

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА–КИПРИЯНОВА

Н. И. Трусова

*Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семенова-Тян-Шанского*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Исследуется линейный весовой частно-интегральный оператор с мерой интегрирования $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx_i$, $\gamma_i > -1$ и линейный весовой частно-интегральный оператор от сферически симметричных функций в $\mathbb{R}_n$ в весовом пространстве Лебега–Киприянова $L_p^\gamma(D)$. Получен достаточный признак ограниченности данных операторов в $L_p^\gamma(D)$. Изучается частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода с линейным весовым частно-интегральным оператором и линейным весовым частно-интегральным оператором от сферически симметричных функций. Решение данных уравнений построено методом последовательных приближений в виде операторного ряда Неймана.

Ключевые слова: весовой частно-интегральный оператор, интегральная мера Лебега–Киприянова, весовое анизотропное пространство Лебега–Киприянова, уравнение Фредгольма второго рода.

SOLUTION OF A PARTICULAR-INTEGRAL FREDHOLM EQUATION OF THE SECOND KIND IN THE LEBEGH–KIPRIYANOV SPACE

N. I. Trusova

Abstract. We study a linear weighted partial integral operator with an integration measure $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx_i$, $\gamma_i > -1$ and a linear weighted partial integral operator of spherically symmetric functions in $\mathbb{R}_n$ in the weighted Lebesgue–Kipriyanov space $L_p^\gamma(D)$. A sufficient criterion for boundedness of these operators in $L_p^\gamma(D)$ is obtained. We study the partial integral Fredholm equation of the second kind with a linear weighted partial integral operator and a linear weighted partial integral operator of spherically symmetric functions. The solution of these equations is constructed by the method of successive approximations in the form of the Neumann operator series.

Keywords: weighted partial-integral operator, Lebesgue–Kipriyanov integral measure, weighted Lebesgue–Kipriyanov anisotropic space, Fredholm equation of the second kind.

ВВЕДЕНИЕ

Мера Лебега–Киприянова $d\mu_\gamma = x^{-\gamma} dx$ со слабой особенностью (при $-1 < -\gamma < 0$) введена в работе [1]. Интерес к интегральным операциям по мере Лебега–Киприянова вызван тем, что применение такой меры (со слабой особенностью) приводит к интегрированию по областям, которым в силу некоторых внешних признаков, приписывается дробная размерность

области интегрирования. Это показано в работе [2] на основе того, что интеграл Римана-Лиувилля второго рода

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t) (t-x)^{\alpha-1} dt$$

дробного порядка $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} = n - 1 + \{\alpha\}$ при $x = 0$ и при $\{\alpha\} \rightarrow 0$ сводится к интегралу по шару в $\mathbb{R}_n$, а при $\{\alpha\} \rightarrow 1$ сводится к интегралу по шару в $\mathbb{R}_{n+1}$. Более того, в работе [3] установлена простая связь между фрактальными размерностями Хаусдорфа–Безиковича и коэффициентом γ .

Многие известные и выдающиеся математики обратили внимание на так называемые *частные интегралы*. К ним в первую очередь следует отнести В. Вольтерра, Э. Гурса, В.И. Романовского.

Частно-интегральные операторы (ЧИ-операторы), а также уравнения Фредгольма второго рода с ЧИ-операторами в $\mathbb{R}_2$ с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций изучались в [4], [5], [6]. Практически в этих монографиях представлена полная теория ЧИ-операторов в *sup*-нормах. Но в [5] А. С. Калитвиным поставлена задача об исследовании ЧИ-операторов в L_p -классах Лебега.

В работе [7] выяснено, что ЧИ-операторы в лебеговских пространствах функций действуют по разному по переменным интегрирования ЧИ-оператора и по свободным от интегрирования переменным. Это привело к необходимости вводить анизотропные классы функций, типа изучаемых ранее в работах С. М. Никольского и его последователями (например, см. монографию [8]). Под анизотропностью понимается наличие различных свойств по разным направлениям аргумента, как у ядер операторов, так и у функций.

В работах [9] и [10] исследовалось непрерывное действие ЧИ-операторов в пространствах функций с анизотропностью другого рода, вызванной применением смешанных *sup*- L_p -норм. Эти результаты, в некотором смысле, генерированы основными работами по теории ЧИ-операторов [4], [5], [6].

Изучению многомерных ЧИ-операторов в анизотропном пространстве $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ с, вообще говоря, разными показателями $p_i \geq 1$ посвящены работы [11] и [12].

Обобщением ЧИ-операторов являются *весовые ЧИ-операторы*, совпадающие с ЧИ-операторами, когда коэффициенты соответствующего мультииндекса γ равны нулю. Исследования указанных операторов и уравнений Фредгольма второго рода с весовыми ЧИ-операторами в пространстве Лебега–Киприянова $L_p^{\gamma}(D)$ опубликованы в [13], [14].

В данной работе изучаются *весовые линейные частно-интегральные операторы* (весовые ЛЧИ-операторы), которые строятся по схеме классических линейных ЧИ-операторов, используемых в работах [4], [5], [6]. Эти операторы включают в себя (помимо полного набора весовых ЧИ-операторов) оператор умножения на функцию и весовой интегральный оператор. Оба эти «крайних оператора» формально не являются ЧИ-операторами, однако удовлетворяют (соответственно измененным) правилам непрерывного действия ЧИ-операторов в анизотропных лебеговских классах функций.

На основе непрерывного действия весового ЛЧИ-оператора строятся решения уравнения Фредгольма второго рода. Дополнительно приводятся результаты исследований весовых ЛЧИ-операторов от сферически симметричных функций в $L_p^{\gamma}(D)$ с интегральной мерой Лебега–Киприянова

$$d\mu_{\gamma_{\alpha}}(t_{\alpha}) = t_{\alpha}^{\gamma_{\alpha}} dt_{\alpha} = \prod_{i=1}^m t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}} dt_{\alpha}, \quad \gamma_{\alpha_i} > -1,$$

где $1 \leq m \leq n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

1. ВЕСОВЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МЕРОЙ ЛЕБЕГА-КИПРИЯНОВА

Пусть $D = \{x : 0 < x_i < b_i\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$ и $D = D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar{\alpha}}}$ и m — размерность параллелепипеда D_{x_α} , $0 \leq m \leq n$. Соответственно $n - m$ — размерность параллелепипеда $D_{x_{\bar{\alpha}}}$. Чтобы подчеркнуть зависимость ЧИ-оператора от размерности области интегрирования, иногда используем обозначение $D_{x_\alpha}^{(m)}$.

Пусть $\gamma_i > -1$. Через $L_p^\gamma(D)$ обозначим весовое пространство Лебега—Киприянова функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p^\gamma(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p d\mu_\gamma(x) \right)^{1/p}, \quad d\mu_\gamma(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx.$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i > -1$. Весовое анизотропное пространство Лебега—Киприянова $L_{\mathbf{p}}^\gamma(D_1 \times \dots \times D_n)$ определено нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)} = & \left(\int_{D_n} \left(\int_{D_{n-1}} \dots \left(\int_{D_2} \left[\int_{D_1} |u(x)|^{p_1} d\mu_{\gamma_1}(x_1) \right]^{p_2/p_1} d\mu_{\gamma_2}(x_2) \right)^{p_3/p_2} \dots \right. \right. \\ & \left. \left. \dots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} dx_{n-1} \right)^{p_n/p_{n-1}} d\mu_{\gamma_n}(x_n) \right)^{1/p_n}, \end{aligned}$$

где $D_i = (0, b_i)$.

Неравенство Гельдера. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\gamma_i \in (-\infty; +\infty)$, $f(x) \in L_p^\gamma(D)$ и $g(x) \in L_q^\gamma(D)$. Справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned} \int_D |f(x)g(x)| d\mu_\gamma(x) & \leq \left(\int_D |f(x)|^p d\mu_\gamma(x) \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q d\mu_\gamma(x) \right)^{1/q} = \\ & = \|f\|_{L_p^\gamma(D)} \|g\|_{L_q^\gamma(D)}. \end{aligned}$$

Обобщенное неравенство Минковского. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\gamma_i > -1$, $f(x) \in L_p^\gamma(D_x)$. Справедливо неравенство

$$\left\| \int_{D_y} f(\cdot, y) d\mu_\gamma(y) \right\|_{L_p^\gamma(D_x)} \leq \int_{D_y} \|f(\cdot, y)\|_{L_p^\gamma(D_x)} d\mu_\gamma(y).$$

Пусть $x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$, $1 \leq m \leq n$. Весовым частно-интегральным оператором (весовым ЧИ-оператором) в $\mathbb{R}_n$ назовем выражение вида

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_{t_\alpha}^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha, x_{\bar{\alpha}}) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha), \quad (1)$$

$$d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) = \prod_{i=1}^m t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}} dt_\alpha, \quad 1 \leq m \leq n, \quad \gamma_{\alpha_i} > -1$$

с ядром $k_\alpha(x; t_\alpha)$ и функцией $u(t_\alpha, x_\alpha)$, принадлежащим весовым анизотропным классам функций Лебега—Киприянова.

При $m = n$ частно-интегральный оператор превращается в интегральный оператор.

К весовому ЧИ-оператору (1) формально присоединяются "крайние" операторы: K^0 — оператор умножения на функцию (при $\alpha = 0$ в (1) и $m = 0$)

$$(K_0 u)(x) = k_0(x)u(x); \quad (2)$$

$K_{1, \dots, n}^{(n)}$ — весовой интегральный оператор (при $\alpha = (1, \dots, n)$ и $m = n$)

$$(K_{1, \dots, n}^{(n)} u)(x) = \int_{D^n} k(x, t) u(t) d\mu_\gamma(t), \quad x, t \in D \subset \mathbb{R}_n. \quad (3)$$

Оставшимся m операторам (т.е. для $1 \leq m < n$) соответствуют весовые ЧИ-операторы (1). "Крайние" операторы не являются частно-интегральными, как и в классическом случае (при $\gamma_\alpha = 0$) (см. [4], [5], [6]).

Линейным весовым ЧИ-оператором (весовым ЛЧИ-оператором) называется сумма

$$(Ku)(x) = \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha} (K_\alpha^{(m)} u)(x), \quad (4)$$

в которой размерность области интегрирования каждого из слагаемых $K_\alpha^{(m)}$ меняется от 0 до n .

Линейным частно-интегральным уравнением Фредгольма второго рода (с весовым ЛЧИ-оператором (4)) называется уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K \varphi(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n. \quad (5)$$

1.1. ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ОГРАНИЧЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ВЕСОВОГО ЧИ-ОПЕРАТОРА

Весовой ЛЧИ-оператор (4) рассматриваем в весовом анизотропном пространстве Лебега—Киприянова $L_p^\gamma(D)$, $\gamma_i > -1$.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Введем пространство $M_{L_p^\gamma}$ с нормой

$$\|u\|_{M_{L_p^\gamma}} = \max \left\{ \|u\|_{L_{p^2}^\gamma(D)}, \right. \\ \left. \max_{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq (1, \dots, n) \end{array} \right| \|u\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))}, \|u\|_{L_p^\gamma(D_t)} \right\} \right\}.$$

Теорема 1. Пусть

$$k_0 \in L_{pp'}^\gamma(D), \quad k_\alpha \in L_{pp'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))$$

и

$$k_{1, \dots, n} \in L_{p'}^\gamma(D_t; L_p^\gamma(D)).$$

Тогда

$$\|K u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq C \|u\|_{M_{L_p^\gamma}},$$

где

$$C = \|k_0\|_{L_{pp'}^\gamma(D)} + \\ + \sum_{\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq (1, \dots, n)} \|k_\alpha\|_{L_{pp'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))} + \|k_{1, \dots, n}\|_{L_{p'}^\gamma(D_t; L_p^\gamma(D))}.$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [2] (теорема 5).

1.2. ИТЕРАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ВЕСОВОГО ЧИ-ОПЕРАТОРА

Далее необходимо неравенство об ограниченности натуральных степеней весового ЧИ-оператора (1)

$$\|K_\alpha^r f\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \prod_{i=1}^r \|k_\alpha\|_{L_{p^i p'}^{\gamma\bar{\alpha}}(D_{x_\alpha}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))} \cdot \|f\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma\bar{\alpha}}(D_{x_\alpha}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Соответствующее неравенство справедливо для всех значений α и его доказательство приведено в работе [14].

Обозначим через $\kappa_{m=1, n-1}^\gamma(\alpha(m))$ последовательность, состоящую из норм ядер весовых ЧИ-операторов

$$\|k_\alpha\|_{L_{p^i p'}^{\gamma\bar{\alpha}}(D_{x_\alpha}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))}.$$

Введем пространство $M_{L_p^\gamma}(D)$ с нормой

$$\|u\|_{M_{L_p^\gamma}} = \sup \left\{ \|u\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma\bar{\alpha}}(D_{x_\alpha}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \right\}, \|u\|_{L_p^\gamma(D_t)} \Bigg\}_{r=1}^\infty.$$

Имеет место следующий достаточный признак ограниченности итераций порядка r , $r = 1, 2, \dots$ оператора K .

Теорема 2. Пусть $p \geq 1$, $1/p + 1/p' = 1$ и натуральное число $i \leq r$ и пусть

$$G = \sup_{m, \alpha} \left\{ \|k_0\|_{L_{p^r p'}^\gamma(D)}, \kappa_{m=1, n-1}^\gamma(\alpha(m)), \|k_{1, \dots, n}\|_{L_{p'}^\gamma(D_t; L_p^\gamma(D))} \right\}_{r=1}^\infty.$$

Тогда для любого натурального числа r

$$\|K^r u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq G^r \|u\|_{M_{L_p^\gamma}(D)}. \quad (6)$$

Доказательство. Имеем для $r = 1$

$$\|K u\|_{L_p^\gamma(D)} = \left\| \left(K_0 + \sum_{\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \dots, n} K_\alpha + K_{1, \dots, n}^{(n)} \right) u \right\|_{L_p^\gamma(D)}. \quad (7)$$

К равенству (7) применяем неравенство Минковского для конечных сумм, далее теорему 1. Получим

$$\begin{aligned} \|K u\|_{L_p^\gamma(D)} = & \left(\|k_0\|_{L_{p p'}^\gamma(D)} + \sum_{\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \dots, n} \|k_\alpha\|_{L_{p p'}^{\gamma\bar{\alpha}}(D_{x_\alpha}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha}))} + \right. \\ & \left. + \|k_{1, \dots, n}\|_{L_{p'}^\gamma(D_t; L_p^\gamma(D))} \right) \|u\|_{M_{L_p^\gamma}(D)}. \end{aligned}$$

В результате неравенство (6) выполнено.

Пусть $r = 2$. Воспользовавшись схемой доказательства, предложенной в работе [14] (теорема 2), имеем

$$\|K^2 u\|_{L_p^\gamma(D)} =$$

$$= \|k_0\|_{L_{p,p'}^\gamma(D)} \|Ku\|_{L_{p^2}^\gamma(D)} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\alpha} \|k_{\alpha}\|_{L_{p,p'}^{\gamma_{\alpha}}(D_{x_{\alpha}}; L_{(p',p)}^{(\gamma_{\alpha},\gamma_{\alpha})}(D_{t_{\alpha}} \times D_{x_{\alpha}}))} \|Ku\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\alpha}}(D_{x_{\alpha}}; L_p^{\gamma_{\alpha}}(D_{t_{\alpha}}))} + \\ + \|k_{1,\dots,n}\|_{L_{p'}^\gamma(D_t; L_p^\gamma(D))} \|Ku\|_{L_p^\gamma(D_t)}.$$

Согласно теореме 1, получим

$$\|K^2 u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq G^2 \|u\|_{M_{L_p^\gamma(D)}}.$$

Пусть r — произвольное натуральное число. Тогда

$$\|K^r u\|_{L_p^\gamma(D)} \leq G \|K^{r-1} u\|_{M_{L_p^\gamma(D)}} \leq G^2 \|K^{r-2} u\|_{M_{L_p^\gamma(D)}} \leq \dots \leq G^r \|u\|_{M_{L_p^\gamma(D)}}.$$

Доказательство закончено.

1.3. РЕШЕНИЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ K

Линейное весовое частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода включает в себя, кроме весовых ЧИ-операторов K_{α} , "крайние операторы" вида (2) и (3). Их наличие приводит к ограничениям, существенно отличающимся от ограничений весового частно-интегрального уравнения Фредгольма второго рода, рассмотренного в [14].

Пусть $\gamma_i > -1$. Через $L_{\infty}^{\gamma}(D)$ обозначим пространство существенно ограниченных функций $x^{\gamma} f$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{\infty}^{\gamma}(D)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p^{\gamma}(D)} = \sup_{x \in D} \text{vrai } |f(x)|$$

(см. [8], стр. 8).

Для нахождения решения уравнения (5) используем метод последовательных приближений

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(x) &= f(x), \\ \varphi^{(1)}(x) &= f(x) + \lambda(K\varphi^{(0)})(x), \\ \varphi^{(2)}(x) &= f(x) + \lambda(K\varphi^{(1)})(x) = f(x) + \lambda(K[f(x) + \lambda Kf(x)]) = \\ &= f(x) + \lambda Kf(x) + \lambda^2 K^2 f(x). \end{aligned}$$

Тогда ν -е приближение решения примет вид

$$\varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{r=0}^{\nu} \lambda^r (K^r f)(x). \quad (8)$$

Следовательно, предполагаем, что решение уравнения (5) определяется рядом Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r (K^r f)(x).$$

Пусть

$$P = \sup_r \left\{ [\mu(D_{x_{\alpha}})]^{\frac{1}{p^t p'}}, [\mu(D)]^{\frac{1}{p^t p'}} \right\}_{r=1}^{\infty},$$

$$S = \max \left\{ \|k_0\|_{L_{\infty}^{\gamma}(D)}, \|k_{\alpha}\|_{L_{\infty}^{\gamma_{\alpha}}(D_{x_{\alpha}}; L_{(p',p)}^{(\gamma_{\alpha},\gamma_{\alpha})}(D_{t_{\alpha}}, x_{\alpha}))}, \|k_{1,\dots,n}\|_{L_{p'}^{\gamma_{\alpha}}(D_{t_{\alpha}}; L_p^{\gamma_{\alpha}}(D_{x_{\alpha}}))} \right\}.$$

Введем пространство функций $M_{L(p,\infty)}^\gamma$, в котором норма имеет вид

$$\|f\|_{M_{L(p,\infty)}^\gamma} = \sup \left\{ \|f\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma\overline{\alpha}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{p^\alpha}^{\gamma\alpha}(D_{t_\alpha}))} \right\}_{r=1}^\infty < \infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть

$$\begin{aligned} k_0 &\in L_\infty^\gamma(D), \\ k_\alpha &\in L_\infty^{\gamma\overline{\alpha}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p',p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})), \quad \alpha = \alpha(m), \quad m = \overline{1, n-1}, \\ k_{1,\dots,n} &\in L_{p'}^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}; L_{p^\alpha}^{\gamma_\alpha}(D_{x_\alpha})) \end{aligned}$$

и пусть $|\lambda| P S < 1$. Тогда в $L_{(p,\infty)}^\gamma(D) = L_\infty^{\gamma\overline{\alpha}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{p^\alpha}^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))$ существует предел $\Phi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu$ функциональной последовательности:

$$\Phi_\nu f = \varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{r=0}^\nu \lambda^r (K^r f)(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_{(p,\infty)}^\gamma(D)$ в $L_p^\gamma(D)$ и

$$\|\Phi\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\Phi_\nu\|_{L_{(p,\infty)}^\gamma(D)}. \quad (9)$$

Решение уравнения (5) единственно и существует в виде

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r (K^r f)(x),$$

причем

$$\|\varphi\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \frac{\|f\|_{M_{L(p,\infty)}^\gamma}}{1 - |\lambda| P S}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по классической схеме последовательных приближений с интегральной метрикой (см., например [15], глава II). Теорема подобная теореме 3 для ЧИ-оператора в анизотропном L_p классе Лебега доказана в [7].

Приведем краткую схему доказательства теоремы 3. Пусть r — произвольное натуральное число. Используя обозначения, введенных ранее констант P и S , имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(\nu+r)} - \varphi^{(\nu)}\|_{L_p^\gamma(D)} &\leq \|f\|_{L_{p^2}^{\gamma\overline{\alpha}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{p^\alpha}^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} (|\lambda| P S)^\nu \sum_{r=1}^\infty |\lambda|^r P^r S^r \leq \\ &\leq \|f\|_{L_{p^2}^{\gamma\overline{\alpha}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{p^\alpha}^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} (|\lambda| P S)^\nu \frac{1}{1 - |\lambda| P S}. \end{aligned}$$

С увеличением ν величина $(|\lambda| P S)^\nu$ стремится к нулю. Следовательно, последовательность (8) — фундаментальная в $L_p^\gamma(D)$.

Введем оператор

$$\Phi_\nu f = \varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{r=0}^\nu \lambda^r (K^r f)(x). \quad (10)$$

Положим $\Phi_\infty = \Phi$:

$$\Phi f(x) = \varphi(x) = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r (K^r f)(x). \quad (11)$$

В силу (10), (11) получим, что существует сильный предел $s\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu f = \Phi f$ (см. [16], с. 104), т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\Phi_\nu f - \Phi f\|_{L_p^\gamma(D)} = 0.$$

Согласно теореме о резонансе (см. [16], с. 104) заключаем, что предельный оператор $\Phi = \Phi_\infty$ ограничен и выполняется неравенство (9).

Подставляя в правую часть уравнения (5) функцию $\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r (K^r f)(x)$, заключаем, что эта функция — решение уравнения (5).

Из теоремы о резонансе вытекает ограниченность оператора $\|\Phi\|$ (см. [16], с. 104, следствие 1) и выполнение неравенства

$$\|\Phi\|_{L_p^\gamma(D)} \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\Phi_\nu\|_{L_{(p,\infty)}^\gamma(D)}$$

([16], с. 104, следствие 2). Таким образом, существует обращающий оператор $\Phi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu$, отображающий $L_{(p,\infty)}^\gamma(D)$ в $L_p^\gamma(D)$. В результате решением уравнения (5) является функция

$$\varphi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi^{(\nu)} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\nu} \lambda^r K^r f = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r K^r f.$$

Единственность решения уравнения (5) доказывается также, как в книге [17] (стр. 435), поэтому мы его не приводим.

Доказательство закончено.

2. ПОРОЖДЕННЫЕ МЕРОЙ ЛЕБЕГА—КИПРИЯНОВА ВЕСОВЫЕ ЧИ-ОПЕРАТОРЫ ОТ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим ЧИ-оператор

$$(I_\alpha f)(|x_\alpha|, x_\alpha) = \int_{|t_\alpha| < R} k(|x_\alpha|, x_\alpha; t_\alpha) f(t_\alpha, x_\alpha) dt_\alpha. \quad (12)$$

Сферическое преобразование координат $t_\alpha = \rho\Theta$:

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha_1} &= \cos \varphi_1, \\ \Theta_{\alpha_2} &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \Theta_{\alpha_3} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ &\dots \\ \Theta_{\alpha_{m-1}} &= \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}, \quad 0 \leq \varphi_i \leq \pi, i = \overline{1, m}, \\ \Theta_{\alpha_m} &= \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

приводит ЧИ-оператор (12) к следующему виду

$$(I_\alpha f)(|x_\alpha|, x_\alpha) = |S_1(m)|_{\gamma_\alpha} \int_0^{b_1} k(|x_\alpha|, x_\alpha; \rho) f(\rho, x_\alpha) \rho^{m+|\gamma|-1} d\rho,$$

где $|\gamma| = \sum_i \gamma_{\alpha_i}$ и "площадь нагруженной сферы" определяется равенством

$$|S_1(m)|_{\gamma_\alpha} = 2^n |S_1^+(m)|_{\gamma_\alpha} = 2^n \int_{S_1^+(m)=\{|\Theta|=1, \Theta_{\alpha_i}>0\}} \prod_{i=1}^m |\Theta_{\alpha_i}|^{\gamma_{\alpha_i}} dS, \quad \gamma_{\alpha_i} > -1.$$

Линейным весовым ЧИ-оператором от сферически симметричных функций называется выражение

$$(If)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha} (I_\alpha f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}). \quad (13)$$

Линейным частно-интегральным уравнением Фредгольма второго рода с линейным весовым ЧИ-оператором (13) называется уравнение

$$\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) - \lambda I\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = f(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}), \quad x \in \mathbb{R}_n. \quad (14)$$

3.1. ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ОГРАНИЧЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ВЕСОВОГО ЧИ-ОПЕРАТОРА ОТ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $\nu = m + |\gamma_\alpha| - 1$, $\nu > -1$. Введем пространство $P_{L_p^\gamma}$ с нормой

$$\|f\|_{P_{L_p^\gamma}} = \max \left\{ \|f\|_{L_{p^2}^\gamma(D)}, \right. \\ \left. \max_{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq (1, \dots, n) \end{array} \right. \left\| f \right\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_p^\nu(D_\rho))} \right\}, \|f\|_{L_p^\nu(D_\rho)} \right\}.$$

Теорема 4. Пусть $B_\rho = \{t_\alpha : |t_\alpha| < R_1\}$ и $B_r = \{x_\alpha : |x_\alpha| < R_2\}$ и пусть ядра операторов I_0 , I_α и $I_{1, \dots, n}$, составляющих линейный весовой ЧИ-оператор I от сферически симметричных функций, принадлежат весовым анизотропным пространствам Лебега—Киприянова

$$L_{p p'}^\gamma(D), L_{p p'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)}(B_{\rho, r}) \quad \text{и} \quad L_{p'}^\gamma(B_\rho; L_p^\gamma(B_r)).$$

Тогда

$$\|If\|_{L_p^\gamma(D)} \leq C \|f\|_{P_{L_p^\gamma(D)}},$$

где

$$C = \|k_0\|_{L_{p p'}^\gamma(D)} + |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{1+\frac{1}{p}} \sum_{\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq (1, \dots, n)} \|k\|_{L_{p p'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\nu, \nu)}(D_{\rho, r}))}^+ \\ + |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{1+\frac{1}{p}} \|k_{1, \dots, n}\|_{L_{p'}^\nu(D_\rho; L_p^\nu(D_r))},$$

где $\nu = m + |\gamma_\alpha| - 1$, $\nu > -1$ и m - натуральное число.

До к а з а т е л ь с т в о данной теоремы следует из теоремы 1.

3.2. ИТЕРАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ВЕСОВОГО ЧИ-ОПЕРАТОРА ОТ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Итерации линейного весового ЧИ-оператора I от сферически симметричных функций строятся по той же схеме, что и для весовых ЧИ-операторов K , т.е. $I^\ell = I I^{\ell-1}$.

Достаточный признак ограниченности итерации порядка ℓ , $\ell = 1, 2, \dots$ линейного весового ЧИ-оператора (13).

Теорема 5. Пусть $p \geq 1$ и $1/p + 1/p' = 1$ и натуральное число $i \leq \ell$ и

$$G_1 = \sup \left\{ \|k_0\|_{L_{p^\ell p'}^\gamma(D)}, \max_{i, \alpha \neq 0, \alpha \neq (1, \dots, n)} \left\{ |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{i+\frac{i}{p}} \|k\|_{L_{p^i p'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\nu, \nu)}(D_{\rho, r}))} \right\} \right\},$$

$$\left\{ |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{\ell+\frac{\ell}{p}} \|k_{1,\dots,n}\|_{L_{p'}^\nu(D_\rho; L_p^\nu(D_r))} \right\}_{\ell=1}^\infty,$$

$$\|f\|_{P_{L_p}^\gamma} = \sup \left\{ \|f\|_{L_{p^{\ell+1}}^\gamma(D)}, \right.$$

$$\left. \max_\alpha \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq (1, \dots, n) \end{array} \left| \|f\|_{L_{p^{\ell+1}}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_p^\nu(D_\rho))} \right\}, \|f\|_{L_p^\nu(D_\rho)} \right\}_{\ell=1}^\infty,$$

где $\nu = m + |\gamma_\alpha| - 1$, $\nu > -1$ и m — натуральное число.

Тогда для любого натурального числа ℓ

$$\|I^\ell f\|_{L_p^\gamma(D)} \leq G_1^\ell \|f\|_{P_{L_p}^\gamma(D)}. \quad (15)$$

Доказательство данной теоремы аналогично схеме доказательства теоремы 2, приведем его в сокращенном виде.

Имеем

$$\|I f\|_{L_p^\gamma(D)} = \left\| \left(I_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\alpha} I_{\alpha} + I_{1,\dots,n}^{(n)} \right) f \right\|_{L_p^\gamma(D)}.$$

К данному равенству применим неравенство Минковского для конечных сумм и с использованием теоремы 4 получим

$$\|I f\|_{L_p^\gamma(D)} = \left(\|k_0\|_{L_{p'}^\gamma(D)} + |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{1+\frac{1}{p}} \sum_{\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \dots, n} \|k\|_{L_{p'}^{\gamma_{\overline{\alpha}}}(D_{x_{\overline{\alpha}}}; L_{(p', p)}^{(\nu_\alpha, \nu_\alpha)}(D_\rho \times D_r))} + \right.$$

$$\left. |S_1(m)|_{\gamma_\alpha}^{1+\frac{1}{p}} \|k_{1,\dots,n}\|_{L_{p'}^\gamma(D_\rho; L_p^\gamma(D_r))} \right) \|f\|_{P_{L_p}^\gamma(D)}.$$

Таким образом неравенство (15) при $l = 1$ выполнено.

Аналогичные действия выполняем для $l = 2$, $l = 3$ и т.д. В результате получим неравенство (15).

Доказательство закончено.

3.3 РЕШЕНИЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ I ОТ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Для уравнения Фредгольма второго рода (14) v -е приближение имеет вид

$$\varphi^{(v)}(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^v \lambda^\ell (I^\ell f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}).$$

Тогда решение уравнения (14) определяется рядом Неймана

$$\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell (I^\ell f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}).$$

Пусть $\nu = m + |\gamma_\alpha| - 1$, $\nu > -1$ и m — натуральное число и

$$Q = \sup_{\ell} \left\{ [\mu(D_{x_{\overline{\alpha}}})]^{\frac{1}{p^{\ell p'}}}, [\mu(D)]^{\frac{1}{p^{\ell p'}}} \right\}_{\ell=1}^\infty,$$

$$H = \max \left\{ \|k_0\|_{L^\gamma_\infty(D)}, \|k_\alpha\|_{L^{\gamma\overline{\alpha}}_\infty(D_{x\overline{\alpha}}; L^{(\nu,\nu)}_{(p',p)}(D_\rho, r)), \|k_{1,\dots,n}\|_{L^\nu_{p'}(D_\rho; L^\nu_p(D_r))} \right\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть

$$k_0 \in L^\gamma_\infty(D), k \in L^{\gamma\overline{\alpha}}_\infty(D_{x\overline{\alpha}}; L^{(\nu,\nu)}_{(p',p)}(D_\rho, r)),$$

$$k_{1,\dots,n} \in L^\nu_{p'}(D_\rho; L^\nu_p(D_r))$$

и

$$\|f\|_{L^\gamma_{(p,\infty)}} = \sup \left\{ \|f\|_{L^{\gamma\overline{\alpha}}_{p^{r+1}}(D_{x\overline{\alpha}}; L^\nu_p(D_\rho))} \right\}_{\ell=1}^\infty < \infty,$$

и пусть $|\lambda|QH < 1$.

Тогда в $L^\gamma_{(p,\infty)}(D) = L^{\gamma\overline{\alpha}}_\infty(D_{x\overline{\alpha}}; L^\nu_p(D_\rho))$ существует предел $\Phi = \lim_{v \rightarrow \infty} \Phi_v$ функциональной последовательности

$$\Phi_v f = \varphi^{(v)}(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^v \lambda^\ell (I^\ell f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L^\gamma_{(p,\infty)}(D)$ в $L^\gamma_p(D)$ и

$$\|\Phi\|_{L^\gamma_p(D)} \leq \lim_{v \rightarrow \infty} \|\Phi_v\|_{L^\gamma_{(p,\infty)}(D)}.$$

Решение уравнения (14) единственно и существует в виде

$$\varphi(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\ell=0}^\infty \lambda^\ell (I^\ell f)(|x_\alpha|, x_{\overline{\alpha}}),$$

причем

$$\|\varphi\|_{L^\gamma_p} \leq \frac{\|f\|_{M_{L^\gamma_{(p,\infty)}}}}{1 - |\lambda|QH}.$$

Доказательство данной теоремы с точностью до обозначений совпадает с доказательством теоремы 3. Приводить его не будем. Отметим, что достаточно перейти в теореме 5 к пределу при $\nu \rightarrow \infty$.

Автор благодарна профессора Л. Н. Ляхову за поставленную задачу и выражает искреннюю благодарность за консультацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом последовательных приближений получено единственное решение частно-интегрального уравнения Фредгольма второго рода с линейным весовым частно-интегральным оператором и с линейным весовым частно-интегральным оператором от сферически симметричных функций в пространстве Лебега–Киприянова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов, Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
2. Ляхов, Л. Н. Частно-интегральные операторы неотрицательных порядков в весовых пространствах Лебега / Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова // Челябинский физико-математический журнал. — 2021. — Т. 6, вып. 3. — С. 289–298.

3. Ляхов, Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, вып. 4. — С. 527–538.
4. Appell, J. M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
5. Калитвин, А. С. Линейные операторы с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
6. Калитвин, А. С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.
7. Ляхов, Л. Н. Об уравнениях Фредгольма для частного интеграла в $\mathbb{R}_2$ / Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев, Н. И. Трусова // Проблемы математического анализа. — 2020. — Вып. 107. — С. 59–67.
8. Бессов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бессов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.
9. Ляхов, Л. Н. Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой. II / Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова // Челябинский физико-математический журнал. — 2020. — Т. 5, вып. 3. — С. 293–305.
10. Lyakhov, L. N. Boundedness of mixed norms of partial integral operators / L. N. Lyakhov, N. I. Trusova // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — V. 255, № 6. — P. 726–731.
11. Ляхов, Л. Н. Многомерные частные интегралы в анизотропных классах Лебега / Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев // Проблемы математического анализа. — 2020. — С. 13–26.
12. Ляхов, Л. Н. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. II: многомерный случай / Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев // Проблемы математического анализа. — 2020. — Вып. 102. — С. 125–130.
13. Ляхов, Л. Н. Частно-интегральные операторы неотрицательных порядков в весовых пространствах Лебега / Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова // Челябинский физико-математический журнал. — 2021. — Т. 6, вып. 3. — С. 289–298.
14. Ляхов, Л. Н. Об уравнении Фредгольма с весовым частно-интегральным оператором положительного порядка / Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 3. — С. 91–105.
15. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — М. : Из-во иностранной литературы, 1960. — 301 с.
16. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
17. Сабитов, К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения / К. Б. Сабитов. — М. : Высшая школа, 2005. — 671 с.

REFERENCES

1. Lyakhov L.N., Sanina E.L. The Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operator and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation. [Lyahov L.N., Sanina E.L. Operator Kipriyanova–Bel'trami s otricatel'noj razmernost'yu operatora Besselya i singulyarnaya zadacha Dirihle dlya V-garmonicheskogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya* — *Differential Equations*, 2020, vol. 56, № 12, pp. 1610–1620.
2. Lyakhov L.N., Trusova N.I. Partial-integral operators of non-negative orders in weighted Lebesgue spaces. [Lyahov L.N., Trusova N.I. Chastno-integral'nye operatory neotricatel'nyh porjadkov v vesovyh prostranstvah Lebeга]. *Chelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal* — *Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, 2021, vol. 6, iss. 3, pp. 289–298.
3. Lyakhov L.N., Sanina E.L. Differential and integral operations in the latent spherical symmetry and dimension of the Koch curve. [Lyahov L.N., Sanina E.L. Differencial'nye i integral'nye operacii v skrytoj sfericheskoj simmetrii i razmernost' krivoj Koha]. *Matematicheskie*

zametki — Mathematical Notes, 2023, vol. 113, iss. 4, pp. 527–538.

4. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.

5. Kalitvin A.S. Linear operators with partial integrals. [Kalitvin A.S. Linejnye operatory s chastnymi integralami]. Voronezh: TsChKI, 2000, 252 p.

6. Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linear equations with partial integrals. S-theory. [Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linejnye uravneniya s chastnymi integralami. S-teoriya]. Lipetsk: LGPU, 2004, 195 p.

7. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I., Trusova N.I. On the Fredholm equations for a partial integral in $\mathbb{R}_2$. [Lyahov L.N., Inozemcev A.I., Trusova N.I. Ob uravneniyah Fredgol'ma dlya chastnogo integrala v $\mathbb{R}_2$]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems of Mathematical Analysis*, 2020, iss. 107, pp. 59–67.

8. Bessov O.V., Ilyin V.P., Nikolsky S.M. Integral representations of functions and embedding theorems. [Bessov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1975, 478 p.

9. Lyakhov L.N., Trusova N.I. Boundedness of operators with partial integrals with mixed norm. II. [Lyahov L.N., Trusova N.I. Ogranichenost' operatorov s chastnymi integralami so smeshannoju normoj. II]. *CHelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal — Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, 2020, vol. 5, iss. 3, pp. 293–305.

10. Lyakhov L.N., Trusova N.I. Boundedness of mixed norms of partial integral operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 255, no. 6, pp. 726–731.

11. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I. Multidimensional partial integrals in anisotropic Lebesgue classes. [Lyahov L.N., Inozemcev A.I. Mnogomernye chastnye integraly v anizotropnyh klassah Lebeга]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems of Mathematical Analysis*, 2020, pp. 13–26.

12. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue classes. II: multidimensional case. [Lyahov L.N., Inozemcev A.I. CHastnye integraly v anizotropnyh klassah Lebeга. II: mnogomernyj sluchaj]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems of Mathematical Analysis*, 2020, iss. 102, pp. 125–130.

13. Lyakhov L.N., Trusova N.I. Partial-integral operators of non-negative orders in weighted Lebesgue spaces. [Lyahov L.N., Trusova N.I. CHastno-integral'nye operatory neotricatel'nyh porjadkov v vesovyh prostranstvah Lebeга]. *CHelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal — Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, 2021, vol. 6, iss. 3, pp. 289–298.

14. Lyakhov L.N., Trusova N.I. On the Fredholm Equation with a Weighted Partial-Integral Operator of Positive Order. [Lyahov L.N., Trusova N.I. Ob uravnenii Fredgol'ma s vesovym chastno-integral'nyim operatorom polozhitel'nogo porjadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 91–105.

15. Tricomi F. Integral Equations. [Trikomi F. Integral'nye uravneniya]. Moscow: Foreign Literature, 1960, 301 p.

16. Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

17. Sabitov K.B. Functional, differential and integral equations. [Sabitov K.B. Funkcional'nye, differencial'nye i integral'nye uravneniya]. Moscow: Higher school, 2005, 671 p.

*Трусова Н. И., Старший преподаватель кафедры математики и физики, Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия
E-mail: trusova.nat@gmail.com*

*Trusova N. I., Senior lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shanskiy University, Lipetsk, Russia
E-mail: trusova.nat@gmail.com*