \left(\varphi^2 - 1\right)\psi^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\varphi + \frac{2}{\gamma} - 1\right)\psi + \frac{2}{\gamma}\varphi.$$

Функция $\varphi\left(w\right)$ определяется квадратурой $\int \frac{d\varphi}{\psi(\varphi)} = w + c_1$.

Продольное перемещение определяется квадратурой $\int \frac{dw}{\varphi(w)} = \xi + c_2$.

Решение, инвариантное относительно подгруппы $\theta_{1.9}$ при $\alpha \neq 2, \alpha\beta + 4\alpha + \beta - 2 = 0$ имеет вид

$$u = t^{-\frac{2}{\beta}} w(\xi), \xi = x - \frac{\gamma\left(\beta + 2\right)}{2\left(\beta + 1\right)} \ln t. \tag{33}$$

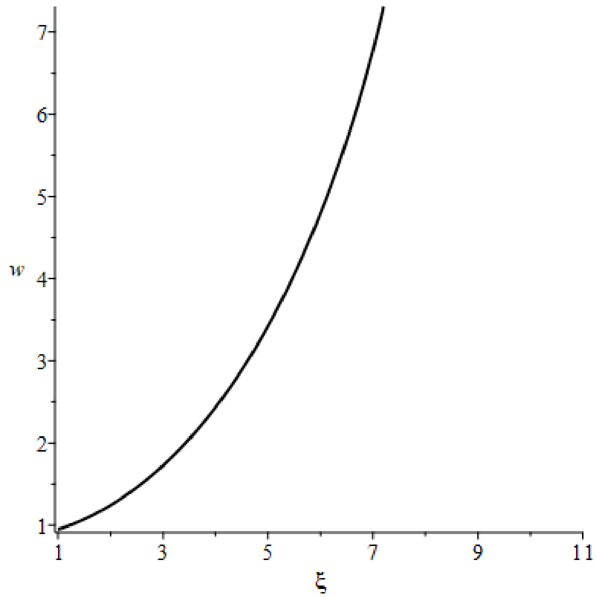

Рис. 6. *Распределение функции* $w(\xi)$.

Для этого решения величина $u\left(t,x\right)t^{\frac{2}{\beta}}$ постоянна вдоль каждой траектории $x = c_0 + \frac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}\ln t$.

Подстановка (33) в (4) дает фактор-уравнение

$$\begin{gathered}2\left(\beta+2\right)w+\tfrac{\gamma(\beta+2)(\beta+4)}{2(\beta+1)}w'+\left(\tfrac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}\right)^2 w''=\beta^2 w'^{\beta}w''+\\ +\beta^{\frac{2}{\beta+2}}\left(2w'+\tfrac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}w''\right)^{\frac{\beta}{\beta+2}}\left(2w''+\tfrac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}w'''\right).\end{gathered} \tag{34}$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе

$$\begin{gathered}w'=\tfrac{2(\beta+1)}{\gamma(\beta+2)}\left(q-2w\right), q'=p, p'=\left(\beta p\right)^{-\frac{2}{\beta+2}}\left(\left(\beta+2\right)q+\tfrac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}p-\right.\\ \left.-\beta^2\left(\tfrac{2(\beta+1)}{\gamma(\beta+2)}\right)^{\beta+1}\left(q-2w\right)^{\beta}\left(p-\tfrac{4(\beta+1)}{\gamma(\beta+2)}\left(q-2w\right)\right)\right).\end{gathered} \tag{35}$$

Решение (33) можно использовать для описания нелинейного продольного деформирования стержня, если в начальный момент времени $t = t_0 > 0$ в фиксированной точке $x = x_0 > 0$ продольное перемещение, его градиент и скорость изменения градиента заданы формулами (27).

В этом случае начальные данные для системы (34) имеют вид

$$\begin{gathered}w\left(\xi_0\right)=t_0^{\frac{2}{\beta}}u_0, q\left(\xi_0\right)=t_0^{\frac{2}{\beta}}\left(u_0+\tfrac{\gamma(\beta+2)u_1}{2(\beta+1)}\right), p\left(\xi_0\right)=\beta t_0^{-\frac{\beta+2}{\beta}}u_2,\\ \xi_0=x_0-\tfrac{\gamma(\beta+2)}{2(\beta+1)}\ln t_0.\end{gathered} \tag{36}$$

Пусть $t_0 = 1, x_0 = 1, u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \beta = -2, \gamma = 1$. В этом случае график функции $w = w(\xi)$ показан на Рис. 7.

Этот график получен в результате численного решения методом Рунге-Кутта-Фельберга (4–5 порядка точности) [15] задачи Коши для системы (35) с условиями (36).

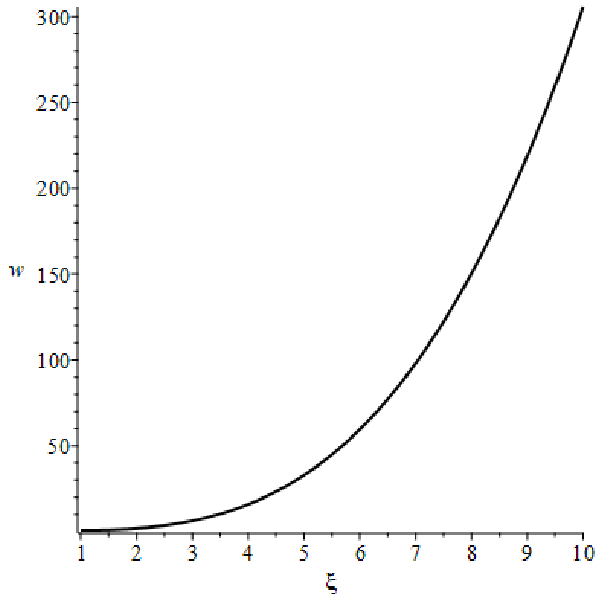

Рис. 7. *Распределение функции $w(\xi)$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе методами группового анализа исследована модель продольного динамического деформирования вязкоупругого стержня со степенной зависимостью напряжения от деформации и скорости деформации, заданная нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными третьего порядка. Получены все инвариантные решения этого уравнения. Численно исследовались нелинейные продольные деформации стержня, для которых в начальный момент времени в фиксированной точке заданы либо продольное перемещение, скорость и ускорение его изменения, либо продольное перемещение и скорость его изменения, либо продольное перемещение, скорость его изменения и скорость изменения его градиента, либо продольное перемещение, его градиент и скорость изменения градиента. Результаты представлены на Рис. 1 –7.

Механическая значимость полученных решений заключается в следующем: 1) эти решения описывают специальные нелинейные динамические продольные деформации вязкоупругого стержня со степенной зависимостью напряжения от деформации и скорости деформации, 2) эти решения могут быть использованы в качестве тестовых в численных расчетах, которые выполняются при исследовании нелинейных динамических продольных деформаций изделий из новых вязкоупругих материалов, 3) эти решения могут быть использованы для проверки адекватности исходной модели и физических процессов после проведения экспериментов, соответствующих этим решениям, и сравнения полученных теоретические и экспериментальные результаты.

Проведенные исследования особенно актуальны в ракетостроении, авиастроении, судостроении и других областях, где применяются новые вязкоупругие материалы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greenderg, J. M. On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation / J. M. Greenderg, R. C. MacCamy, V. J. Mizel // J. Math. Mech. — 1968. — V. 17(7). — P. 707–728.

2. Greenberg, J. M. On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation /

J. M. Greenberg // J. Math. Anal. Appl. — 1969. — V. 25. — P. 575–591.

3. Chirkunov, Yu. A. Nonlinear longitudinal oscillations of viscoelastic rod in Kelvin model / Yu. A. Chirkunov // J. Appl. Math. Mech. — 2015. — V. 79, № 5. — P. 506–513.

4. Ball, J. M. Quasistatic nonlinear viscoelasticity and gradient flows / J. M. Ball, Y. Sengul // J. Dyn. Diff. Eq. — 2015. — V. 27. — P. 405–442.

5. Dafermos, C. M. The mixed initial boundary value problem for the equations of nonlinear one dimensional viscoelasticity / C. M. Dafermos // J. Diff. Eq. — 1969. — V. 6. — P. 71–86.

6. Fu, Y. Nonlinear Elasticity: Theory and Applications / Y. Fu, R. W. Ogden. — Cambridge : Univ. Press, 2001.

7. Ferry, J. D. Viscoelastic Properties of Polymers / J. D. Ferry. — Wiley, New York, 1980.

8. Kecs, W. W. Cauchy's problem for the generalized equation of the longitudinal vibrations of elastic rods / W. W. Kecs, A. Torna // Eur. J. Mech. A. — 1995. — V. 14(5). — P. 827–835.

9. A review of nonlinear oscillatory shear tests: Analysis and application of large amplitude oscillatory shear / K. Hyun et al. // Progr. Pol. Sci. — 2011. — V. 36. — P. 1697–1753.

10. Pucci, E. On a special class of nonlinear viscoelastic solids / E. Pucci and G. Saccomandi // Math. Mech. Solids. — 2009. — V. 15. — P. 803– 811.

11. Chirkunov, Yu. A. Nonlinear longitudinal deformations of an elastic rod under the action of a non-stationary singular source / Yu. A. Chirkunov // Int. J. Non-Linear Mech. — 2018. — V. 124. — P. 103514.

12. Чиркунов, Ю. А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.

13. Чиркунов, Ю. А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений / Ю. А. Чиркунов. — Новосибирск : НГУЭиУ, 2007. — 362 с.

14. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 399 с.

15. Butcher, J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J. C. Butcher. — New York : John Wiley & Sons, 2016. — 538 p.

REFERENCES

1. Greenderg J.M., MacCamy R.C., Mizel V.J. On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation. J. Math. Mech., 1968, vol. 17(7), pp. 707–728.

2. Greenberg J.M. On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation. J. Math. Anal. Appl., 1969, vol. 25, pp. 575–591.

3. Chirkunov Yu.A. Nonlinear longitudinal oscillations of viscoelastic rod in Kelvin model. J. Appl. Math. Mech., 2015, vol. 79, no. 5, pp. 506–513.

4. Ball J. M., Sengul Y. Quasistatic nonlinear viscoelasticity and gradient flows, J. Dyn. Diff. Eq., 2015, vol. 27, pp. 405–442.

5. Dafermos C.M. The mixed initial boundary value problem for the equations of nonlinear one dimensional viscoelasticity. J. Diff. Eq., 1969, vol. 6, pp. 71–86.

6. Fu Y., Ogden R.W. Nonlinear Elasticity: Theory and Applications. Cambridge. Univ. Press, 2001.

7. Ferry J.D. Viscoelastic Properties of Polymers. Wiley, New York, 1980.

8. Kecs W. W., Torna A. Cauchy's problem for the generalized equation of the longitudinal vibrations of elastic rods. Eur. J. Mech. A., 1995, vol. 14(5), pp. 827–835.

9. Hyun K., Wilhelmb M., Klein C.O., Cho K.S., Nam J.G., Ahn K.H., Lee S.J., Ewoldt R.H., McKinley G.H. A review of nonlinear oscillatory shear tests: Analysis and application of large amplitude oscillatory shear. Progr. Pol. Sci., 2011, vol. 36, pp. 1697–1753.

10. Pucci E. Saccomandi G. On a special class of nonlinear viscoelastic solids, Math. Mech. Solids, 2009, vol. 15, pp. 803– 811.

11. Chirkunov Yu.A. Nonlinear longitudinal deformations of an elastic rod under the action of a non-stationary singular source. Int. J. Non-Linear Mech., 2018, vol. 124, p. 103514.

12. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. [CHirkunov YU.A., Habirov S.V. Elementy simmetrichnogo analiza differencial'nyh uravnenij mekhaniki sploshnoj sredy]. Novosibirsk, 2012, 659 p.

13. Chirkunov Yu.A. Group analysis of linear and quasilinear differential equations. [CHirkunov YU.A. Gruppovoj analiz linejnyh i kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij]. Novosibirsk, 2007, 362 p.

14. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. [Ovsyannikov L.V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij]. Moscow, 1978, 399 p.

15. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, 2016, 538 p.

Чиркунов Юрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой высшей математики, зав. НИЛ «Математические модели механики сплошной среды», Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия
E-mail: chr101@mail.ru

Chirkunov Yuri Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics sciences, associate professor, head Department of Higher Mathematics, head Research Laboratory «Mathematical Models of Continuum Mechanics», Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia
E-mail: chr101@mail.ru

Чиркунов Михаил Юрьевич, аспирант кафедры высшей математики Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия

Chirkunov Mikhail Yurievich, postgraduate student of the Department of Higher Mathematics Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia